**Escuela Politécnica Superior – 3º Ingeniería Informática**

# Laboratorio TAAO1

## Curso 2004/2005

## Autor de la práctica: Prof. Doroteo Torre Toledano

| Práctica 6 – Técnicas de diseño de filtros digitales. | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **Primer Apellido** | **Segundo Apellido** | **Nombre** | **Grupo** | |
| | | | **Puesto** | |
| | | | **Fecha** | |

El objetivo de esta práctica es que el alumno practique con las técnicas de diseño de filtros digitales más diferentes de las empleadas con filtros analógicos: el diseño de filtros FIR por enventanado. Primero se compararán las distintas ventanas más comúnmente utilizadas para el diseño de filtros FIR. Posteriormente se experimentará con los métodos que permiten transformar un filtro paso bajo en cualquiera de los otros tipos de filtros selectivos en frecuencia.

### -- INSTRUCCIONES GENERALES PARA LAS PRÁCTICAS DE TAAO1 --

Para llevar a cabo esta práctica, desarrolle cada ejercicio en un fichero de comandos 'ejercicio_X.m' separado (salvo cuando se le solicite desarrollar una función, en cuyo caso el fichero llevará el nombre de la función), de forma que obtenga los resultados de todo el ejercicio ejecutando dicho fichero de comandos.

En el caso de que el ejercicio consista en distintos apartados, comience el código correspondiente a cada apartado con una línea con el comando `disp('APARTADO X');` y finalícelo con una línea con el comando `pause;`. De esta forma, al ejecutar el fichero de comandos completo aparecerá en la consola de MATLAB `'APARTADO X'` antes de ejecutar el código correspondiente a cada apartado, y la ejecución de comandos se detendrá a la espera de que pulse cualquier tecla antes de pasar al siguiente apartado.

Justo antes de finalizar la práctica, comprima los ficheros '.m' generados en un único fichero 'practica_N_Grupo_XX.zip', conéctese al sistema de entrega de prácticas de la Intranet y entréguelo.

Guarde una copia de las funciones y ejercicios desarrollados. Pueden ser necesarios para la realización de prácticas futuras.

# 1. Introducción: El método de diseño de filtros FIR por enventanado.

El método de diseño de filtros FIR por enventanado comienza suponiendo que tenemos una expresión de la respuesta al impulso del filtro óptimo. Por ejemplo, la respuesta al impulso de un filtro paso bajo ideal se puede escribir como:

$$h_d[n] = \frac{\sin(\omega_0 n)}{\pi n}$$

Como sabemos, ésta es una respuesta al impulso infinita que es irrealizable en un tiempo finito. Para poder realizar un filtro parecido al definido por esta respuesta al impulso empleamos una aproximación desplazada y truncada de la misma:

$$h[n] = \begin{cases} \dfrac{\sin(\omega_0 (n-M))}{\pi (n-M)} & 0 \le n \le L-1 \\ 0 & resto \end{cases}$$

Donde $L$ es la longitud de la respuesta al impulso que empleamos (habitualmente impar) y $M = (L\text{-}1)/2$ es el desplazamiento de la respuesta al impulso.

Esta forma de truncar la respuesta al impulso se puede interpretar como la multiplicación de la respuesta al impulso desplazada por una ventana rectangular de longitud $L$. Como veremos en esta práctica, ésta no es la mejor aproximación al filtro ideal. Los cambios abruptos (de 1 a 0 y de 0 a 1) en la ventana rectangular se traducen en un espectro de la ventana con lóbulos secundarios grandes. Estos lóbulos secundarios grandes se transformarán en oscilaciones importantes en el filtro aproximado.

Para tratar de reducir dichas oscilaciones, lo habitual es emplear un tipo de ventana que suavice las transiciones entre 0 y 1 y entre 1 y 0. Existen cuatro ventanas cosenoidales que se emplean muy frecuentemente y que quedan definidas mediante estas fórmulas (entre paréntesis se indica la función de MATLAB que calcula estas ventanas, y que emplearemos en el desarrollo de esta práctica):

- Bartlett (función en MATLAB: `bartlett`):

$$w[n] = \begin{cases} 2n/(L-1) & 0 \le n \le (L-1)/2 \\ 2 - 2n/(L-1) & (L+1)/2 \le n \le L-1 \\ 0 \quad resto & \end{cases}$$

- Hanning (función en MATLAB: `hanning`):

$$w[n] = \begin{cases} 0.5 - 0.5\cos(2\pi n/(L-1)) & 0 \le n \le L-1 \\ 0 & resto \end{cases}$$

