

Tratamiento Digital de Imágenes

Tema 4: Operadores Locales

...operadores locales, ajustes geométricos, operadores morfológicos, filtrado por reconstrucción, conjuntos de nivel...

José María Martínez Sánchez



Escuela Politécnica Superior



Universidad Autónoma de Madrid
E28049 Madrid (SPAIN)



Video Processing and Understanding Lab
Grupo de Tratamiento e Interpretación de Vídeo

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE MADRID

Índice

VPU

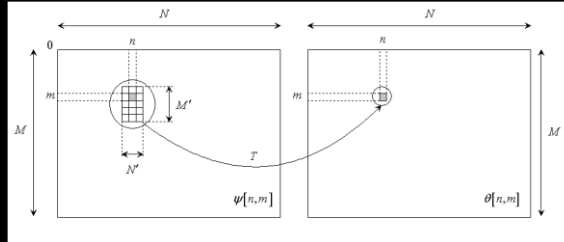
- Introducción
- Operadores LSI
- Ajustes geométricos
- Operadores morfológicos

TDI: Tratamiento Digital de Imágenes (JoseM.Martinez@uam.es) Noviembre 2011

Operadores Locales 2

- Los operadores locales efectúan una transformación:

$$\psi[n,m] \xrightarrow{T} \theta[n,m] / \theta[n,m] = T(\text{entorno de } \psi[n,m]), n \in [0, N-1], m \in [0, M-1]$$



- Tipos de operadores:

- Operadores LSI
- Operaciones geométricas
- Operadores morfológicos
 - Filtrado por reconstrucción
- Otras:
 - Técnicas basadas en conjuntos de nivel (level set)
 - procesos de difusión
 - contornos activos (snakes).

- Introducción
- Operadores LSI
 - Respuesta al impulso y respuesta en frecuencia
 - Aspectos operativos
 - Diseño frecuencial de máscaras
 - Suavizado
 - Realce de contornos
 - Detección y localización de bordes
- Ajustes geométricos
- Operadores morfológicos

Si la transformación es LSI, su respuesta al impulso unidad vendrá dada por:

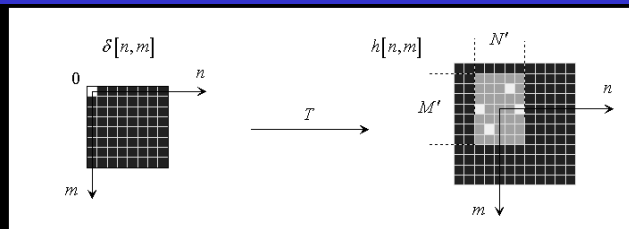
$$\delta[n, m] \xrightarrow{T} h[n, m] = T(\delta[n, m])$$

La respuesta a una imagen cualquiera resulta:

$$\psi[n, m] \xrightarrow{T} \theta[n, m] = \psi[n, m] * h[n, m]$$

Suponiendo que $h[n, m]$ es real, rectangular ($M' \times N'$) y simétrica respecto del origen:

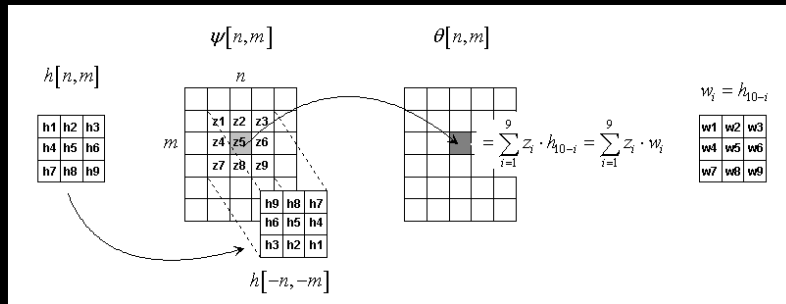
$$h[n, m] = 0 \quad \forall n, m / |n| > b, |m| > a, \text{ de modo que } N' = 2b + 1, M' = 2a + 1$$



, la operación de convolución puede expresarse:

$$\theta[n, m] = \psi[n, m] * h[n, m] = \sum_{k=-a}^a \sum_{l=-b}^b \psi[k, l] h[n-k, m-l]$$

El valor de $\theta[n, m]$ se obtiene centrado $h[-n, -m]$ sobre cada píxel $\psi[n, m]$ y sumando los productos de cada coeficiente de h por cada píxel homólogo de la vecindad.





A la "imagen" $h[-n, -m] = w[n, m]$ se le denomina por ello máscara, filtro o *kernel* de la transformación. Se puede convolucionar con w o correlacionar con h .

La operación de filtrado puede llevarse a cabo bien en el dominio "natural" o del píxel o bien en el dominio frecuencial, aplicando la propiedad de convolución:

$$\theta[n, m] = \psi[n, m] * h[n, m] \xrightarrow{DSFT} O[u, v] = \Psi[u, v] \cdot H[u, v]$$

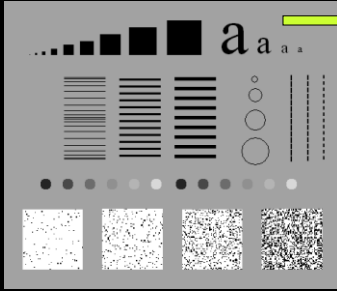
Las máscaras son versiones truncadas de las respuestas al impulso correspondientes a los filtros frecuenciales.


Operadores LSI:

Respuesta al impulso y respuesta en frecuencia

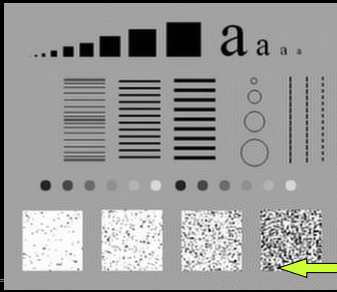
Dominio natural



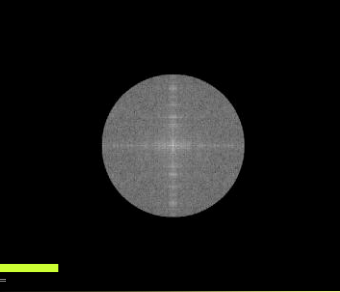
Dominio frecuencial





Impulse response



Frequency response



TDI: Tratamiento Digital de Imágenes (JoseM.Martinez@uam.es) Noviembre 2011 Operadores Locales 9

Operadores LSI:

Aspectos operativos

- ◆ Situación en los bordes: La aplicación de un filtro de $N' \times N'$ da lugar a una imagen con $(N' - 1)/2$ píxeles menos por cada lado. Si se desea que la imagen resultante tenga igual dimensión hay varias opciones: filtrado parcial, convolución circular o "padding".
- ◆ Separabilidad: permite reducir notablemente el número de operaciones (\otimes representa el producto externo, tensorial o de Kronecker).

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} w_{11} & w_{12} & \dots & w_{1N'} \\ w_{21} & w_{22} & \dots & w_{2N'} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ w_{M'1} & w_{M'2} & \dots & w_{M'N'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_{M'} \end{bmatrix} \otimes [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_{N'}] = \mathbf{x} \otimes \mathbf{y} \Rightarrow w_{ij} = y_i \cdot x_j$$

TDI: Tratamiento Digital de Imágenes (JoseM.Martinez@uam.es) Noviembre 2011 Operadores Locales 10

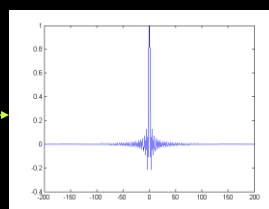
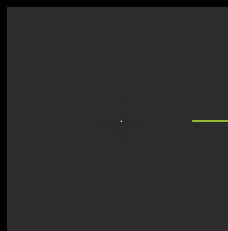
• Filtrado frecuencial como campo de pruebas para el diseño de máscaras para filtrado espacial.

• Metodología:

- Generación del filtro frecuencial con los parámetros deseados.
- Obtención de su respuesta impulsiva.
- Obtención de valores enteros en el rango deseado y cuyo error de redondeo de lugar a mínimo error cuadrático medio.
- Ajuste de la respuesta de la máscara a una señal constante.

$H[u, v]$

$h[n, m]$

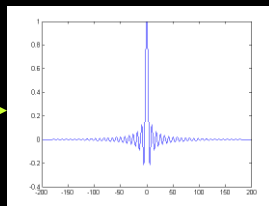
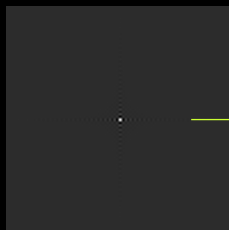


$$h_{3,3}[n, m] = \frac{1}{625} \begin{bmatrix} 49 & 77 & 49 \\ 77 & 121 & 77 \\ 49 & 77 & 49 \end{bmatrix}$$

$$h_{7,7}[n, m] = \frac{1}{305} \begin{bmatrix} 4 & 0 & -12 & -19 & -12 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -12 & 0 & 36 & 57 & 36 & 0 & -12 \\ -19 & 0 & 57 & 89 & 57 & 0 & -19 \\ -12 & 0 & 36 & 57 & 36 & 0 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & -12 & -19 & -12 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$H[u, v]$

$h[n, m]$





$$h_{3,3}[n, m] = \frac{1}{871} \begin{bmatrix} 90 & 100 & 90 \\ 100 & 111 & 100 \\ 90 & 100 & 90 \end{bmatrix}$$

$$h_{7,7}[n, m] = \frac{1}{1945} \begin{bmatrix} 8 & 17 & 24 & 27 & 24 & 17 & 8 \\ 17 & 36 & 51 & 57 & 51 & 36 & 17 \\ 24 & 51 & 72 & 80 & 72 & 51 & 24 \\ 27 & 57 & 80 & 89 & 80 & 57 & 27 \\ 24 & 51 & 72 & 80 & 72 & 51 & 24 \\ 17 & 36 & 51 & 57 & 51 & 36 & 17 \\ 8 & 17 & 24 & 27 & 24 & 17 & 8 \end{bmatrix}$$

- Filtros utilizados para suavizar, emborronar (*blurring*) o eliminar ruido.
- Diseño intuitivo de máscaras: promediado (*average*) y promediado ponderado (*weighted average*).

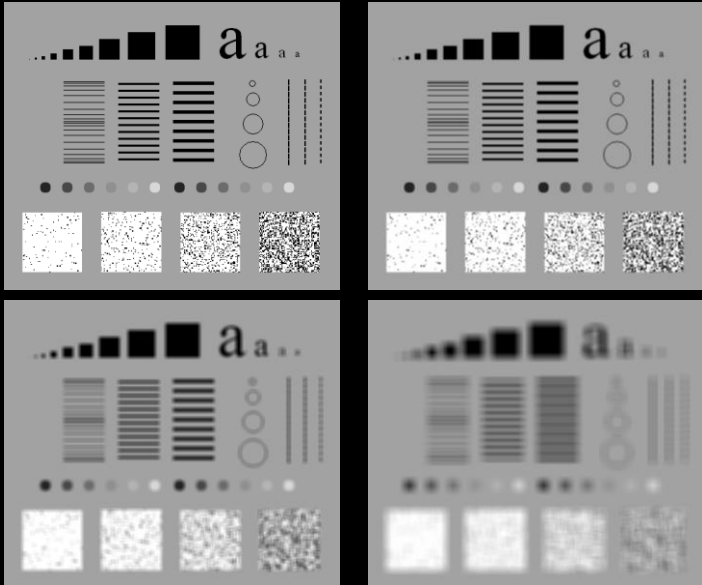
$$\frac{1}{9} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{9} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot [1 \quad 1 \quad 1]$$

$$\frac{1}{16} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{16} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot [1 \quad 2 \quad 1]$$

Operadores LSI: Suavizado

Original
Promediadas




3x3

7x7

15x15

TDI: Tratamiento Digital de Imágenes (JoseM.Martinez@uam.es) Noviembre 2011 Operadores Locales 15




