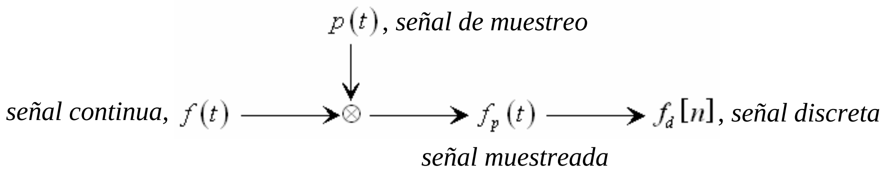
Señales unidimensionales

Objetivo:

$$f(t), t \in \mathbb{R} \longrightarrow f_d[n], n \in \mathbb{Z} \longrightarrow f(t), t \in \mathbb{R}$$

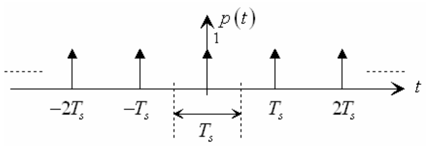
Muestreo:

Modelo de muestreo:



Señal de muestreo:

$$p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - n \cdot T_s)$$



Esta señal puede interpretarse como un tren de deltas desplazadas sobre los puntos de una estructura de muestreo definida por el retículo $\Lambda_p = \{t \in \mathbb{R} / t = n \cdot T_s, \forall n \in \mathbb{Z}\}$, cuya celda de Voronoi, $C(\Lambda_p)$, es precisamente el periodo fundamental $[-T_s/2, T_s/2]$, y cuya densidad es precisamente la frecuencia de muestreo: $d(\Lambda_p) = \dfrac{1}{T_s} = f_s$.

Señal muestreada: $f_p(t) = f(t) \cdot p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(t) \cdot \delta(t - n \cdot T_s) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(t) \cdot \delta(t - n \cdot T_s)$

Señal discreta: $f_d[n] = f_p(n \cdot T_s) = f(n \cdot T_s)$

Esta señal puede interpretarse como una normalización del eje temporal de $f_p(t)$ por el valor T_s, es decir, por la amplitud del vector que genera el retículo Λ_p, de modo que si $f_p(t)$ toma valores en $t = n \cdot T_s$, entonces $n = t/T_s$.

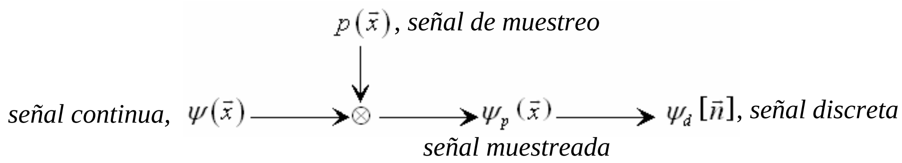
Señales multidimensionales

Objetivo:

$$\psi(\vec{x}), \vec{x} \in \mathbb{R}^k \longrightarrow \psi_d[\vec{n}], \vec{n} \in \mathbb{Z}^k \longrightarrow \psi(\vec{x}), \vec{x} \in \mathbb{R}^k$$

Muestreo:

Modelo de muestreo:



Sea una estructura de muestreo definida por el retículo:

$$\Lambda_p = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^k / \vec{x} = \sum_{i=1}^{k} n_i \cdot \vec{v}_i, \forall n_i \in \mathbb{Z} \right\}$$, donde $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_k\}$ forman una base de $\mathbb{R}^k$

Expresado en forma matricial, $\Lambda_p = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^k / \mathbf{x} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{n}, \forall \mathbf{n} \in \mathbb{Z}^k\}$, donde $\mathbf{V} = [\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, ..., \mathbf{v_k}]$ es una matriz generatriz del retículo.

Señal de muestreo:

$$p(\vec{x}) = \sum_{\vec{x}_p \in \Lambda_p} \delta(\vec{x} - \vec{x}_p)$$, o en forma matricial, $p(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^k} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{V} \cdot \mathbf{n})$

Esta señal puede interpretarse, de nuevo, como un *tren* de deltas desplazadas sobre los puntos de una estructura de muestreo definida por el retículo Λ_p. Por analogía con el caso 1D, puede interpretarse que $p(\mathbf{x})$ es periódica de *periodo* fundamental $V(\Lambda_p)$ y *densidad de muestreo* $d(\Lambda_p)$.

