Transmisión de Datos 2011/12

- **Ejercicio 7 – Resolución Detallada**

Calcular la fórmula de la Distorsión de un cuantificador uniforme asumiendo fdp par (simétrica respecto al origen) para N par e impar.

Dado un cuantificador uniforme, todas las regiones (excepto los extremos) tienen el mismo escalón de cuantificación ≡ Δ, sea N par o impar.

$$a_i - a_{i-1} = \Delta \longrightarrow a_i = a_0 + i\Delta \qquad i = 0,1...N \tag{1}$$

Por tanto, para cualquier región, tomando como valor de reconstrucción el punto medio de ésta, el error máximo en la muestra reconstruida será menor o igual a Δ/2:

$$\forall x \quad \in [a_0, a_N] \quad \rightarrow \quad \varepsilon = x - \hat{x} \le \Delta/2 \qquad \text{Error Granular}$$

$$\left.\begin{matrix} x < a_0 \\ x > a_N \end{matrix}\right\} \quad \varepsilon > \Delta/2 \qquad \text{Error de Sobrecarga}$$

Asumimos fdp par, es decir:

$$fdp(x) = fdp(-x) \tag{2}$$

Sabemos que la distorsión para un cuantificador en general es:

$$D = E\left[(x-\hat{x})^2\right] \tag{3}$$

De (1), (2) y (3) deducimos:

$$D = E\left[(x-\hat{x})^2\right] = \sum_{K=1}^{N} \int_{R_K} (x-\hat{x}_k)^2\, fdp(x)dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{a_0} (x-\hat{x}_1)^2\, fdp(x)dx + \sum_{i=1}^{N}\left(\int_{a_{i-1}}^{a_i} (x-\hat{x}_i)^2\, fdp(x)dx\right) + \int_{a_N}^{\infty} (x-\hat{x}_N)^2\, fdp(x)dx =$$

$$= 2\int_{-\infty}^{a_0} (x-\hat{x}_1)^2\, fdp(x)dx + \sum_{i=1}^{N-1}\left(\int_{a_{i-1}}^{a_i} (x-\hat{x}_i)^2\, fdp(x)dx\right)$$

- **Para N par:**

Sabiendo,

$$\boxed{\begin{array}{ll} x_i = -x_{N+1-i} & , \quad (1 \le i \le N/2) \\ a_i = -a_{N-i} = -(\frac{N}{2} - i)\Delta & , \quad (1 \le i \le N/2) \\ a_{N/2} = 0 & \end{array}}$$

y sustituyendo en la fórmula anterior obtenemos el resultado:

$$D_{par} = 2\int_{-\infty}^{a_0} \left(x - \hat{x}_1\right)^2 \, fdp(x)dx + 2\sum_{i=1}^{\frac{N}{2}} \left(\int_{a_{i-1}}^{a_i} \left(x - \hat{x}_i\right)^2 \, fdp(x)dx \right) =$$

$$= 2\int_{-\infty}^{-(\frac{N}{2})\Delta} \left(x - \hat{x}_1\right)^2 \, fdp(x)dx + 2\sum_{i=1}^{\frac{N}{2}} \left(\int_{-\left(\frac{N}{2}+1-i\right)\Delta}^{-\left(\frac{N}{2}-i\right)\Delta} \left(x - \hat{x}_i\right)^2 \, fdp(x)dx \right)$$

- **Para N impar:**

Sabiendo,

$$\boxed{\begin{array}{ll} x_i = -x_{N+1-i} & , \quad (1 \le i \le \frac{N+1}{2}) \\ a_i = -a_{N-i} = (-\frac{N}{2} + i)\Delta & , \quad (1 \le i \le \frac{N-1}{2}) \\ a_{\frac{N+1}{2}} = 0 & \end{array}}$$

Sustituyendo igual que en el caso anterior, obtenemos el resultado:

$$D_{impar} = 2\int_{-\infty}^{a_0} \left(x - \hat{x}_1\right)^2 \, fdp(x)dx + 2\sum_{i=1}^{\frac{N-1}{2}} \left(\int_{a_{i-1}}^{a_i} \left(x - \hat{x}_i\right)^2 \, fdp(x)dx \right) + \int_{a_{(n-1)/2}}^{a_{(n+1)/2}} x^2 \, fdp(x)dx =$$

$$= 2\int_{-\infty}^{-(\frac{N}{2}+1)\Delta} \left(x - \hat{x}_1\right)^2 \, fdp(x)dx + 2\sum_{i=1}^{\frac{N-1}{2}} \left(\int_{\left(-\frac{N}{2}-1+i\right)\Delta}^{\left(-\frac{N}{2}+i\right)\Delta} \left(x - \hat{x}_{i+1}\right)^2 \, fdp(x)dx \right) + \int_{-\frac{\Delta}{2}}^{\frac{\Delta}{2}} x^2 \, fdp(x)dx$$