Operadores LSI: Suavizado

- ◆ La máscara de filtrado promediado ponderada es un caso particular de filtro binomial, familia de filtros separables resultante de la aplicación sucesiva y en ambas dimensiones de la máscara:

$$B_x = B_y^T = \frac{1}{2} \cdot [1 \quad 1]$$
- ◆ Si se aplica 'n' veces, equivale a aplicar en cada dimensión lás máscaras:

$$B_x^2 = \frac{1}{2^2} \cdot [1 \quad 2 \quad 1], B_x^3 = \frac{1}{2^3} \cdot [1 \quad 3 \quad 3 \quad 1], B_x^4 = \frac{1}{2^4} \cdot [1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1], etc.$$
- ◆ El resultado en 2D son máscaras o filtros de la forma:

$$B^n = B_y^n \cdot B_x^n, \quad B^2 = \frac{1}{2^2} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{2^2} [1 \quad 2 \quad 1] = \frac{1}{16} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

TDI: Tratamiento Digital de Imágenes (JoseM.Martinez@uam.es) Noviembre 2011 Operadores Locales 16

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE MADRID **Operadores LSI: Suavizado** VPU

Promediado Binomial

5x5 5x5

7x7

TDI: Tratamiento Digital de Imágenes (JoseM.Martinez@uam.es) Noviembre 2011 Operadores Locales 17

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE MADRID **Operadores LSI: Suavizado** VPU



• Filtrado en el dominio frecuencial

- Aplicación de filtros de tamaño $M \times N$
- Filtro paso-bajo ideal de frecuencia de corte D_0 :



$$H[u, v] = \begin{cases} 1 & , D(u, v) \leq D_0 \\ 0 & , D(u, v) > D_0 \end{cases}$$

$$D(u, v) = \left[(u - M/2)^2 + (v - N/2)^2 \right]^{1/2}$$

TDI: Tratamiento Digital de Imágenes (JoseM.Martinez@uam.es) Noviembre 2011 Operadores Locales 18

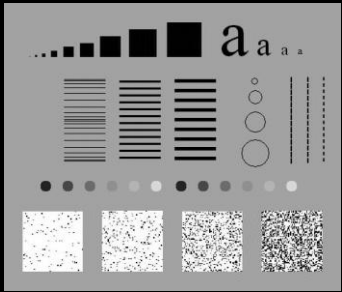

Operadores LSI:
Suavizado


TDI: Tratamiento Digital de Imágenes (JoseM.Martinez@uam.es) Noviembre 2011 Operadores Locales 19

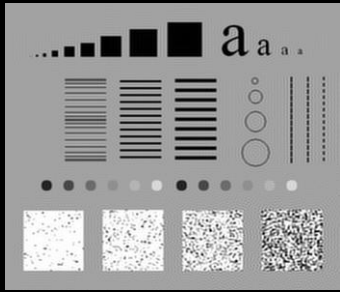

Operadores LSI:
Suavizado


Filtrado ideal con varios radios

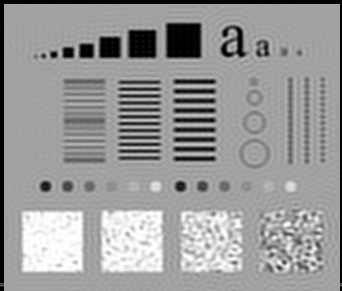
1/2



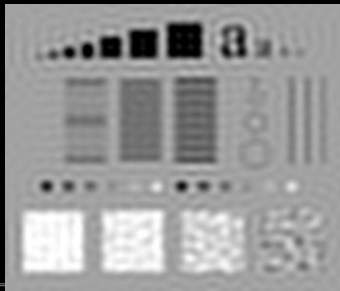
1/4




1/8



1/16

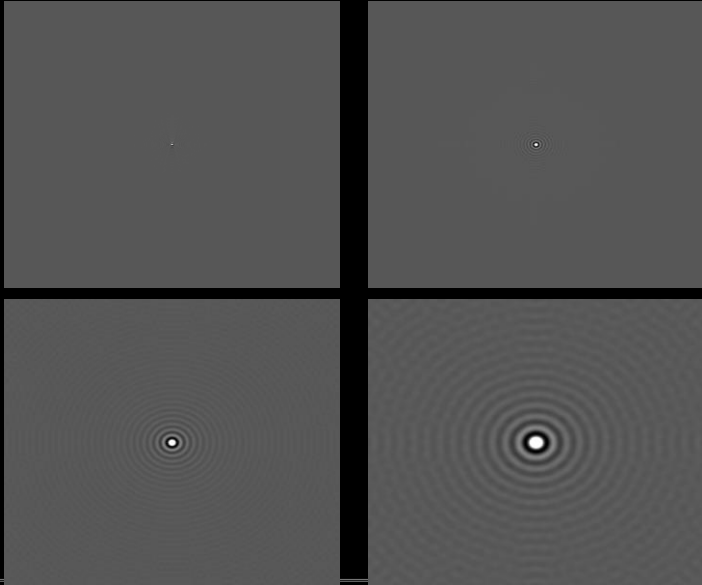


TDI: Tratamiento Digital de Imágenes (JoseM.Martinez@uam.es) Noviembre 2011 Operadores Locales 20






Operadores LSI: Suavizado

Respuestas al impulso de filtros ideales de varios radios



1/2
1/4
1/8
1/16

TDI: Tratamiento Digital de Imágenes (JoseM.Martinez@uam.es) Noviembre 2011 Operadores Locales 21






Operadores LSI: Suavizado

✦ *Filtro paso-bajo de Butterworth de orden n y frecuencia de corte D_0 :*

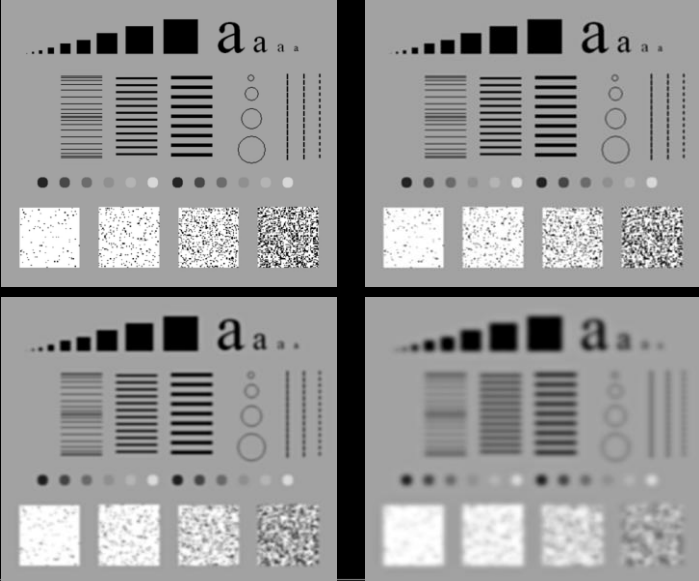
$$H[u, v] = \frac{1}{1 + [D(u, v)/D_0]^{2n}}$$

TDI: Tratamiento Digital de Imágenes (JoseM.Martinez@uam.es) Noviembre 2011 Operadores Locales 22






Operadores LSI: Suavizado

Filtrado *Butterworth* de orden 2 con varias frecuencias de corte

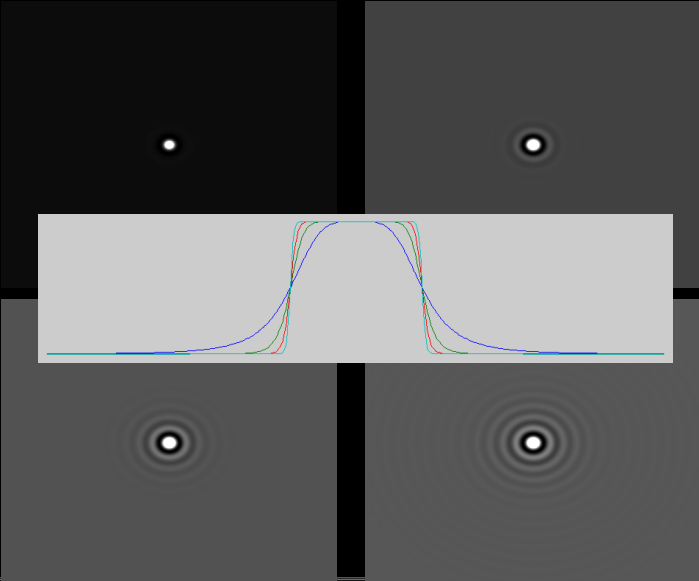


TDI: Tratamiento Digital de Imágenes (JoseM.Martinez@uam.es) Noviembre 2011
Operadores Locales **23**

Operadores LSI: Suavizado

Respuestas al impulso de filtros de *Butterworth* de varios órdenes, para un corte de 1/16



TDI: Tratamiento Digital de Imágenes (JoseM.Martinez@uam.es) Noviembre 2011
Operadores Locales **24**

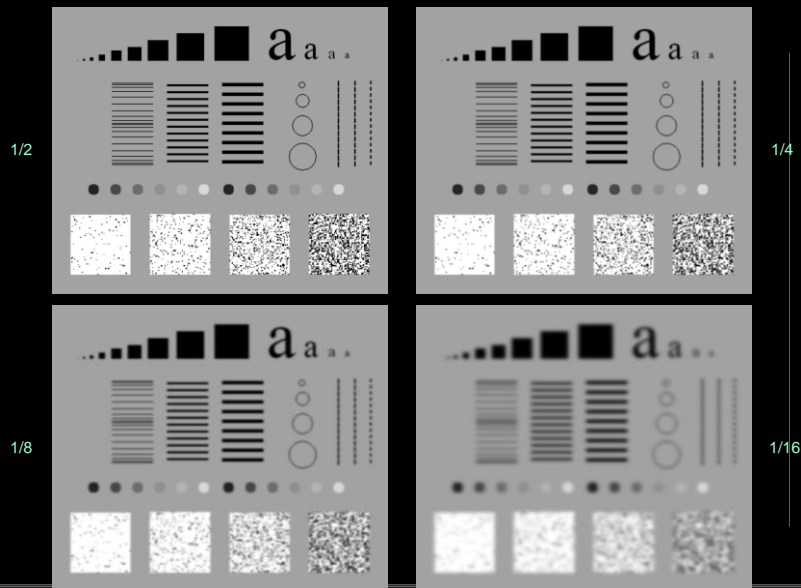
- *Filtro paso-bajo de Butterworth de orden n y frecuencia de corte D_0 :*

$$H[u, v] = \frac{1}{1 + [D(u, v)/D_0]^{2n}}$$

- *Filtro paso-bajo Gaussiano de desviación (o frecuencia de corte) D_0 :*

$$H[u, v] = e^{-D^2(u, v)/2D_0^2}$$

Filtrado Gaussiano con varias frecuencias de corte



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE MADRID **UA**

Operadores LSI:
Suavizado

Ideal, Butterworth de orden 2 (corte 1/8) y Gaussiano (corte 1/8)

VPU

Butterworth Gaussiano

TDI: Tratamiento Digital de Imágenes (JoseM.Martinez@uam.es) Noviembre 2011 Operadores Locales 27

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE MADRID **UA**

Operadores LSI:
Suavizado

VPU

- ✦ *Filtro paso-bajo de Butterworth de orden n y frecuencia de corte D_0 :*



$$H[u, v] = \frac{1}{1 + [D(u, v)/D_0]^{2n}}$$

- ✦ *Filtro paso-bajo Gaussiano de desviación (o frecuencia de corte) D_0 :*


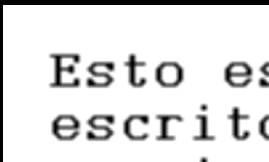
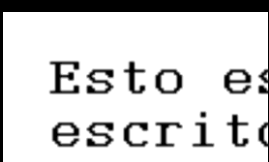
$$H[u, v] = e^{-D^2(u, v)/2D_0^2}$$

- ✦ *Aplicaciones.*



TDI: Tratamiento Digital de Imágenes (JoseM.Martinez@uam.es) Noviembre 2011 Operadores Locales 28