Señal muestreada: $\psi_p(\mathbf{x}) = \psi(\mathbf{x}) \cdot p(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^k} \psi(\mathbf{x}) \cdot \delta(\mathbf{x} - \mathbf{V} \cdot \mathbf{n})$

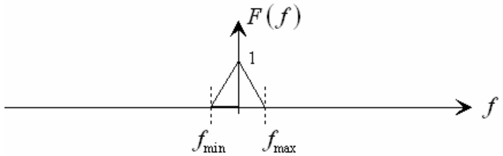
Señal discreta: $\psi_d[\mathbf{n}] = \psi_p(\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}) = \psi(\mathbf{V} \cdot \mathbf{n})$

Esta señal resulta de normalizar la señal $\psi_p(\mathbf{x})$ en las direcciones que indican los vectores base del retículo, de modo que si $\psi_p(\mathbf{x})$ toma valores en $\mathbf{x} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{n}$, entonces $\mathbf{n} = \mathbf{V}^{-1} \cdot \mathbf{x}$. Es decir, con independencia de la estructura del retículo Λ_p, la señal

Análisis frecuencial:

Señal continua original:

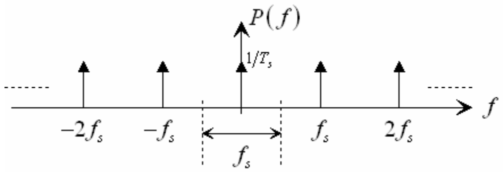
$$f(t) \xrightarrow{FT} F(f)$$



Señal de muestreo:

$$p(t) \xrightarrow{FT} P(f)$$

$$P(f) = \frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(f - n \cdot f_s)$$

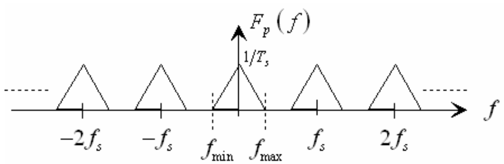


La transformada $P(f)$ puede interpretarse como un tren de deltas ponderadas por $d(\Lambda_p) = 1/T_s$, y desplazadas sobre los puntos del retículo recíproco $\Lambda_p^* = \{ f \in \mathbb{R} / f = n \cdot f_s, \forall n \in \mathbb{Z} \}$, cuya celda de Voronoi y periodo fundamental es el intervalo $[-f_s/2, f_s/2]$, y cuya densidad es la inversa de la del retículo Λ_p : $d(\Lambda_p^*) = T_s$.

Señal muestreada:

$$f_p(t) \xrightarrow{FT} F_p(f) = F(f) * P(f)$$

$$F_p(f) = \frac{1}{T_s} \sum_{n \in \mathbb{Z}} F(f - n \cdot f_s)$$



La transformada $F_p(f)$ puede interpretarse como un sumatorio de versiones de $F(f)$ ponderadas y desplazadas sobre los puntos del retículo recíproco Λ_p^*.

discreta toma valores en todos los puntos del plano entero $\mathbb{Z}^k$.

Análisis frecuencial:

Señal continua original: $\psi(\mathbf{x}) \xrightarrow{CSFT} \Psi(\mathbf{f})$

La región en la cual se verifica $\psi(\mathbf{f}) \neq 0$, se denomina *región de soporte* de la señal $\psi(\mathbf{x})$.

