Señales unidimensionales

Señal:

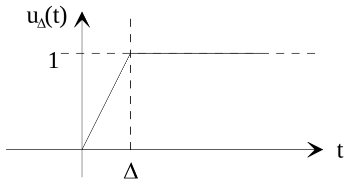
$$f(t): t \in \Re \xrightarrow{f} f(t) \in \begin{cases} \Re \\ C \end{cases}$$

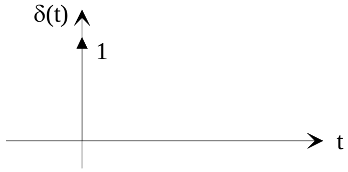
La función $\delta(t)$:

Definición:

Dada la función $u_\Delta(t)$:

$$\delta(t) = \lim_{\Delta \to 0} \frac{du_\Delta(t)}{dt} = \begin{cases} \infty, t = 0 \\ 0, t \neq 0 \end{cases}$$





Propiedades:

1. Área unidad:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$$

2. Selección:

$$f(t) \cdot \delta(t) = f(0) \cdot \delta(t)$$
$$f(t) \cdot \delta(t - t_0) = f(t_0) \cdot \delta(t - t_0)$$

1+2. Expresión de una señal cualquiera como combinación lineal de funciones $\delta(t)$ ponderadas y desplazadas:

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \delta(t - \tau) d\tau$$

Efectivamente,

$$f(t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \delta(t_0 - \tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} f(t_0) \delta(t_0 - \tau) d\tau = f(t_0) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t_0 - \tau) d\tau = f(t_0), \forall t_0 \in \Re$$

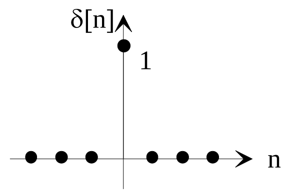
Señal:

$$f[n]: n \in Z \xrightarrow{f} f[n] \in \begin{cases} \Re \\ C \end{cases}$$

La función $\delta[n]$:

Definición:

$$\delta[n] = \begin{cases} 1, n = 0 \\ 0, n \neq 0 \end{cases}$$



Propiedades:

1. Área unidad:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta[n] = 1$$

2. Selección:

$$f[n] \cdot \delta[n] = f[0] \cdot \delta[n]$$
$$f[n] \cdot \delta[n - n_0] = f[n_0] \cdot \delta[n - n_0]$$

1+2. Expresión de una señal cualquiera como combinación lineal de funciones $\delta(t)$ ponderadas y desplazadas:

$$f[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f[k] \delta[n - k]$$

Efectivamente,

$$f[n_0] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f[k] \delta[n_0 - k] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f[n_0] \delta[n_0 - k] = f[n_0] \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta[n_0 - k] = f[n_0], \forall n_0 \in Z$$

Sistemas LTI:

$$f(t) \longrightarrow \boxed{S} \longrightarrow g(t) \quad \text{o} \quad f(t) \xrightarrow{S} g(t)$$

1. Lineal (L):

$$f_1(t) \xrightarrow{L} g_1(t)$$

$$f_2(t) \xrightarrow{L} g_2(t)$$

$$k_1 f_1(t) + k_2 f_2(t) \xrightarrow{L} k_1 g_1(t) + k_2 g_2(t), \forall k_1, k_2 \in \Re$$

2. Invariante (*Time Invariant – TI*):

$$f(t) \xrightarrow{TI} g(t)$$

$$f(t - t_0) \xrightarrow{TI} g(t - t_0), \forall t_0 \in \Re$$

Respuesta de un sistema LTI a una señal

1. Respuesta al impulso:

$$\delta(t) \xrightarrow{LTI} h(t) \Rightarrow \delta(t - t_0) \xrightarrow{TI} h(t - t_0), \forall t_0 \in \Re$$

2. Respuesta a una señal cualquiera:

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\delta(t-\tau)d\tau \xrightarrow{LTI} g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)h(t-\tau)d\tau = f(t) * h(t)$$

Análisis frecuencial en sistemas LTI

1. Expresión de $f(t)$ cómo combinación lineal de exponenciales periódicas.

$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega)\cdot e^{j\omega t} d\omega$, donde $F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cdot e^{-j\omega t} dt$ indica el peso relativo que tiene $f(t)$ a cada pulsación, ω.