Operadores LSI: Suavizado

Original	<p>Esto es un ejemplo de texto escrito con caracteres no suavizados, para observar el efecto que sobre ellos tiene la aplicación de un filtro de suavizado.</p>	
Promediado 3x3	<p>Esto es un ejemplo de texto escrito con caracteres no suavizados, para observar el efecto que sobre ellos tiene la aplicación de un filtro de suavizado.</p>	
Binomial 3x3	<p>Esto es un ejemplo de texto escrito con caracteres no suavizados, para observar el efecto que sobre ellos tiene la aplicación de un filtro de suavizado.</p>	

TDI: Tratamiento Digital de Imágenes (JoseM.Martinez@uam.es) Noviembre 2011 Operadores Locales 29

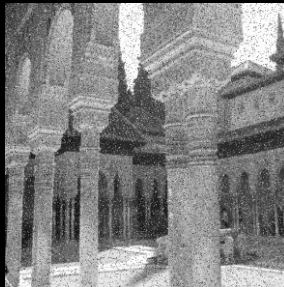
Operadores LSI: Suavizado

* Filtrado no lineal

- *El concepto de máscara y su aplicación es similar, pero las operaciones que se realizan para obtener el resultado no son lineales.*
- *Filtro de mediana: ideado para eliminar ruido impulsivo respetando los contornos (rampas y discontinuidades).*
- *Es un caso particular de los filtros de estadísticas de orden (order-statistics filters): filtros de máximo, filtros de mínimo, filtros de posición.*

TDI: Tratamiento Digital de Imágenes (JoseM.Martinez@uam.es) Noviembre 2011 Operadores Locales 30

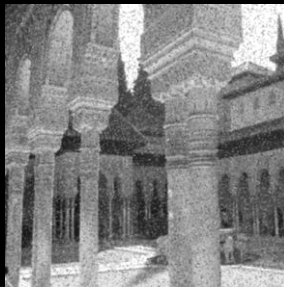
Original



Mediana
3x3



Promediado
3x3



Promediado
5x5



- ◆ Filtros utilizados para resaltar el detalle fino o realzar una imagen emborronada.

- ◆ Fundamento:

- Del mismo modo que el promediado es parejo a la integración, la operación opuesta guarda relación con la derivación, que toma valores máximos en discontinuidades (y ruido); por lo tanto, es útil para resaltarlas. Uso habitual de la primera y segunda derivada.

- En imágenes discretas el concepto de derivada se asocia al de diferencia, y la definición de diferencias sucesivas debe cumplir propiedades similares.

$$\frac{\partial f[n]}{\partial n} = f[n+1] - f[n]$$

$$\frac{\partial^2 f[n]}{\partial n^2} = f[n+1] + f[n-1] - 2f[n]$$

- Comparación de los efectos de la primera (1ª) y segunda (2ª) diferencia: la 1ª genera líneas más gruesas en los **bordes de objetos**, la 2ª responde más a puntos aislados y **detalle fino**, en escalones abruptos la 1ª responde más y la 2ª genera dos líneas, la 2ª responde más a una línea que a un escalón y más a un punto aislado (**ruido**) que a una línea.

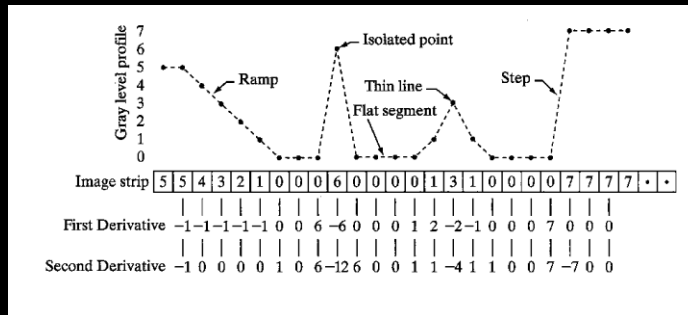


Imagen extraída de "Digital Image Processing", R.C. Gonzalez, Prentice Hall, 2002

La Laplaciana

- Desarrollo de una máscara isotropa equivalente a una segunda derivada. El camino es hallar una versión discreta de la Laplaciana:

$$\nabla^2 \psi(x, y) = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}$$

- Teniendo en cuenta que para el caso discreto y para cada dimensión:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial n^2} = \psi[n+1, m] + \psi[n-1, m] - 2\psi[n, m]$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial m^2} = \psi[n, m+1] + \psi[n, m-1] - 2\psi[n, m]$$

- resultaría una máscara de 3x3 isotropa a incrementos de 90°, que combinada con una similar rotada 45° da lugar a la máscara definitiva:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -8 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

- La Laplaciana elimina las zonas uniformes. Para realzar el detalle fino de una imagen (y sus contornos) se combina la imagen con su Laplaciana o se combinan usando una máscara conjunta; luego, para representarla, se re-escala el resultado:

$$\theta[n, m] = \psi[n, m] - \nabla^2 \psi[n, m]$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 5 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

o la isótropa

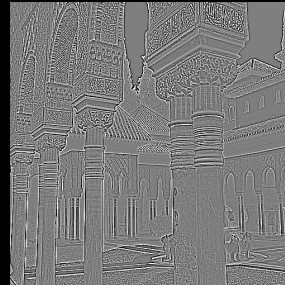
$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & 9 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Realce del detalle fino

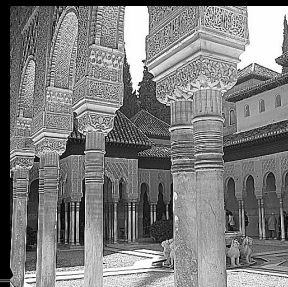
Original



Laplaciana
escalada



Realce
escalado



El gradiente

- La primera derivada se implementa con la magnitud del gradiente:

$$\nabla \psi = \begin{bmatrix} G_x \\ G_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \psi}{\partial x} \\ \frac{\partial \psi}{\partial y} \end{bmatrix}$$

$$\nabla \psi = [G_x^2 + G_y^2]^{1/2} = \left[\left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2 \right]^{1/2} \approx |G_x| + |G_y|$$

- Versión discreta del gradiente. Para una vecindad de 3x3, en torno a un pixel de valor z_4 :

$$\begin{bmatrix} z_1 & z_2 & z_3 \\ z_4 & z_5 & z_6 \\ z_7 & z_8 & z_9 \end{bmatrix}$$

- podemos definir las derivadas direccionales: $G_n = (z_6 - z_5)$, $G_m = (z_8 - z_5)$
- o bien derivadas cruzadas (Roberts, 1965): $G_{n,m} = (z_9 - z_5)$, $G_{-n,m} = (z_8 - z_6)$
- Por lo tanto: $\nabla \psi [n,m] = [(z_9 - z_5)^2 + (z_8 - z_6)^2]^{1/2} \approx |(z_9 - z_5)| + |(z_8 - z_6)|$, que se puede implementar con las máscaras (operador de Roberts):

$$R_{n,m} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_{-n,m} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

- Aproximaciones con operadores de 3x3:

Operador de Prewitt

$$P_m = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$P_n = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Operador de Sobel

$$S_m = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$S_n = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Operadores diagonales

$$P_{n,-m} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

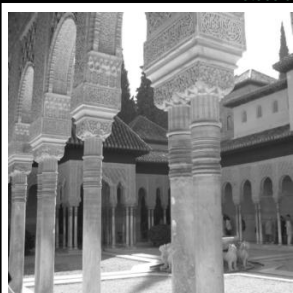
$$P_{n,m} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$S_{n,-m} = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$S_{n,m} = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Detección de contornos

Original



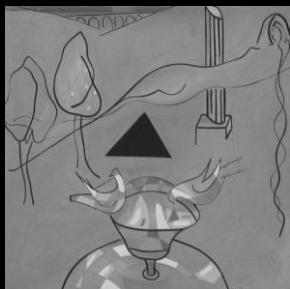
Prewitt



Prewitt - v

Marcado de contornos

Original



Gradiente
Prewitt

Marcado de
contornos



Filtrado en el dominio frecuencial

- En general, para amplitudes normalizadas, $H_{hp}[u,v] = 1 - H_{lp}[u,v]$

- Filtro paso-alto ideal de frecuencia de corte D_0 :

$$H[u,v] = \begin{cases} 0, & D(u,v) \leq D_0 \\ 1, & D(u,v) > D_0 \end{cases}$$

$$D(u,v) = \left[(u - M/2)^2 + (v - N/2)^2 \right]^{1/2}$$

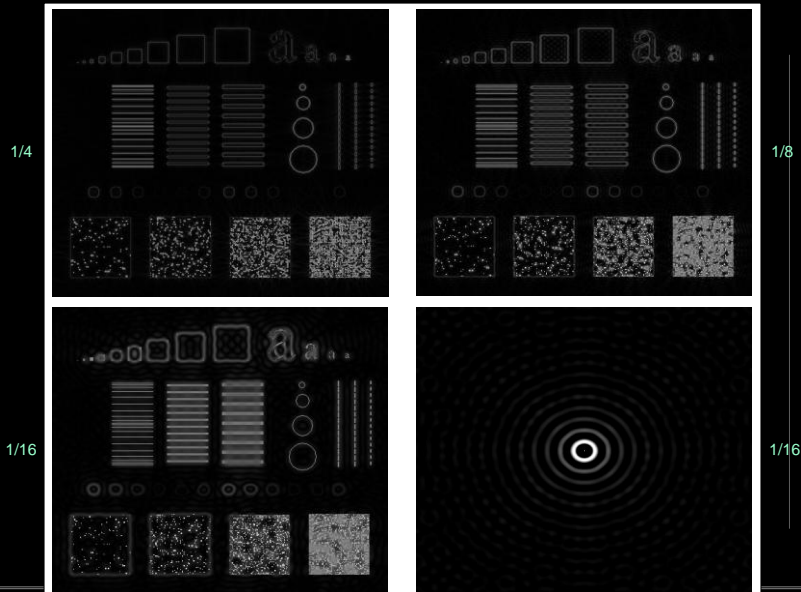
- Filtro paso-alto de Butterworth de orden n y frecuencia de corte D_0 :

$$H[u,v] = \frac{1}{1 + [D_0/D(u,v)]^{2n}}$$

- Filtro paso-alto Gaussiano de desviación (o frecuencia de corte) D_0 :

$$H[u,v] = 1 - e^{-D^2(u,v)/2D_0^2}$$

Filtrado ideal con varios radios o frecuencias de corte






Operadores LSI: Realce de contornos

Filtrado Butterworth de orden 2 con varias frecuencias de corte



TDI: Tratamiento Digital de Imágenes (JoseM.Martinez@uam.es) Noviembre 2011 Operadores Locales 43




Operadores LSI: Realce de contornos

Filtrado Gaussiano con varias frecuencias de corte



TDI: Tratamiento Digital de Imágenes (JoseM.Martinez@uam.es) Noviembre 2011 Operadores Locales 44

■ Laplaciana:

- Por las propiedades de derivación y linealidad de la FT:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \xrightarrow{FT} (ju)^2 \cdot \Psi(u, v) + (jv)^2 \cdot \Psi(u, v) = -(u^2 + v^2) \cdot \Psi(u, v)$$

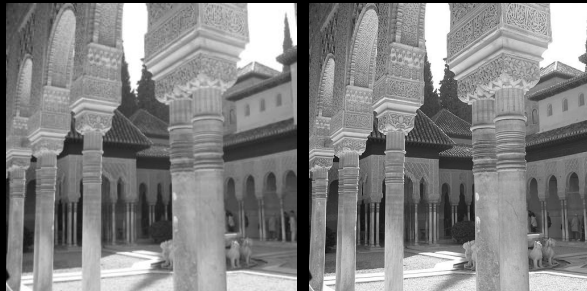
- Por lo tanto, el filtro $H(u, v) = -(u^2 + v^2)$ implementa la Laplaciana. Para el caso discreto, y tomando el origen del filtro en $M/2, N/2$, resulta:

$$H[u, v] = -((u - M/2)^2 + (v - N/2)^2)$$

- Y el filtro para realzar contornos:

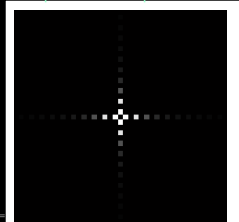
$$\theta[n, m] = \psi[n, m] - \nabla^2 \psi[n, m] \xrightarrow{DFT} O[u, v] = (1 - H[u, v]) \cdot \Psi[u, v]$$

Original

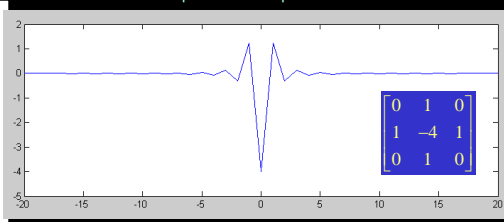


Filtrada

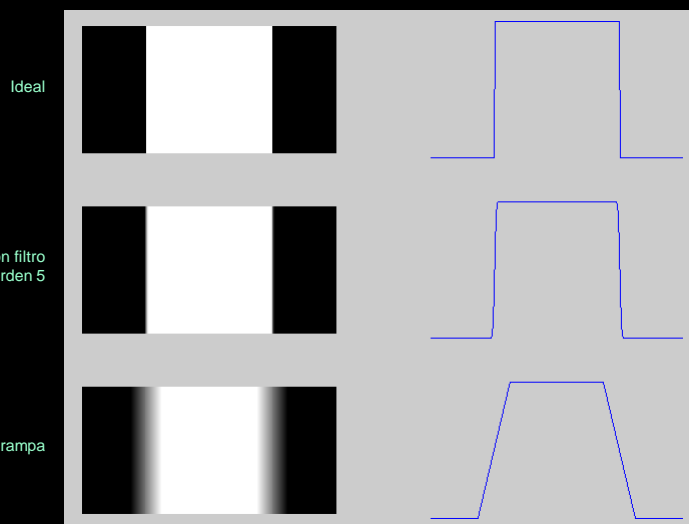
Detalle de la respuesta al impulso de la Laplaciana



Detalle 1D de la respuesta al impulso de la Laplaciana



- Base de técnicas de más alto nivel.
- Bordes (*edges*) y contornos (*boundaries*):
 - Borde: *variación local significativa, es decir superior a un cierto umbral, del nivel de luminancia, en una dirección dada. Píxeles de borde, segmentos de borde.*
 - Contorno: *conjunto de píxeles conectados que limitan dos regiones contiguas.*
- Modelado de bordes:
 - Bordes ideales.
 - Bordes no ideales y modelo en rampa.

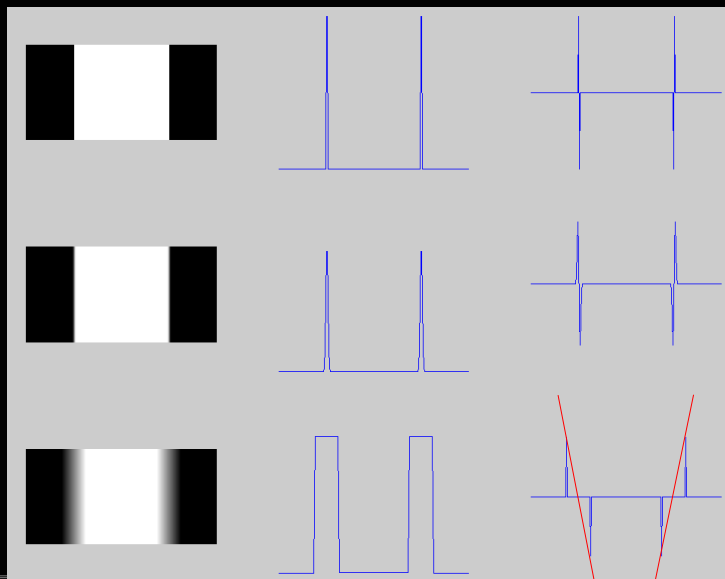


• Efecto de la primera y segunda derivada sobre un borde:

- La primera derivada permite localizar variaciones de la luminancia
- La segunda derivada indica los puntos en que comienza y termina la variación, y el punto 'medio' de ésta ('zero-crossing').
- Posibilidad de utilizar estas herramientas como detectores.

Primera derivada

Segunda derivada



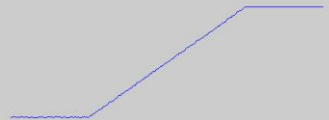
Efecto del ruido sobre estos operadores:

- Aunque el ruido sea apenas perceptible en una imagen, su efecto sobre la primera y segunda derivada es notable.

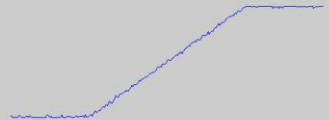
$\sigma^2 = 0$



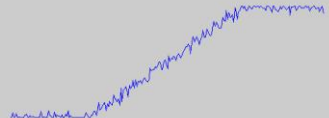
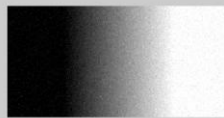
$\sigma^2 = 10^{-5}$





$\sigma^2 = 10^{-4}$



$\sigma^2 = 10^{-3}$


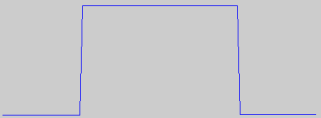
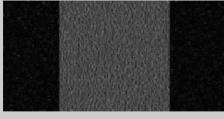
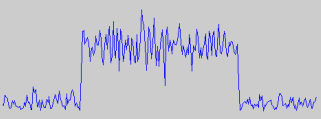

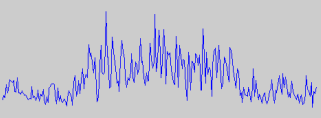

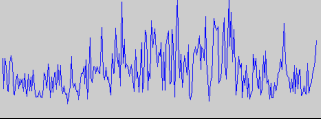




Operadores LSI: Perfil

Detección y localización de bordes

Primera derivada (Prewitt)

$\sigma^2 = 0$		
$\sigma^2 = 10^{-5}$		
$\sigma^2 = 10^{-4}$		
$\sigma^2 = 10^{-3}$		


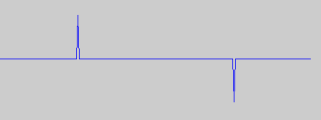

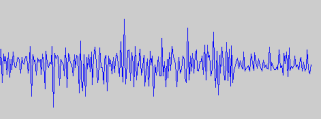

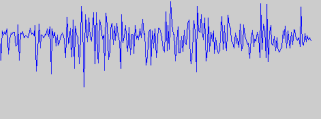

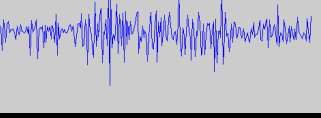
TDI: Tratamiento Digital de Imágenes (JoseM.Martinez@uam.es) Noviembre 2011 Operadores Locales 53

Operadores LSI: Perfil

Detección y localización de bordes

Segunda derivada (Laplaciano)

$\sigma^2 = 0$		
$\sigma^2 = 10^{-5}$		
$\sigma^2 = 10^{-4}$		
$\sigma^2 = 10^{-3}$		

TDI: Tratamiento Digital de Imágenes (JoseM.Martinez@uam.es) Noviembre 2011 Operadores Locales 54

• Detección de bordes

- Basada en el gradiente: suavizado ligero del operador de Sobel, suavizado previo para controlar el nivel de detalle, bordes gruesos, posibilidad de conocer la dirección del borde:

$$\alpha_v = \tan^{-1} \left(\frac{G_y}{G_x} \right), \text{ con } G_x = \frac{\partial \psi}{\partial x}, G_y = \frac{\partial \psi}{\partial y}$$

- Basada en la Laplaciana: localización precisa del borde a partir de los cruces por cero, imprescindible un suavizado previo que resulta en el operador LoG.

Gradiente Sobel



Umbralizada






Operadores LSI: Detección y localización de bordes





Umbralización y cruces por cero

LoG





TDI: Tratamiento Digital de Imágenes (JoseM.Martinez@uam.es) Noviembre 2011
Operadores Locales 57

Índice

- Introducción
- Operadores LSI
- Ajustes geométricos
 - Ajustes 2D
 - Ajustes 3D
- Operadores morfológicos

TDI: Tratamiento Digital de Imágenes (JoseM.Martinez@uam.es) Noviembre 2011
Operadores Locales 58

- Transformaciones que modifican la posición de los píxeles de la imagen pero, en el caso de imágenes continuas, no sus valores.

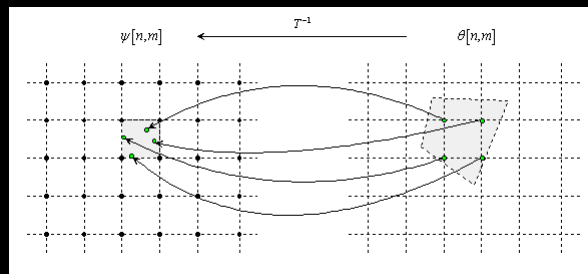
$$\psi(x, y) \xrightarrow{T} \theta(x', y') / (x', y') = T(x, y)$$

- La posición transformada en general no resulta en un par de coordenadas enteras, lo que en el caso de imágenes discretas exige interpolar.

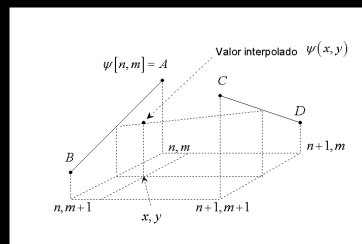
$$\psi[n, m] \xrightarrow{T} \theta[n', m']$$

$$\begin{matrix} (n', m') & \xrightarrow{T^{-1}} & (x, y) \\ n', m' \in \mathbb{Z} & & x, y \in \mathbb{R} \end{matrix}, \quad \theta[n', m'] = \psi(x, y) = f(\psi[n, m])$$

Obtención de la posición origen de cada punto transformado



Interpolación bilineal del valor origen y transformado



Transformaciones afines: desplazamientos, rotaciones y escalados.

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 & -c_2 \\ c_2 & c_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_3 \\ c_4 \end{bmatrix}$$

Rotación:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\varphi \neq 0 \Rightarrow \begin{cases} \cos \varphi \approx 1 \\ \sin \varphi \approx \varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\varphi \\ \varphi & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Desplazamiento:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d_x \\ d_y \end{bmatrix}$$

Escalado:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \rho \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

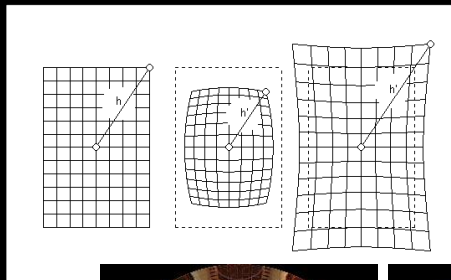
Transformación afín:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \rho \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d_x \\ d_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 & -c_2 \\ c_2 & c_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_3 \\ c_4 \end{bmatrix}$$

Orthographic

Barrel

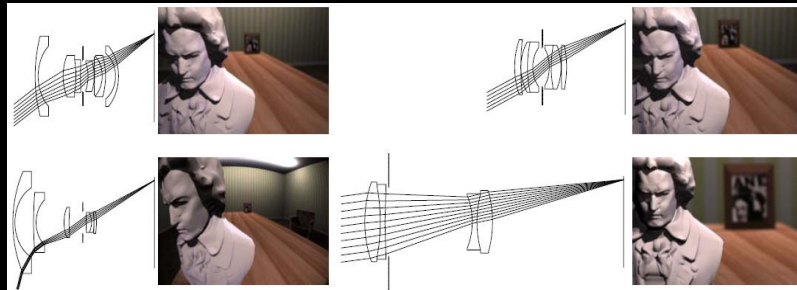
Pincushion



Imágenes superiores extraídas de <http://www.vanwalree.com>
Imágenes inferiores extraídas de <http://www.panotools.org>

Gran angular (35 mm)

Doble gausiana (50 mm)



Ojo de pez (16 mm)

Teleobjetivo (200 mm)

Imagen extraída de Paul E. Haeberli, Kurt Akeley, "The accumulation Buffer: Hardware support for high-quality rendering". Computer Graphics, SIGGRAPH '90

• Corrección radial

- *Sistemas métricos (fotogrametría) versus sistemas no-métricos.*
- *Esquemas basados en funciones de proyección radial.*
- *Esquemas basados en aproximaciones polinómicas.*

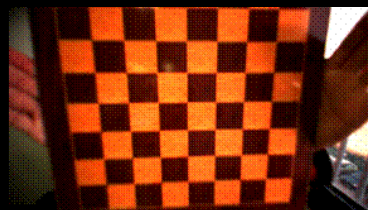
Perspectiva	Estereográfica	Equidistancia	Angulo sólido	Ley del seno
$r(\alpha) = f \cdot \tan(\alpha)$	$r(\alpha) = f \cdot \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)$	$r(\alpha) = f \cdot \alpha$	$r(\alpha) = f \cdot \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$	$r(\alpha) = \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$



Patrón de ajuste capturado



Patrón de ajuste corregido



Modelo polinómico de deformación:

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = k_1 r_x^2 + k_2 r_x^4 + \dots + k_n r_x^{2n}, \quad r_x = d(\mathbf{x}, \mathbf{0}), \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}, \quad \mathbf{0} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$$

Obtención de los parámetros del modelo mediante el ajuste a rectas de puntos capturados que se sabe 'a priori' que están alineados.