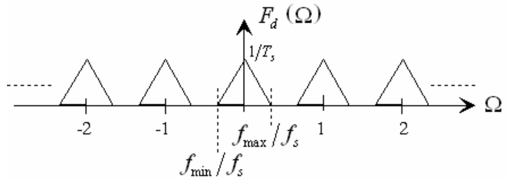
Señal de muestreo: $p(\mathbf{x}) \xrightarrow{CSFT} P(\mathbf{f}) = d(\Lambda_p) \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^k} \delta(\mathbf{f} - \mathbf{U} \cdot \mathbf{n})$, donde $\mathbf{U}$ es la matriz generatriz de Λ_p^*, es decir $\mathbf{U} = (\mathbf{V}^T)^{-1}$

Señal muestreada: $\psi_p(\mathbf{x}) \xrightarrow{CSFT} \Psi_p(\mathbf{f}) = \Psi(\mathbf{f}) * P(\mathbf{f}) = d(\Lambda_p) \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^k} \Psi(\mathbf{f} - \mathbf{U} \cdot \mathbf{n})$

Señal discreta:

$$F_d(\Omega) = F_p(f/T_s)$$

$$F_d(\Omega) = \frac{1}{T_s}\sum_{n\in\mathbb{Z}} F(f/T_s - n\cdot f_s)$$



, donde Ω es la misma frecuencia f (cambiada de nombre para indicar que se trata de una DTFT) normalizada por f_s, es decir, por la amplitud del vector que genera el retículo recíproco Λ^*_p, de modo que si $F_p(f)$ es una suma de réplicas de $F(f)$ en $f = n\cdot f_s$, entonces $n = f/f_s$ y la frecuencia normalizada es $\Omega = f/f_s$.

Teorema de *Nyquist*:

Enunciado tradicional: para poder recuperar $f(t)$ limitada en banda a partir de $f_d[n]$ es necesario que la frecuencia de muestreo, f_s, sea superior al doble de la máxima frecuencia de la señal $f(t)$, de modo que no se produzca solape espectral (*aliasing*).

Enunciado generalizable: para poder recuperar $f(t)$ limitada en banda a partir de $f_d[n]$, que muestrea $f(t)$ cada T_s, es necesario que la parte no nula de $F(f)$ encaje en un intervalo $1/T_s$, de modo que no se produzca solape espectral (*aliasing*).

NOTA: El enunciado tradicional es aplicable a señales reales, en las que el módulo de la FT es par y, por lo tanto, el espectro de la señal abarca dos veces su frecuencia máxima.

Señal discreta: $\Psi_d(\boldsymbol{\Omega}) = \Psi_p(\mathbf{U}\cdot\mathbf{f}) = d(\Lambda_p)\sum_{\mathbf{n}\in\mathbb{Z}^k}\Psi(\mathbf{U}\cdot\mathbf{f} - \mathbf{U}\cdot\mathbf{n})$

, donde $\boldsymbol{\Omega}$ es la misma frecuencia $\mathbf{f}$ (cambiada de nombre para indicar que se trata de una DSFT) normalizada, de modo que si $\psi_p(\mathbf{f})$ es una suma de réplicas de $\psi(\mathbf{f})$ en $\mathbf{f} = \mathbf{U}\cdot\mathbf{n}$, entonces las posiciones de frecuencia normalizada resultan $\boldsymbol{\Omega} = \mathbf{U}^{-1}\cdot\mathbf{f} = \mathbf{V}^T\cdot\mathbf{f}$. Es decir, con independencia de la estructura del retículo Λ^*_p, la DSFT de la señal discreta presenta un patrón que se replica en todos los puntos del plano entero $\mathbb{Z}^k$, que es posible interpretar como un retículo de $\mathbb{R}^k$ con una celda de Voronoi *hipercuadrada* de lado unidad. El espectro de $\Psi_d(\boldsymbol{\Omega})$, periódico por tanto de periodo unidad (1^k), es el mismo espectro de $\Psi(\mathbf{f})$ pero girado y escalado (según las direcciones y magnitudes de los vectores base del retículo Λ^*_p) y replicado en cada punto de $\mathbb{Z}^k$.