- Hamming (función en MATLAB: `hamming`):

$$w[n] = \begin{cases} 0.54 - 0.46\cos(2\pi n/(L-1)) & 0 \le n \le L-1 \\ 0 & resto \end{cases}$$

- Blackman (función en MATLAB: `blackman`):

$$w[n] = \begin{cases} 0.42 - 0.5\cos(2\pi n/(L-1)) + 0.08\cos(4\pi n/(L-1)) & 0 \le n \le (L-1) \\ 0 & resto \end{cases}$$

Existe otra ventana mucho más flexible, porque tiene un parámetro ($\beta$) que controla el grado de suavidad de las transiciones, y por tanto el compromiso entre la anchura del lóbulo principal y la altura de los lóbulos secundarios. Esta otra ventana es la ventana de Kaiser (función de MATLAB: `kaiser`), y queda definida por la siguiente fórmula:

$$w[n] = \begin{cases} \dfrac{I_0\left[\beta\left(1-[2(n-M)/(L-1)]^2\right)^{1/2}\right]}{I_0(\beta)} & 0 \le n \le L-1 \\ 0 & resto \end{cases}$$

En todas estas definiciones de ventanas $L$ es la longitud de la ventana que empleamos (habitualmente impar) y $M = (L\text{-}1)/2$.

Kaiser derivó una fórmula empírica para calcular el valor de $\beta$ necesario para conseguir un cierto valor de tolerancia ($\delta$) en la banda de paso y en la banda de corte (al emplear el método de diseño de enventanado esta tolerancia es siempre la misma en ambas bandas):

$$\beta = \begin{cases} 0.1102(A-8.7) & A > 50 \\ 0.5842(A-21)^{0.4} + 0.07886(A-21) & 21 \le A \le 50 \\ 0.0 & A < 21 \end{cases}$$

donde $A = \text{-}20\log_{10}\delta$.

Nota: La tolerancia es la máxima desviación en la banda de frecuencias entre el valor real de la respuesta en amplitud (en unidades lineales) y la respuesta en amplitud deseada en esa banda (también en unidades lineales).

Kaiser también obtuvo el valor mínimo del tamaño de la ventana necesario para obtener una banda de transición inferior a un cierto valor

$$L-1 = \frac{A-8}{2.285\Delta\omega}$$

donde $\Delta\omega$ es la anchura de la banda de transición.

En los dos siguientes ejercicios realizará el diseño de un mismo filtro paso bajo empleando distintas ventanas, para así comparar las ondulaciones máximas en la banda de corte, así como la anchura de la banda de transición obtenida.

- Para medir las ondulaciones de la banda de corte, mida la amplitud máxima en dB de la primera ondulación (la más próxima a la frecuencia de corte) y de la última ondulación (la más próxima a altas frecuencias).
- Para medir la anchura de la banda de transición, mida desde la frecuencia de corte del filtro (definida en cada problema) hasta la frecuencia más alta en la que la respuesta en amplitud del filtro no está por debajo de la amplitud máxima en dB de la primera ondulación.

Tenga especial cuidado en dos puntos problemáticos:

- La respuesta al impulso de un filtro paso bajo ideal incluye una división por cero en $n = 0$. Realice lo que crea necesario para tratar este problema.
- Algunas de las funciones de MATLAB que implementan las ventanas que hemos visto devuelven ventanas en las que la primera y la última muestra son nulas, mientras que otras no lo hacen así. Como emplear ventanas con la primera y la última muestra nulas es equivalente a emplear ventanas más cortas, compense esto en las ventanas en las que ocurra tomando una longitud de la ventana dos muestras mayor.

2. **Diseño de un filtro FIR paso bajo por enventanado con diferentes ventanas (Resultado: `ejercicio_2.m`).**

Diseñe cinco filtros FIR paso bajo con longitud de la respuesta al impulso 23 en los que el límite de la banda de paso sea $\omega_0 = 0.3\pi$ y empleando en cada uno una de las siguientes ventanas:

- Rectangular.
- Triangular o de Bartlett.
- Hanning.
- Hamming.
- Blackman.

a) Dibuje en el espacio siguiente las respuestas al impulso de los 5 filtros obtenidos, y comente los resultados que observa.

| |
|---|
| Rectangular: |
| Triangular o Blackman: |

| |
|---|
| Hanning: |
| Hamming: |
| Blackman: |
| Comentarios: |

| | |
|---|---|
| **Tiempo empleado en este apartado (minutos):** | |

b) Dibuje, en el siguiente espacio, la respuesta en amplitud (puede obtenerla con la función `freqz`) de cada uno de los filtros diseñados. Sobre la respuesta en amplitud indique y mida los siguientes parámetros (explicados en la introducción):

- Amplitud máxima de la primera ondulación de la banda de corte.
- Amplitud máxima de la última ondulación de la banda de corte.
- Anchura de la banda de transición.