Imagen captada con un 'tele'



Corrección polinómica

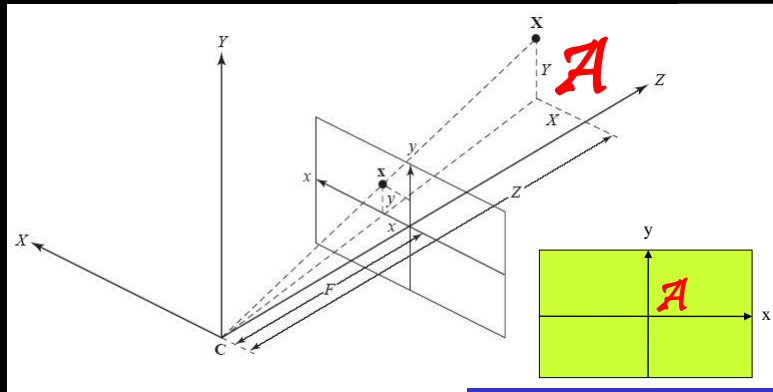


$$k_1 = 0.5 \cdot 10^{-6}, k_2 = 2.5 \cdot 10^{-11}$$

$$d(x, x') = k_1 r_x^2 + k_2 r_x^4 + \dots + k_n r_x^{2n}$$

$$r_x = d(x, \mathbf{0}), \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}, \quad \mathbf{0} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$$

- Imágenes resultantes de un proceso de proyección.

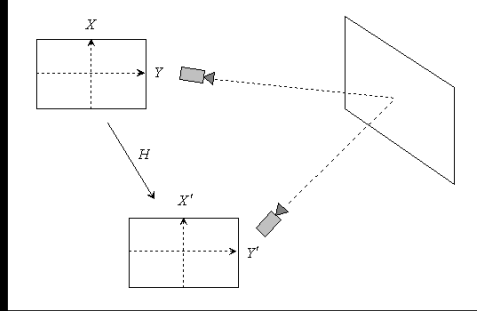


Ecuaciones que modelan el proceso de proyección en coordenadas afines:

$$\begin{aligned} \frac{x}{F} &= \frac{X}{Z} & \Rightarrow & \quad x = F \frac{X}{Z} \\ \frac{y}{F} &= \frac{Y}{Z} & \Rightarrow & \quad y = F \frac{Y}{Z} \end{aligned} \Rightarrow \mathbf{p} = \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{F}{Z} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}$$

- La geometría proyectiva ofrece un marco lineal para el tratamiento de estas situaciones.

- Homografías o transformaciones proyectivas:
describen la transformación que experimenta un plano proyectado cuando la posición del observador (o de la cámara) varía.

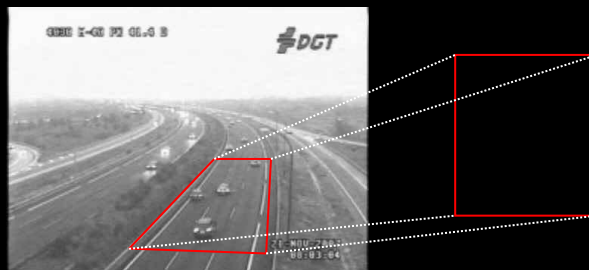


$$\begin{bmatrix} X' \\ Y' \\ T' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}' \approx \mathbf{H} \cdot \mathbf{x} \Rightarrow \begin{cases} x' = \frac{h_{11}x + h_{12}y + h_{13}}{h_{31}x + h_{32}y + h_{33}} \\ y' = \frac{h_{21}x + h_{22}y + h_{23}}{h_{31}x + h_{32}y + h_{33}} \end{cases}$$

- Ajustes básicos basados en la aplicación de homografías:

- Cambios del punto de vista para facilitar tareas de análisis.

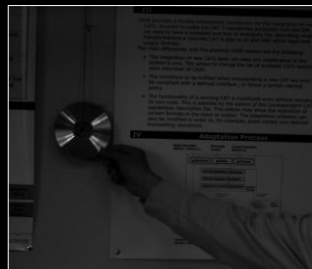
Corrección del punto de vista para
análisis cenital



• Ajustes básicos basados en la aplicación de homografías:

- *Cambios del punto de vista para facilitar tareas de análisis.*
- *Ajuste de imágenes captadas por distintas posiciones de la cámara.*



Corrección de perspectiva en sistemas multicámara

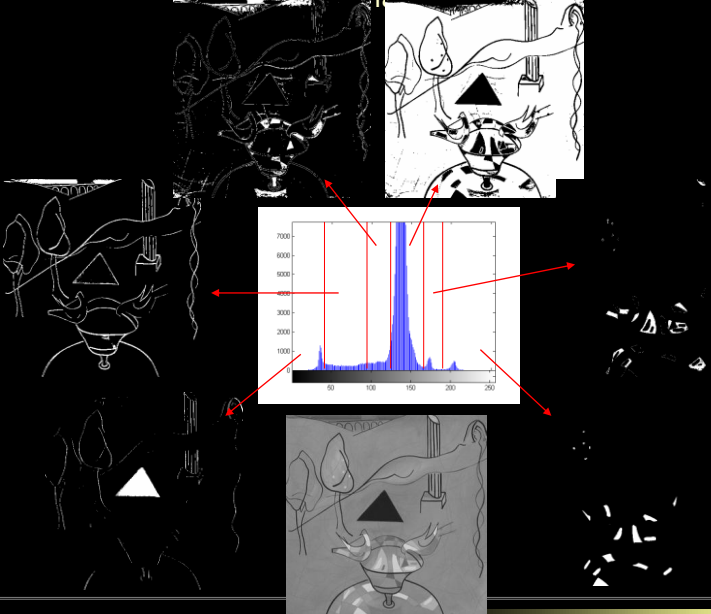


- Introducción
- Operadores LSI
- Ajustes geométricos
- Operadores morfológicos
 - Aproximación geométrica al tratamiento de imágenes
 - Marco de análisis
 - Dilatación y erosión
 - Gradientes morfológicos
 - Aperturas y cierres morfológicos
 - Filtrado por reconstrucción



Aproximación geométrica al tratamiento de imágenes

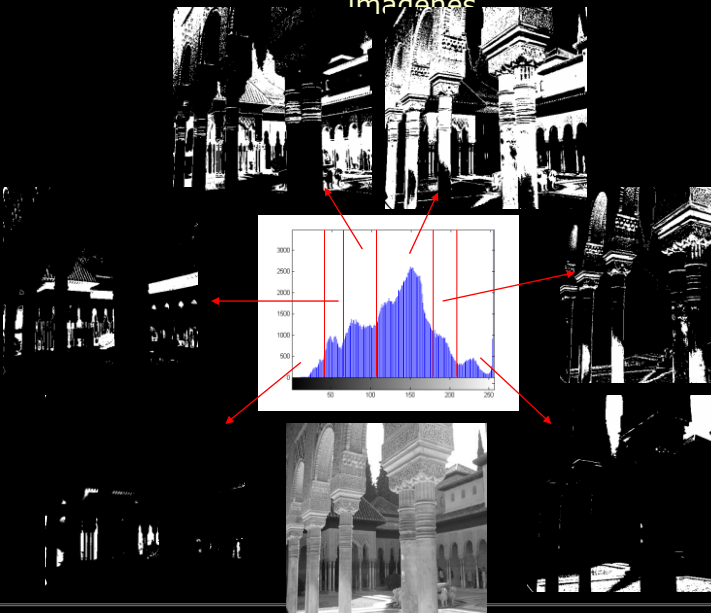
- Aplicación – elementos de interés – modelos – técnicas asociadas.
- Modelos de imagen y sus limitaciones:
 - *Valor de los píxeles: operadores puntuales.*
 - *Señal 2D: interpretación frecuencial, filtrado, transformadas lineales.*
 - *Conjunto de objetos o formas 2D: técnicas morfológicas.*


Operadores morfológicos:
Aproximación geométrica al tratamiento de imágenes




TDI: Tratamiento Digital de Imágenes (JoseM.Martinez@uam.es) Noviembre 2011 Operadores Locales 75


Operadores morfológicos:
Aproximación geométrica al tratamiento de imágenes




TDI: Tratamiento Digital de Imágenes (JoseM.Martinez@uam.es) Noviembre 2011 Operadores Locales 76

Operadores morfológicos: Aproximación geométrica al tratamiento de imágenes

Original

Promedio 5x5

Promedio 15x15

Gradiente > 30

Gradiente > 10

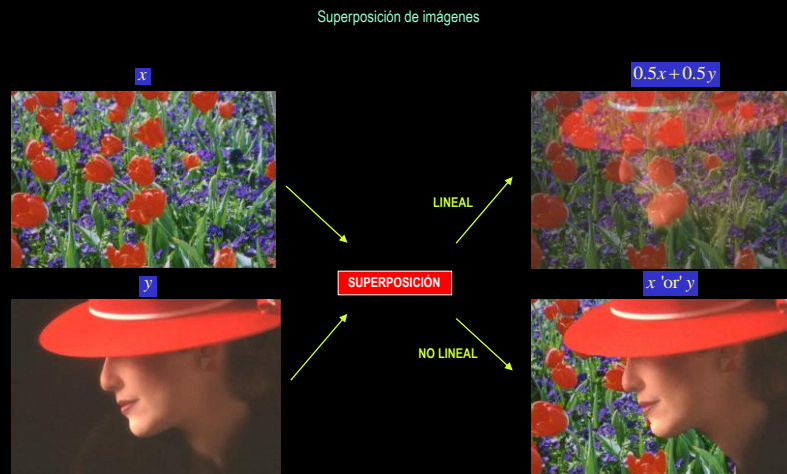
TDI: Tratamiento Digital de Imágenes (JoseM.Martinez@uam.es) Noviembre 2011 Operadores Locales 77

Operadores morfológicos: Aproximación geométrica al tratamiento de imágenes

- ✦ **Caracterización del contenido de una imagen desde el punto de vista geométrico o morfológico:**
 - *Transformadas basadas en formas: Transformada de Hough.*
 - *Enfoque teórico alternativo basado en agrupaciones o conjuntos de píxeles: Reticulos (Lattices), Conjuntos de nivel (Level sets).*

TDI: Tratamiento Digital de Imágenes (JoseM.Martinez@uam.es) Noviembre 2011 Operadores Locales 78

Superposición lineal e imágenes; alternativas.



- Esquema general: señales organizadas en una estructura matemática sobre la que se diseñan un cierto tipo de operadores.
- Esquema *tradicional* lineal:
 - Señales como elementos de un espacio vectorial.
 - El impulso unidad como función básica.
 - Diseño de operadores: convolución, kernel (respuesta al impulso).
 - Variedad de operadores basada en el diseño de kernels o máscaras.