$F(j\omega)$ es la Transformada de Fourier de $f(t)$: $f(t) \xrightarrow{FT} F(j\omega)$

Cambiando pulsación (ω) por frecuencia (f):

$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F_c(f)\cdot e^{j2\pi f t} df$, donde $F_c(f) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cdot e^{-j2\pi f t} dt$

Sistemas LTI:

$$f[n] \longrightarrow \boxed{S} \longrightarrow g[n] \quad \text{o} \quad f[n] \xrightarrow{S} g[n]$$

1. Lineal (L):

$$f_1[n] \xrightarrow{L} g_1[n]$$

$$f_2[n] \xrightarrow{L} g_2[n]$$

$$k_1 f_1[n] + k_2 f_2[n] \xrightarrow{L} k_1 g_1[n] + k_2 g_2[n], \forall k_1, k_2 \in \Re$$

2. Invariante (*Time Invariant – TI*):

$$f[n] \xrightarrow{TI} g[n]$$

$$f[n - n_0] \xrightarrow{TI} g[n - n_0], \forall n_0 \in Z$$

Respuesta de un sistema LTI a una señal

1. Respuesta al impulso:

$$\delta[n] \xrightarrow{LTI} h[n] \Rightarrow \delta[n - n_0] \xrightarrow{TI} h[n - n_0], \forall n_0 \in Z$$

2. Respuesta a una señal cualquiera:

$$f[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f[k]\delta[n-k] \xrightarrow{LTI} g[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f[k]h[n-k] = f[n] * h[n]$$

Análisis frecuencial en sistemas LTI

1. Expresión de $f[n]$ cómo combinación lineal de exponenciales periódicas.

$f[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} F(e^{j\omega})\cdot e^{j\omega n} d\omega$, donde $F(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f[n]e^{-j\omega n}$ indica el peso relativo que tiene $f[n]$ a cada pulsación, ω.

$F(e^{j\omega})$ es la Transformada de Fourier de Tiempo Discreto de $f[n]$:

$f[n] \xrightarrow{DTFT} F(e^{j\omega})$

Obsérvese que $e^{-j\omega n} = e^{-j(\omega + 2k\pi)n}, \forall k \in Z$. Por lo tanto, $F(e^{j\omega})$ es periódica de periodo 2π.

Cambiando pulsación (ω) por frecuencia (f):

2. Respuesta de un sistema LTI a una exponencial periódica.

$$e^{j\omega_0 t} \xrightarrow{LTI} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega_0 \tau} h(t-\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{j\omega_0 (t-\tau)} d\tau = e^{j\omega_0 t} \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-j\omega_0 \tau} d\tau$$

Teniendo en cuenta que $h(t) \xrightarrow{FT} H(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) \cdot e^{-j\omega t} dt$, resulta:

$e^{j\omega_0 t} \xrightarrow{LTI} e^{j\omega_0 t} H(j\omega)\big|_{\omega=\omega_0}$, o bien, $e^{j2\pi f_0 t} \xrightarrow{LTI} e^{j2\pi f_0 t} H_c(f)\big|_{f=f_0}$, por lo que a la función $H(j\omega)$ o $H_c(f)$ se le denomina *respuesta en frecuencia* del sistema LTI.

1+2. Respuesta de un sistema LTI a una señal cualquiera.