Realice al final los comentarios que crea oportunos.

| |
|---|
| Rectangular: |
| Triangular o Blackman: |
| Hanning: |

| |
|---|
| Hamming: |
| Blackman: |
| Comentarios: |

| | |
|---|---|
| **Tiempo empleado en este apartado (minutos):** | |

## 3. Diseño de un filtro FIR paso bajo empleando la ventana de Kaiser (Resultado: `ejercicio_3.m`).

El método de diseño de filtros FIR con la ventana de Kaiser tiene la ventaja de que se pueden establecer con una serie de fórmulas los valores de $\beta$ y de la longitud de la ventana ($L$) para que la respuesta cumpla una serie de características. Estas fórmulas están recogidas en la introducción de esta práctica.

a) Dibuje el valor de $\beta$ necesario para un valor de $A$ dado en función de $A$ para valores de $A$ entre 0 y 100.

| Relación entre $\beta$ y A: | |
|---|---|
| **Tiempo empleado en este apartado (minutos):** | |

b) A la vista de los resultados del ejercicio 2, ¿puede explicar por qué el valor de $\beta$ es 0 para A < 21?

| Contestación: | |
|---|---|
| **Tiempo empleado en este apartado (minutos):** | |

c) Diseñe tres filtros FIR con las mismas especificaciones que las dadas en el ejercicio 2, pero esta vez con la ventana de Kaiser, y con valores de $\beta$ de 4, 6 y 9. Dibuje en el espacio siguiente la respuesta al impulso de los tres filtros diseñados, y comente los resultados obtenidos.

| |
|---|
| $\beta = 4$: |
| $\beta = 6$: |
| $\beta = 9$: |
| Comentarios: |

| | |
|---|---|
| **Tiempo empleado en este apartado (minutos):** | |

d) Dibuje, en el siguiente espacio, la respuesta en amplitud de cada uno de los filtros diseñados. Sobre la respuesta en amplitud indique y mida los mismos parámetros que midió en el ejercicio 2 sobre la respuesta en amplitud. Realice al final los comentarios que crea oportunos.

| |
|---|
| $\beta$ = 4: |
| $\beta$ = 6: |
| $\beta$ = 9: |
| Comentarios: |

| | |
|---|---|
| **Tiempo empleado en este apartado (minutos):** | |

## 4. Diseño de filtros FIR selectivos en frecuencia genéricos a partir de filtros FIR paso bajo (Resultado: `ejercicio_4.m`).

Como habrá comprobado, todos los métodos de diseño de filtros digitales que hemos visto, tanto en teoría como en esta práctica, se refieren al diseño de filtros paso bajo. La razón de que esto sea así es que cualquier otro tipo de filtro selectivo en frecuencia se puede obtener a partir de sumas y/o modulaciones de las respuestas al impulso de filtros paso bajo.

Comencemos con el ejemplo más sencillo: un filtro paso alto con frecuencia de corte $\omega_0 = 0.7\pi$ puede obtenerse de dos formas a partir de un filtro paso bajo:

- Por sustracción de respuestas al impulso: Si partimos de un filtro paso bajo $h_{lp}[n]$ con frecuencia de corte $\omega_0 = 0.7\pi$, entonces el filtro $h_{hp}[n]= \delta[n]-h_{lp}[n]$ será un filtro paso alto como el deseado. ¿Por qué?

| Respuesta: |
|---|

- Por modulación de la respuesta al impulso: Si partimos de un filtro paso bajo $h_{lp}[n]$ con frecuencia de corte $\omega_0 = 0.3\pi$, entonces el filtro $h_{hp}[n]= (-1)^n h_{lp}[n]$ será un filtro paso alto como el deseado. ¿Por qué?

| Respuesta: |
|---|

Pasemos ahora a complicar un poco más el problema: tratemos de obtener un filtro paso banda con frecuencias límite de la banda de paso $\omega_1 = 0.3\pi$ y $\omega_2 = 0.7\pi$ puede obtenerse de dos formas a partir de filtros paso bajo:

- Por sustracción de respuestas al impulso: Si partimos de un filtro paso bajo $h_{lp1}[n]$ con frecuencia de corte $\omega_2 = 0.7\pi$ , y de otro filtro paso bajo $h_{lp2}[n]$ con frecuencia de corte $\omega_1 = 0.3\pi$ , entonces el filtro $h_{bp}[n]$= $h_{lp1}[n]$-$h_{lp2}[n]$ será un filtro paso banda como el deseado. ¿Por qué?

| Respuesta: |
|---|

- Por modulación de la respuesta al impulso: Si partimos de un filtro paso bajo $h_{lp}[n]$ con frecuencia de corte $\omega_0 = 0.2\pi$ , entonces el filtro $h_{hp}[n]$= cos($\pi n$ /2) $h_{lp}[n]$ será un filtro paso alto como el deseado. ¿Por qué?

| Respuesta: | |
|---|---|
| **Tiempo empleado en este apartado (minutos):** | |

a) Diseñe cuatro filtros FIR paso alto con respuesta al impulso de longitud 23 con una frecuencia de corte $\omega_0 = 0.3\pi$ empleando los métodos de sustracción y de modulación que acaba de ver. Al diseñar el filtro, emplee la ventana de Hanning. Para obtener los cuatro filtros, emplee dos opciones: primero aplicar el método de sustracción o modulación y después hacer el enventanado, y aplicar primero el enventanado y luego el método de sustracción o modulación. Dibuje en el siguiente espacio las respuestas en amplitud y comente los resultados. Explique el por qué de los mismos, tratando de demostrar que lo que observa es general y no particular de este ejemplo.

| |
|---|
| Método de sustracción + enventanado: |
| Método de modulación + enventanado: |
| Enventanado + Método de sustracción: |

| |
|---|
| Eventanado + método de modulación: |
| Comentarios y demostraciones: |

| | |
|---|---|
| **Tiempo empleado en este apartado (minutos):** | |

b) Diseñe un filtro FIR con respuesta al impulso de longitud 23, y con respuesta en frecuencia paso banda con una banda de paso entre $\omega_{c1} = 0.2\pi$ y $\omega_{c2} = 0.8\pi$ empleando el método de modulación y la ventana de Hanning. Dibuje en el espacio siguiente la respuesta en amplitud del filtro obtenido y comente los resultados.

| |
|---|
| Respuesta en amplitud del filtro paso banda: |
| Comentarios: |

| | |
|---|---|
| **Tiempo empleado en este apartado (minutos):** | |

c) Diseñe un filtro FIR con respuesta al impulso de longitud 23, y con respuesta en frecuencia con dos bandas de paso, una entre $0.1\pi$ y $0.2\pi$ con ganancia 1, y otra entre $0.3\pi$ y $0.5\pi$ con ganancia 1/2. empleando el método de modulación y la ventana de Hanning. Observe que una forma de obtener este filtro es sumando las respuestas al impulso de dos filtros paso banda. Dibuje en el espacio siguiente la respuesta en amplitud del filtro obtenido y comente los resultados obtenidos, en particular la respuesta en amplitud en las bandas de paso. ¿Esperaba estos resultados?

| |
|---|
| Respuesta en amplitud del filtro paso banda (L=23): |
| Comentarios: |

Para entender qué ha pasado, dibuje en el siguiente espacio las respuestas al impulso eventanadas de los dos filtros FIR paso bajo que ha modulado y después sumado para obtener el filtro deseado. ¿Son estas respuestas al impulso una buena aproximación a la respuesta al impulso de un filtro paso bajo?

| |
|---|
| Respuesta al impulso de los filtros paso bajo enventanados (L=23): |

Comentarios:

Una posible solución para este problema es aumentar la longitud de la respuesta al impulso del filtro que está diseñando (aunque esto implicará que el filtro que ha diseñado será más complejo). Obtenga y dibuje en el siguiente espacio las respuestas al impulso eventanadas de los dos filtros FIR paso bajo con respuesta al impulso de longitud 201 que modularía y después sumaría para obtener el filtro deseado con longitud de la respuesta al impulso 201. ¿Son estas respuestas al impulso mejores aproximaciones a la respuesta al impulso de un filtro paso bajo?

Respuesta al impulso de los filtros paso bajo enventanados (L=201):

Comentarios:

Vuelva a diseñar el filtro FIR con dos bandas de paso anterior, empleando esta vez una longitud de respuesta al impulso de 201 muestras, y dibuje en el siguiente espacio la respuesta en amplitud del filtro resultante obtenido. Comente los resultados.

| |
|---|
| Respuesta en amplitud del filtro paso banda (L=201): |
| Comentarios: |

| | |
|---|---|
| **Tiempo empleado en este apartado (minutos):** | |