Estructura matemática: espacio vectorial de funciones

- Elementos: campo de las funciones reales de variable discreta.
- Operaciones: adición, producto por un escalar.

$$V = \langle \{x[n]\}, +, \cdot \rangle, n \in \mathbb{Z}, x[n] \in \mathbb{R}$$

Función básica: el impulso unidad, $\delta_v[n]$.

- Señal como superposición (suma, producto por un escalar) de funciones básicas desplazadas:

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \delta_v[n-k]$$

Diseño de operadores (operación + kernel):

- Preservan la estructura: $x_1[n] = x_2[n] \Rightarrow T\{x_1[n]\} = T\{x_2[n]\}$

- Compatibles con las operaciones de la estructura.
- Invariantes a desplazamientos.

$$y[n] = T\{x[n]\} = T\left\{\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \delta_v[n-k]\right\} =$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] T\{\delta_v[n-k]\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] h[n-k] = x[n] * h[n]$$

COMPATIBLE (LINEAL)
INVARIANTE
KERNEL

OPERACIÓN ← CONVOLUCIÓN

• **Esquema basado en retículos:**

- *Señales como elementos de un retículo.*
- *El 'punto' como función básica.*
- *Diseño de operadores: dilatación y erosión, kernel (elemento estructurante).*
- *Variedad de operadores basada en su combinación. Elementos estructurantes planos.*

Estructura matemática: retículo de funciones

- Retículo: conjunto de elementos sobre los que se define una relación parcial de orden (\leq).
- Operaciones: *supremo* (\vee) e *ínfimo* (\wedge), que son duales.

$$L = \{ \{x\}, \vee, \wedge \}, x \in \mathbb{Z}$$

Elementos: campo de las funciones reales de variable discreta.

- Sobre este nuevo campo hay elementos en los que no es posible establecer una relación \leq .

$$x \leq y \Leftrightarrow x[n] \leq y[n], \forall n \in \mathbb{Z}$$

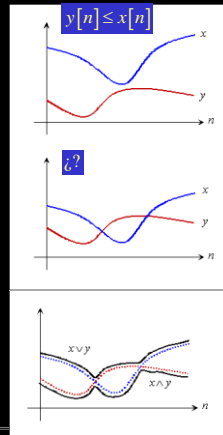
- Necesidad de definir el significado de las operaciones 'sup' e 'inf' sobre este nuevo campo:

$$z = x \vee y \Rightarrow z[n] = \text{Max}\{x[n], y[n]\}, \forall n \in \mathbb{Z}$$

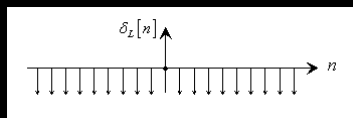
$$z = x \wedge y \Rightarrow z[n] = \text{Min}\{x[n], y[n]\}, \forall n \in \mathbb{Z}$$

- Inclusión de la operación 'suma por un escalar' en la estructura:

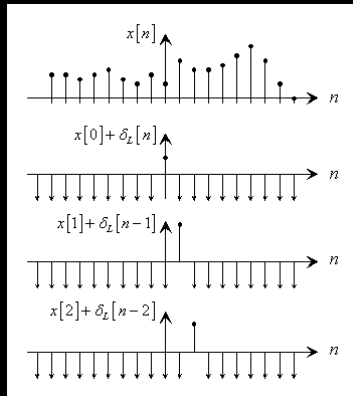
$$L = \{ \{x[n]\}, \vee, \wedge, + \}, n \in \mathbb{Z}, x[n] \in \mathbb{R}$$



Función básica: el 'punto'



$$\delta_z[n] = \begin{cases} 1, & n=0 \\ 0, & \text{resto} \end{cases}$$



Señal como superposición (supremo+suma por un escalar) de funciones básicas desplazadas:

$$x[n] = \vee_{k=-\infty}^{\infty} (x[k] + \delta_z[n-k])$$

Caso dual: señal como superposición (ínfimo+suma por un escalar) de funciones básicas desplazadas:

$$x[n] = \wedge_{k=-\infty}^{\infty} (x[k] - \delta_z[n-k])$$

Diseño de operadores (operación + kernel):

- Preservan la estructura: $x_1[n] \leq x_2[n] \Rightarrow T\{x_1[n]\} \leq T\{x_2[n]\}$
- Compatibles con las operaciones de la estructura.
- Invariantes a desplazamientos.

$$y[n] = T\{x[n]\} = T\left\{\bigvee_{k=-\infty}^{\infty} (x[k] + \delta_L[n-k])\right\} = \bigvee_{k=-\infty}^{\infty} (x[k] + T\{\delta_L[n-k]\}) = \bigvee_{k=-\infty}^{\infty} (x[k] + b[n-k]) = x[n] \oplus b[n]$$

OPERADOR ← DILATACIÓN

↑ KERNEL

COMPATIBLE INVARIANTE

Operación dual:

$$y[n] = T\{x[n]\} = T\left\{\bigwedge_{k=-\infty}^{\infty} (x[k] - \delta_L[n-k])\right\} = \bigwedge_{k=-\infty}^{\infty} (x[k] - T\{\delta_L[n-k]\}) = \bigwedge_{k=-\infty}^{\infty} (x[k] - b[n-k]) = x[n] \ominus b[n]$$

OPERADOR ← EROSIÓN

↑ KERNEL

Elementos estructurantes planos: $b[n] \in \{0, -\infty\}$

• Dilatación:

$$y[n] = \bigvee_{k=-\infty}^{\infty} (x[k] + b[n-k]) = \bigvee_{k=-\infty}^{\infty} (x[n-k] + b[k]) = \bigvee_{k/b[k]=0} x[n-k]$$

Máximo de los valores de la señal que coinciden con los ceros del elemento estructurante invertido

• Erosión:

$$y[n] = \bigwedge_{k=-\infty}^{\infty} (x[k] - b[k-n]) = \bigwedge_{k=-\infty}^{\infty} (x[n+k] - b[k]) = \bigwedge_{k/b[k]=0} x[n+k]$$

Mínimo de los valores de la señal que coinciden con los ceros del elemento estructurante

• Motivación:

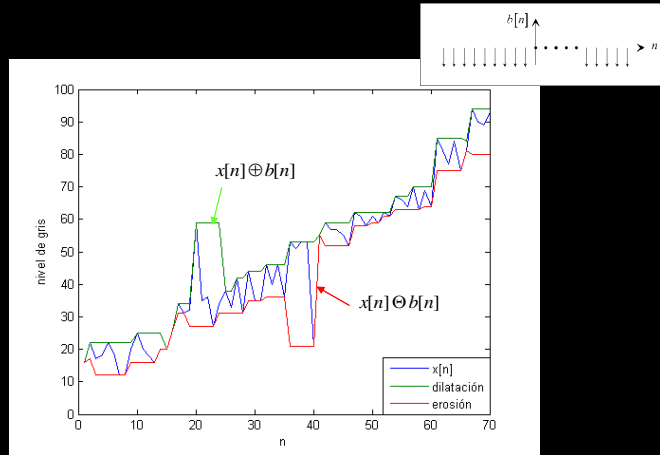
- Baja complejidad computacional: cálculo de mínimos y máximos de la señal de entrada
- El resultado para cada 'n' es un valor de la señal de entrada: estabilidad y conservación del rango y de la precisión.
- Preservan el contraste en los contornos *bien definidos*.

• Procedimiento de aplicación similar al de los operadores lineales:

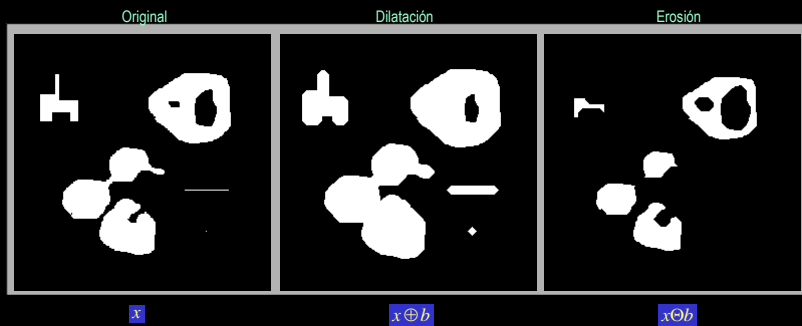
- Opción1: Inversión del *kernel* y aplicación sobre cada píxel.
- Opción2: Elemento estructurante como composición de funciones básicas.

$$b[n] = \bigvee (\delta_L[n], \delta_L[n-1], \delta_L[n-2]) \Rightarrow \begin{cases} y[n] = x[n] \oplus b[n] = \bigvee (x[n+2], x[n+1], x[n]) \\ y[n] = x[n] \ominus b[n] = \bigwedge (x[n], x[n-1], x[n-2]) \end{cases}$$

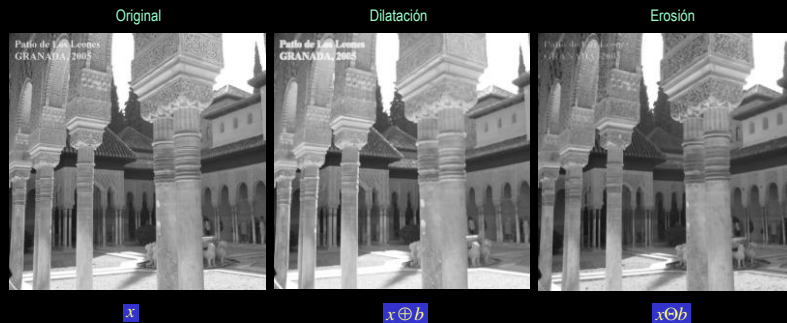
• Efecto sobre una señal 1D.



• Efecto sobre una imagen binaria.



• Efecto sobre una imagen en niveles de gris.



• Propiedades:

■ Distribución :

$$(x \vee y) \oplus b = (x \oplus b) \vee (y \oplus b)$$



$$(x \wedge y) \ominus b = (x \ominus b) \wedge (y \ominus b)$$

■ Composición:

$$x \oplus a \oplus b = x \oplus c, \quad c = a \oplus b$$

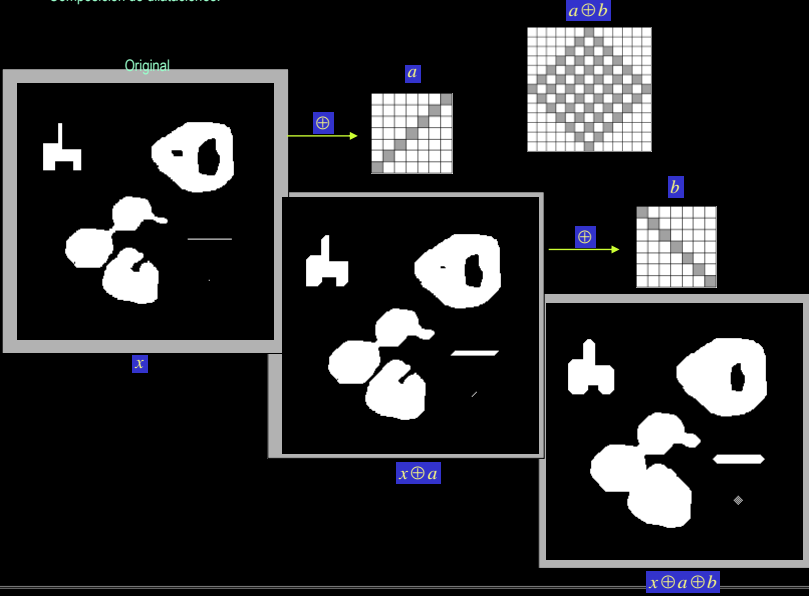
$$x \ominus a \ominus b = x \ominus c, \quad c = a \oplus b$$

- Extensividad: extensivo ($x \leq T\{x\}$) o anti-extensivo ($T\{x\} \leq x$). Si el elemento estructurante incluye el origen, la dilatación es extensiva y la erosión anti-extensiva.