Teorema de *Nyquist* generalizado:

Para poder recuperar $\psi(\mathbf{x})$ limitada en banda a partir de $\psi_d[\mathbf{n}]$, que muestrea $\psi(\mathbf{x})$ en un retículo Λ_p, es necesario que la región de soporte de $\psi(\mathbf{x})$ encaje en la celda de Voronoi del retículo Λ^*_p, de modo que no se produzca solape espectral (*aliasing*):

$$\Psi(\mathbf{f}) = 0, \forall\mathbf{f} \notin V(\Lambda^*_p)$$

Reconstrucción

Modelo de reconstrucción:

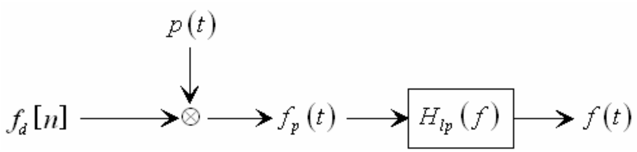
Si en la señal original continua se verifica el teorema de *Nyquist*, es decir, si

Reconstrucción

Modelo de reconstrucción:

Si la señal original continua verifica el teorema de *Nyquist* en la estructura de muestreo

$[f_{\min}, f_{\max}] \subset [-f_s/2, f_s/2]$, es posible recuperar $f(t)$ a partir de $f_d[n]$ aplicando el siguiente esquema:



Si $p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - n \cdot T_s)$, entonces $f_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f[n]\delta(t - n \cdot T_s)$. Como además $f_d[n] = f(n \cdot T_s)$, resulta $f_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t - n \cdot T_s)$, que es precisamente la señal muestreada. A partir de su espectro, es posible obtener $F(f) = F_p(f) \cdot H_{lp}(f)$, siendo:

$$H_{lp}(f) = \begin{cases} T_s & |f| < f_s/2 \\ 0 & resto \end{cases}$$

Por lo tanto,

$$F_p(f) \cdot H_{lp}(f) \xrightarrow{FT^{-1}} f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F_p(f) \cdot H_{lp}(f) \cdot e^{j2\pi ft} df = T_s \int_{-f_s/2}^{f_s/2} F_p(f) \cdot e^{j2\pi ft} df$$

Dado que en la práctica el filtro $H_{lp}(f)$ no es realizable (su respuesta al impulso es una función *sinc*, no causal y de duración infinita), la reconstrucción aproximada se realiza con filtros interpoladores, $H_{rN}(f)$, de orden $N = 0,1,2, etc.$, que aproximan la respuesta en frecuencia de $H_{lp}(f)$.

Si f_s está prefijada y $f(t)$ no verifica el teorema de *Nyquist*, es necesario establecer un compromiso entre los efectos de un prefiltrado previo (degradación por eliminación de altas frecuencias) y los del *aliasing* (degradación por solape espectral).

Reconstrucción práctica

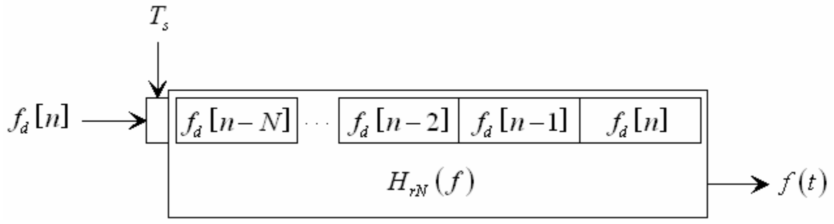
En la práctica se hacen pasar los valores $f_d[n]$, uno cada T_s, por un filtro interpolador del orden requerido. El orden indica el número de valores de $f_d[n]$ necesarios en cada instante para obtener una aproximación de $f(t)$; indica, por lo tanto, el retardo introducido:

considerada, es posible recuperar $\psi(\mathbf{x})$ a partir de $\psi_d[\mathbf{n}]$ aplicando el mismo esquema que para el caso unidimensional.

La especificación del filtro paso bajo interpolador ideal sería en este caso:

$$H_{lp}(\mathbf{f}) = \begin{cases} d(\Lambda_p^*) & \mathbf{f} \in < V(\Lambda_p^*) \\ 0 & resto \end{cases}$$

Si Λ_p está prefijado y $\psi(\mathbf{x})$ no verifica el teorema de *Nyquist*, es necesario establecer un compromiso entre los efectos de un prefiltrado previo (degradación por eliminación de altas frecuencias) y los del *aliasing* (degradación por solape espectral).


T_s
$f_d[n]$
$f_d[n-N]$
$f_d[n-2]$
$f_d[n-1]$
$f_d[n]$
$H_{rN}(f)$
$f(t)$