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F_c(f) \cdot e^{j2\pi ft} df \xrightarrow{LTI} g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F_c(f) \cdot H_c(f) \cdot e^{j2\pi ft} df$$

Teniendo en cuenta que:

$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G_c(f) \cdot e^{j2\pi ft} df$$

resulta:

$$f(t) \xrightarrow{LTI} g(t) = f(t) * h(t)$$

$$F_c(f) \xrightarrow{LTI} G_c(f) = F_c(f) \cdot H_c(f)$$

$f[n] = \int_1 F_d(f) \cdot e^{j2\pi fn} df$, donde $F_d(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f[n] e^{-j2\pi fn}$

Análogamente, $e^{-j2\pi fn} = e^{-j2\pi(f+k)n}, \forall k \in Z$. Por lo tanto, $F_d(f)$ es periódica de periodo unidad.

2. Respuesta de un sistema LTI a una exponencial periódica.

$$e^{j\omega_0 n} \xrightarrow{LTI} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{j\omega_0 k} h[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{j\omega_0 [n-k]} h[k] = e^{j\omega_0 n} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k] e^{-j\omega_0 k}$$

Teniendo en cuenta que $h[n] \xrightarrow{DTFT} H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n] e^{-j\omega n}$, resulta:

$e^{j\omega_0 n} \xrightarrow{LTI} e^{j\omega_0 n} H(e^{j\omega})\big|_{\omega=\omega_0}$, o bien, $e^{j2\pi f_0 n} \xrightarrow{LTI} e^{j2\pi f_0 n} H_d(f)\big|_{f=f_0}$, por lo que a la función $H(e^{j\omega})$ o $H_d(f)$ se le denomina *respuesta en frecuencia* del sistema LTI.

1+2. Respuesta de un sistema LTI a una señal cualquiera.

$$f[n] = \int_1 F_d(f) \cdot e^{j2\pi fn} df \xrightarrow{LTI} g[n] = \int_1 F_d(f) \cdot H_d(f) \cdot e^{j2\pi fn} df$$

Teniendo en cuenta que:

$$g[n] = \int_1 G_d(f) \cdot e^{j2\pi fn} df$$

resulta:

$$f[n] \xrightarrow{LTI} g[n] = f[n] * h[n]$$

$$F_d(f) \xrightarrow{LTI} G_d(f) = F_d(f) \cdot H_d(f)$$

NOTA:

Si $f(t)$ es periódica, la integral $F_c(f)$ no converge. En este caso:

1. Desarrollo en Serie de Fourier (FS) de una señal periódica de periodo T_0:

$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \cdot e^{j2\pi k f_0 t}$, donde $f_0 = 1/T_0$ y a_k son los coeficientes del FS

2. FT de una señal exponencial compleja periódica:

Dado que $f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F_c(f) \cdot e^{j2\pi f t} df$, si $F_c(f) = \delta(f - f_0) \Rightarrow f(t) = e^{j2\pi f}$

Por lo tanto: $e^{j2\pi f_0 t} \xrightarrow{FT} \delta(f - f_0)$

1+2. Teniendo en cuenta, además, que la FT es lineal, resulta:

$f(t)$ periódica $\Rightarrow f(t) \xrightarrow{FT} F_c(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \cdot \delta(f - kf_0)$

1+2. Una segunda conclusión o propiedad derivada de este análisis es:

Si $f(t) = e^{j2\pi f_0 t} \Rightarrow F_c(f) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-j2\pi f t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi(f - f_0)t} dt = \delta(f - f_0)$. Por lo tanto, observando la última igualdad y particularizando en $f = 0$ resulta:

$\int_{-\infty}^{\infty} e^{j2\pi f_0 t} dt = \delta(f_0)$

Señales multidimensionales (dimensión *k*)	
Señal: $\psi(\vec{x}) : \vec{x} \in \Re^k \xrightarrow{\psi} \psi(\vec{x}) \in \begin{cases} \Re \\ C \end{cases}$	***Señal:*** $\psi[\vec{x}] : \vec{x} \in Z^k \xrightarrow{\psi} \psi[\vec{x}] \in \begin{cases} \Re \\ C \end{cases}$
La función $\delta(\vec{x})$: **Definición:** $\delta(\vec{x}) = \begin{cases} \infty, \vec{x} = \vec{0} \\ 0, \vec{x} \neq \vec{0} \end{cases}$ **Propiedades:** **1**. Área unidad: $\int_{\Re^k} \delta(\vec{x}) d\vec{x} = 1$ **2**. Selección: $\psi(\vec{x}) \cdot \delta(\vec{x}) = \psi(\vec{0}) \cdot \delta(\vec{x})$ $\psi(\vec{x}) \cdot \delta(\vec{x} - \vec{x}_0) = \psi(\vec{x}_0) \cdot \delta(\vec{x} - \vec{x}_0)$ **1+2**. Expresión de una señal cualquiera como combinación lineal de funciones $\delta(\vec{x})$ ponderadas y desplazadas en el espacio *k* dimensional: $\psi(\vec{x}) = \int_{\Re^k} \psi(\vec{x}) \cdot \delta(\vec{x} - \vec{y}) d\vec{y}$	Las conclusiones son análogas a las del caso continuo, con las siguientes apreciaciones: $\Psi_d(\vec{f})$ es la Transformada de Fourier de Espacio Discreto de $\psi[\vec{x}]$: $\psi[\vec{x}] \xrightarrow{DSFT} \Psi_d(\vec{f})$ $\Psi_d(\vec{f})$ es una señal 'periódica' de periodo 'unidad' (el periodo es un hipercubo de lado unidad). .
Sistemas LSI: El desarrollo es análogo al del caso unidimensional, con la salvedad de que los sistemas que verifican linealidad e invarianza respecto a desplazamientos de la variable independiente (ahora un vector), se denominan *Linear Shift Invariant – LSI*.	
Respuesta de un sistema LSI a una señal El desarrollo es análogo al del caso unidimensional. La conclusión: $\psi(\vec{x}) \xrightarrow{LSI} \theta(\vec{x}) = \psi(\vec{x}) * h(\vec{x})$, donde $\delta(\vec{x}) \xrightarrow{LSI} h(\vec{x})$	

Análisis frecuencial en sistemas LSI

1. Expresión de $\psi(\vec{x})$ cómo combinación lineal de exponenciales periódicas.

$\psi(\vec{x}) = \int_{\Re^k} \Psi_c(\vec{f}) \cdot e^{j2\pi \vec{f} \cdot \vec{x}} d\vec{f}$, donde $\Psi_c(\vec{f}) = \int_{\Re^k} \psi(\vec{x}) \cdot e^{-j2\pi \vec{f} \cdot \vec{x}} d\vec{x}$ indica el peso relativo que tiene la señal $\psi(\vec{x})$ en cada vector frecuencia, $\vec{f}$, vector que indica la frecuencia en cada dimensión del espacio *k* dimensional.

$\Psi_c(\vec{f})$ es la Transformada de Fourier de $\psi(\vec{x})$: $\psi(\vec{x}) \xrightarrow{CSFT} \Psi_c(\vec{f})$

2. Respuesta de un sistema LSI a una exponencial periódica.

$e^{j2\pi \vec{f}_0 \cdot \vec{x}} \xrightarrow{LSI} e^{j2\pi \vec{f} \cdot \vec{x}} H_c(\vec{f})\Big|_{\vec{f}=\vec{f}_0}$, por lo que a la función $H_c(\vec{f})$ se le denomina *respuesta en frecuencia* del sistema LSI.

1+2. Respuesta de un sistema LSI a una señal cualquiera.

$\psi(\vec{x}) \xrightarrow{LSI} \theta(\vec{x}) = \psi(\vec{x}) * h(\vec{x})$

$\Psi_c(\vec{f}) \xrightarrow{LTI} \Phi_c(\vec{f}) = \Psi_c(\vec{f}) \cdot H_c(\vec{f})$