Operadores morfológicos: Dilatación y erosión

Composición de dilataciones:



Original x a $a \oplus b$
 $x \oplus a$ b
 $x \oplus a \oplus b$

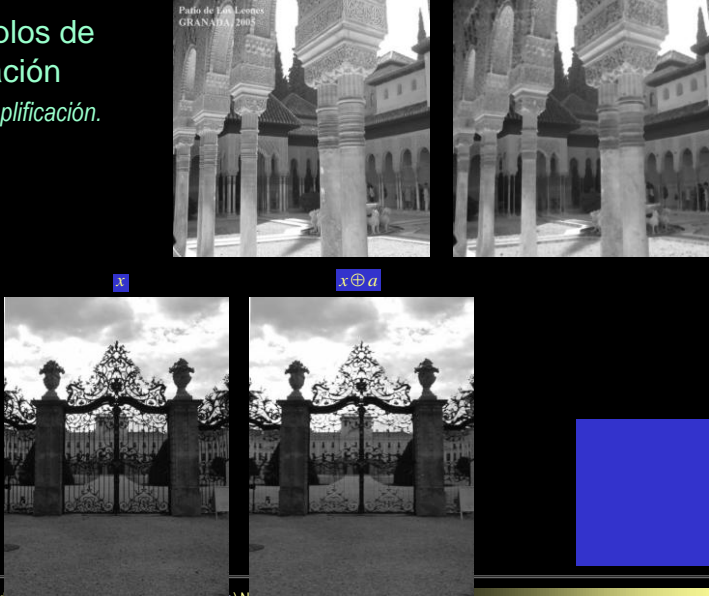
TDI: Tratamiento Digital de Imágenes (JoseM.Martinez@uam.es) Noviembre 2011 Operadores Locales 91

Operadores morfológicos: Dilatación y erosión

✦ Ejemplos de aplicación

- *Simplificación.*

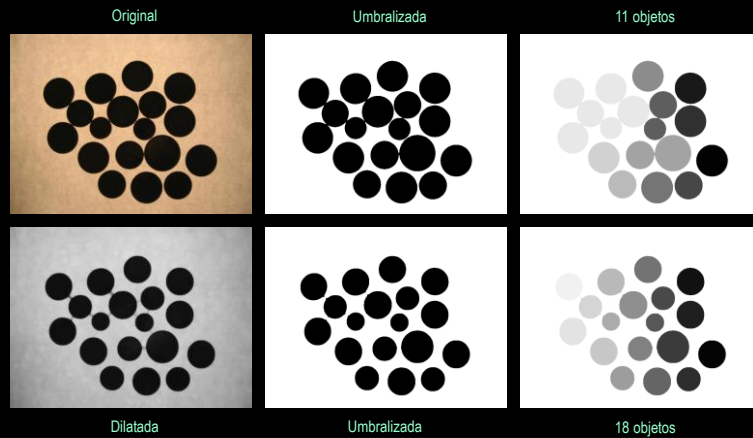


x $x \oplus a$ $x \oplus b$

TDI: Tratamiento Digital de Imágenes (JoseM.Martinez@uam.es) Noviembre 2011 Operadores Locales 92

• Ejemplos de aplicación

- Separación de objetos conectados por efecto de la umbralización.



• El objetivo es resaltar los contornos.

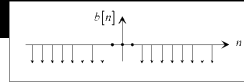
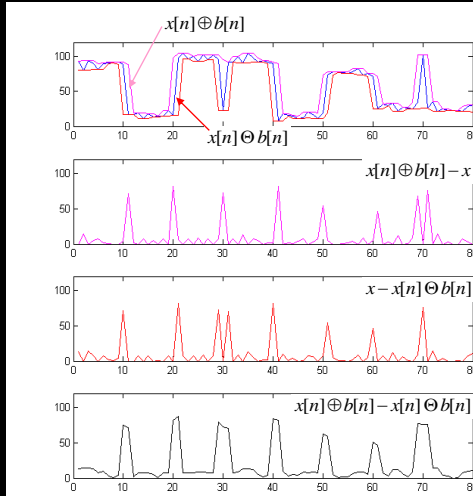
• Posibilidades:

- Gradiente por dilatación: $(x \oplus b) - x$
- Gradiente por erosión: $x - (x \ominus b)$
- Gradiente morfológico: $(x \oplus b) - (x \ominus b)$

• Efecto:

- Efecto sobre una señal 1D.
- Efecto sobre una imagen binaria.
- Efecto sobre una imagen en niveles de gris.

Gradientes morfológicos, 1D:



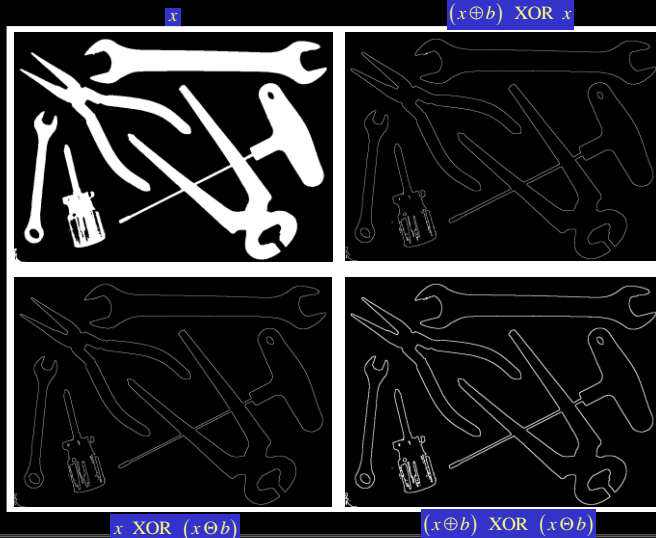
Mínimo elemento estructurante simétrico.

Marca el extremo inferior de las rampas y, en consecuencia, la posición de los mínimos.

Marca el extremo superior de las rampas y, en consecuencia, la posición de los máximos.

Marca las rampas en sus dos extremos y, en consecuencia, los máximos y mínimos en tres puntos (rampa-valor-rampa)

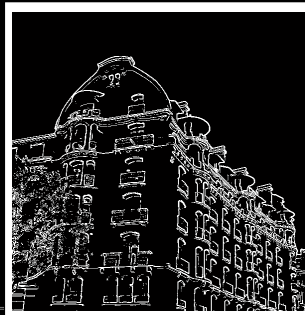
Gradientes morfológicos, imágenes binarias:



Mínimos elementos estructurantes:



Gradientes umbralizados, imágenes en niveles de gris.



$$(x \oplus b) - x$$

LoG.

Composición de los dos operadores básicos:

- Apertura: $\gamma_b(x) = (x \ominus b) \oplus b$

- Cierre: $\varphi_b(x) = (x \oplus b) \ominus b$

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE MADRID VPU

Operadores morfológicos: Aperturas y cierres morfológicos

$\{x_i\}$: familia (infinita) de imágenes cuya erosión con 'b' es 'y'

Erosión con 'b': $y = (x_i \ominus b)$

Dilatación con 'b': $x_0 = (y \oplus b)$

Apertura:

$$x_0 = \bigwedge_{k=-\infty}^{\infty} (x / x_k \ominus b = y)$$

$$x_0 = (y \oplus b) = (x_i \ominus b) \oplus b$$

$$x_0 = \gamma_b(x_i)$$

Anti-extensiva: $x_0 = \gamma_b(x_i) \leq x_i$

Idempotente: $\gamma_b(x_0) = x_0$

TDI: Tratamiento Digital de Imágenes (JoseM.Martinez@uam.es) Noviembre 2011 Operadores Locales 99

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE MADRID VPU

Operadores morfológicos: Aperturas y cierres morfológicos

Propiedades:

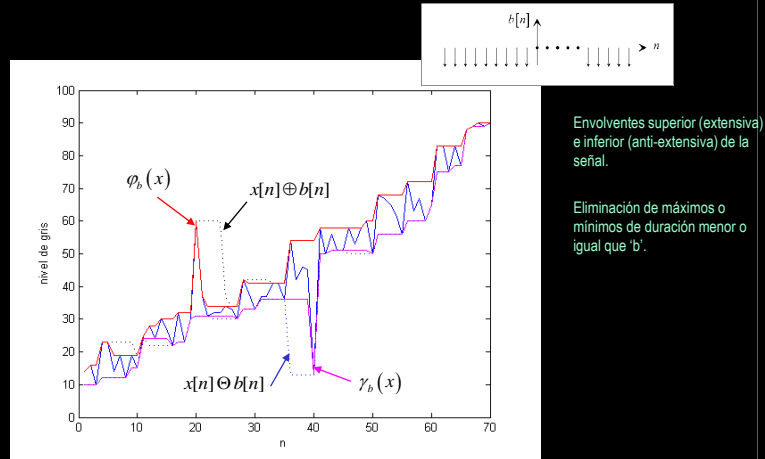
- *Preservan la estructura:*

$$x \leq y \Rightarrow x \ominus b \leq y \ominus b \Rightarrow (x \ominus b) \oplus b \leq (y \ominus b) \oplus b \Rightarrow \gamma_b(x) \leq \gamma_b(y)$$

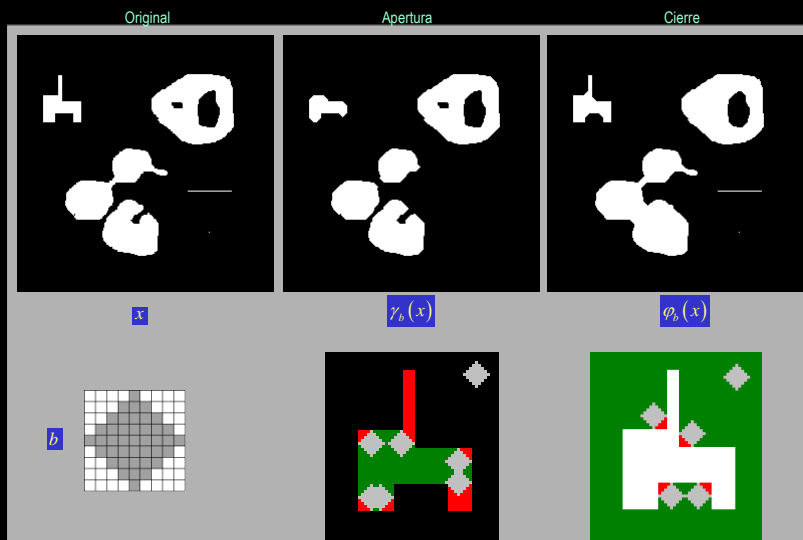
Análogamente $\varphi_b(x) \leq \varphi_b(y)$
- *Extensividad:* $\gamma_b(x) \leq x$, *anti-extensiva:* $x \leq \varphi_b(x)$, *extensiva.* No depende de b
- *Son idempotentes:* $\gamma_b(\gamma_b(x)) = \gamma_b(x)$, $\varphi_b(\varphi_b(x)) = \varphi_b(x)$
- *Invariantes frente a desplazamientos del elemento estructurante.*

TDI: Tratamiento Digital de Imágenes (JoseM.Martinez@uam.es) Noviembre 2011 Operadores Locales 100

Ejemplo sobre una señal 1D:



Ejemplo sobre una imagen binaria:

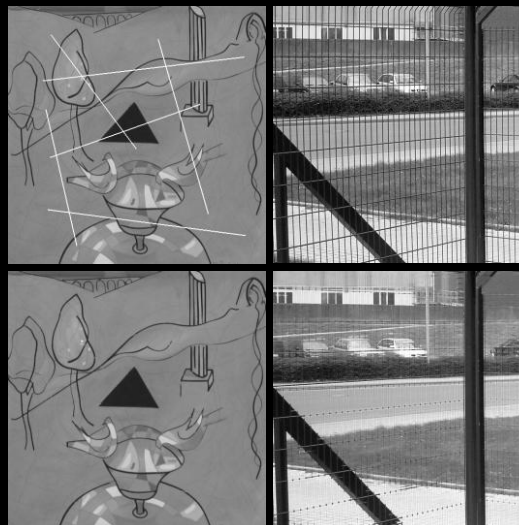


Ejemplo sobre una imagen en niveles de gris:



• Ejemplos de aplicación:

- Eliminación de objetos de acuerdo a su nivel de gris (apertura o cierre) y a su geometría (elección de un elemento estructurante mayor).



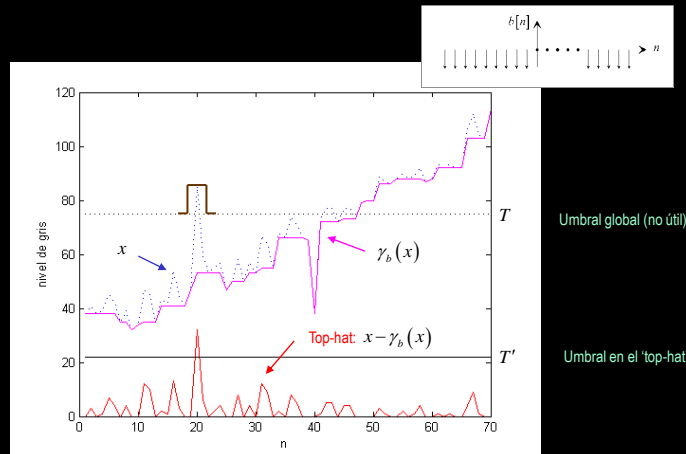
• Ejemplos de aplicación:

- *Detección de objetos de un tamaño determinado:*

- *Top-hat: objetos que aparecen como máximos relativos:* $x - \gamma_b(x)$

- *Dual top-hat: objetos que aparecen como mínimos relativos:* $\varphi_b(x) - x$

Top-hat sobre una señal 1D:



Top-hat sobre una señal 2D:

Imagen original



x

Imagen umbralizada



$x > T_1$

'Top-hat' umbralizado



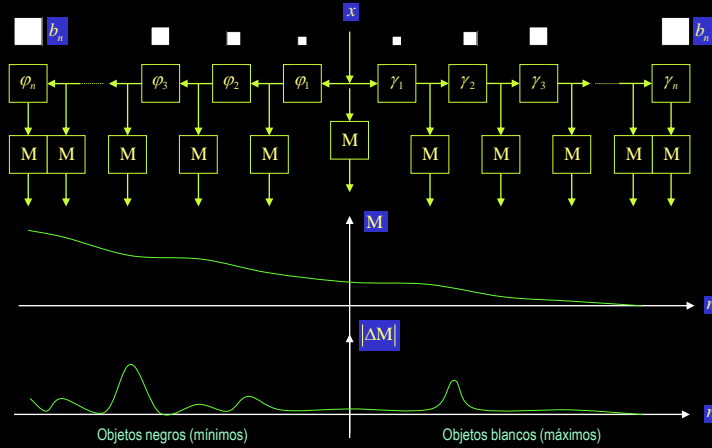
$[x - \gamma_n(x)] > T_2$

• Ejemplos de aplicación:

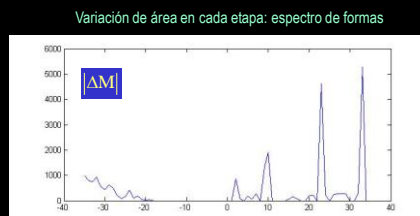
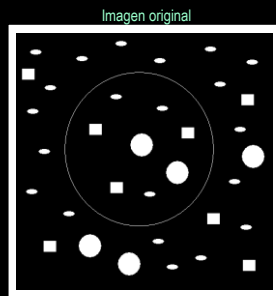
- *Granulometría: caracterización de la distribución de tamaños de los objetos de una imagen a partir de bancos de filtros de aperturas y cierres.*


Granulometría:

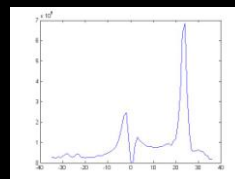
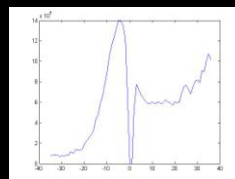
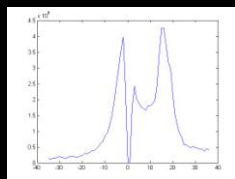
- Caracterización de la distribución de tamaños de los objetos de la imagen.
- Sucesión de aperturas/cierres de elemento estructurante 'creciente' y medición (M) tras cada operación de área, por ejemplo, de los objetos presentes.



Granulometría sobre una imagen binaria:



Granulometría sobre texturas: b_3 

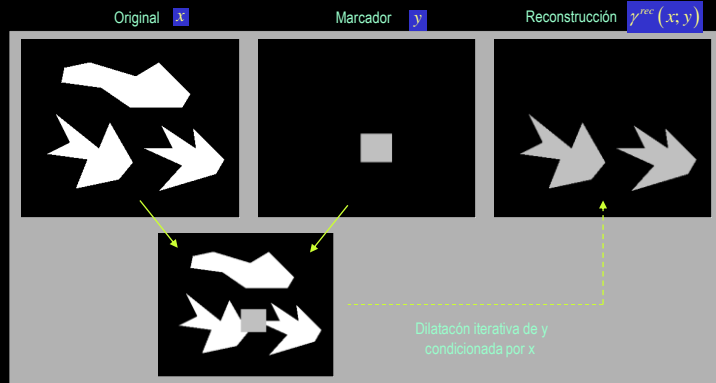


- Preservación de los contornos en operaciones morfológicas de simplificación.
- Dadas una señal de entrada, x , y una señal marcador, y , un proceso de reconstrucción preserva las componentes conexas de x marcadas por y :

- Apertura por reconstrucción: $\gamma^{rec}(x; y)$

- Cierre por reconstrucción: $\varphi^{rec}(x; y)$



Apertura de x por reconstrucción con y : $\gamma^{rec}(x, y)$



Propiedades:

- Preservan la estructura: $x_1 \leq x_2 \Rightarrow \begin{cases} \gamma^{rec}(x_1; y) \leq \gamma^{rec}(x_2; y) \\ \varphi^{rec}(x_1; y) \leq \varphi^{rec}(x_2; y) \end{cases}$
- Extensividad: $\gamma^{rec}(x; y) \leq x$, anti-extensiva: $x \leq \varphi^{rec}(x; y)$, extensiva.
- Ambas son idempotentes:
- Conclusión: γ^{rec} es una apertura y φ^{rec} es un cierre.

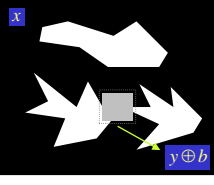
Proceso iterativo de obtención de la reconstrucción.

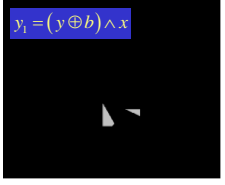



Operadores morfológicos: Filtrado por reconstrucción

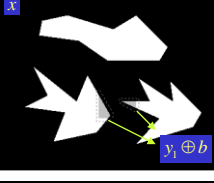
Cálculo de la reconstrucción de x con y : $\gamma^{rec}(x; y)$

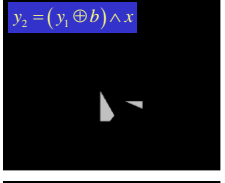
1ª Iteración

x


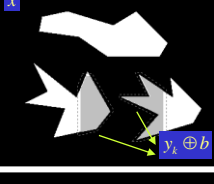
$y_1 = (y \oplus b) \wedge x$


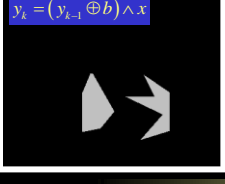
2ª Iteración

x


$y_2 = (y_1 \oplus b) \wedge x$


kª Iteración

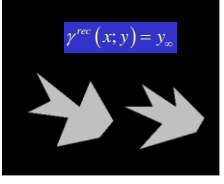
x


$y_k = (y_{k-1} \oplus b) \wedge x$




Elementos estructurantes adecuados según la conectividad:

8 4

Resultado

$\gamma^{rec}(x; y) = y_\infty$


TDI: Tratamiento Digital de Imágenes (JoseM.Martinez@uam.es) Noviembre 2011 Operadores Locales 115

Operadores morfológicos: Filtrado por reconstrucción

Reconstrucción sobre una señal 1D:

$y_1 = (y \oplus b) \wedge x$

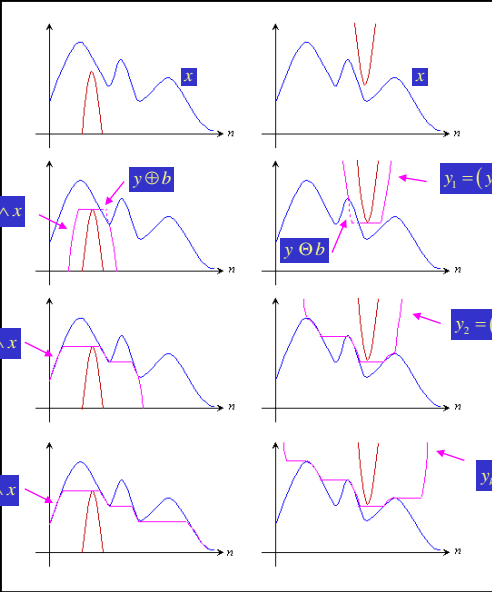
$y_2 = (y_1 \oplus b) \wedge x$

$y_k = (y_{k-1} \oplus b) \wedge x$



$y_1 = (y \ominus b) \vee x$

$y_2 = (y_1 \ominus b) \vee x$

$y_k = (y_{k-1} \ominus b) \vee x$



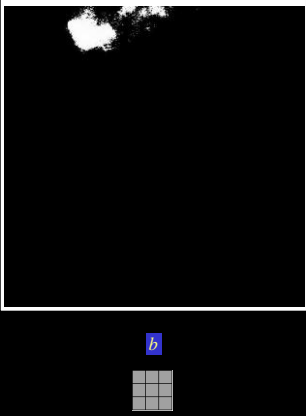
TDI: Tratamiento Digital de Imágenes (JoseM.Martinez@uam.es) Noviembre 2011 Operadores Locales 116


Operadores morfológicos: Filtrado por reconstrucción

Reconstrucción sobre una señal 2D.



$y = (x > 250) \text{ AND } x$



$\gamma^{rec}(x; y) = y_{\infty}$

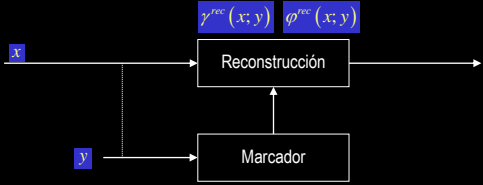


TDI: Tratamiento Digital de Imágenes (JoseM.Martinez@uam.es) Noviembre 2011 Operadores Locales 117

Operadores morfológicos: Filtrado por reconstrucción

✦ Filtros por reconstrucción



$\gamma^{rec}(x; y)$ $\phi^{rec}(x; y)$

Reconstrucción

Marcador

- *Los criterios de selección del marcador dan lugar a distintos tipos de filtros.*

TDI: Tratamiento Digital de Imágenes (JoseM.Martinez@uam.es) Noviembre 2011 Operadores Locales 118

- ◆ Introducción
- ◆ Operadores LSI
 - Respuesta al impulso y respuesta en frecuencia
 - Aspectos operativos
 - Diseño frecuencial de máscaras
 - Suavizado
 - Realce de contornos
 - Detección y localización de bordes
- ◆ Ajustes geométricos
 - Ajustes 2D
 - Ajustes 3D
- ◆ Operadores morfológicos
 - Aproximación geométrica al tratamiento de imágenes
 - Marco de análisis
 - Dilatación y erosión
 - Gradientes morfológicos
 - Aperturas y cierres morfológicos
 - Filtrado por reconstrucción

Estas transparencias están editadas a partir de las generadas por el profesor

Jesús Bescós Cano durante sus años de impartición de esta asignatura.