

Transmisión de Datos 2011/12

- **Ejercicio 19 – Resolución Detallada:**

Sean dos códigos de bloque definidos por sus matrices generatrices:

$$G1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad G2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Calcular las capacidades detectoras y correctoras de esos códigos, y del código producto resultante de su combinación (C1xC2). Codificar para transmisión la secuencia de información [1 0 0 1 0 0 0 0 1 1 1 1 0 1 0 1 1 0] mediante el código producto C1xC2. Transmitiendo por filas, sea el patrón de error en el canal

$$\varepsilon_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad y \quad \varepsilon_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

calcular el bloque recibido y proceder a su decodificación.

A partir de las matrices generatrices se pueden calcular ambos códigos, C1(5,3) y C2(6,3):

- C1 -	- C2 -
000.00	000.000
001.10	001.101
010.01	010.011
011.11	011.110
100.01	100.110
101.11	101.011
110.00	110.101
111.10	111.000

Las capacidades detectoras y correctoras de cada código son calculadas como en ejercicios anteriores:

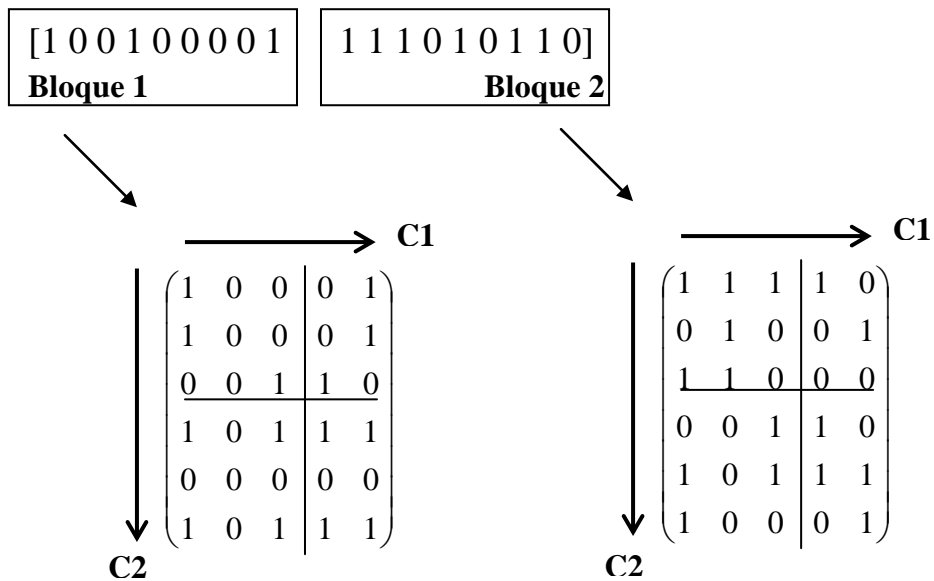
$$d_{\min}^1 = w_{\min}^1 = 2 \Rightarrow \begin{cases} \varepsilon^1 = d_{\min} - 1 = 1 \\ t^1 = \left\lfloor \frac{d_{\min} - 1}{2} \right\rfloor = \lfloor 0.5 \rfloor = 0 \end{cases}$$

$$d_{\min}^2 = w_{\min}^2 = 3 \Rightarrow \begin{cases} \varepsilon^2 = d_{\min} - 1 = 2 \\ t^2 = \left\lfloor \frac{d_{\min} - 1}{2} \right\rfloor = \lfloor 1 \rfloor = 1 \end{cases}$$

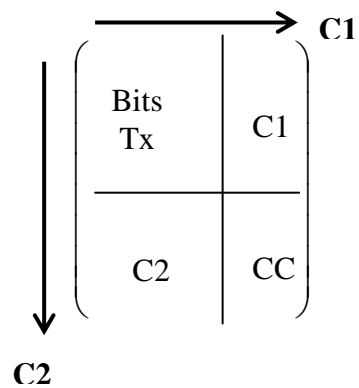
Y a partir de las capacidades de cada código se pueden hallar las del código producto:

$$\Rightarrow d_{\min} = d^1_{\min} \cdot d^2_{\min} = 6 \Rightarrow \begin{cases} \varepsilon = d_{\min} - 1 = 5 \\ t = \left\lfloor \frac{d_{\min} - 1}{2} \right\rfloor = \lfloor 2.5 \rfloor = 2 \end{cases}$$

Para codificar la secuencia de información se hace en dos bloques de $n_1 \times n_2 = 3 \times 3$.



Como se muestra en el siguiente esquema el bloque de información se coloca en el primer cuadrante. Se añadirán los bits de chequeo de los códigos 1 y 2 en filas o columnas. En el último cuadrante se añade un *chequeo del chequeo*.



Transmitiendo por filas, sea el patrón dado anteriormente, los bits recibidos son:

Bloque 1:

$$\begin{array}{c}
 \xrightarrow{\text{C1}} \\
 \left(\begin{array}{ccc|cc}
 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\
 \hline
 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 1 & 0 & 1 & 1 & 1
 \end{array} \right) \\
 \downarrow \\
 \text{C2}
 \end{array}$$

Bloque 2:

$$\begin{array}{c}
 \xrightarrow{\text{C1}} \\
 \left(\begin{array}{ccc|cc}
 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 \hline
 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
 1 & 0 & 0 & 0 & 1
 \end{array} \right) \\
 \downarrow \\
 \text{C2}
 \end{array}$$

Para decodificar ambos bloques se calculan primero las matrices estándar de cada código (MS1 y MS2) con sus síndromes correspondientes ($S = x \cdot H^T$), hallados con las matrices H:

$$H1 = [P_{3 \times 2}^T \mid I_{2 \times 2}] = \left[\begin{array}{cc|cc} 001 & 10 \\ 110 & 01 \end{array} \right]$$

$$H2 = [P_{3 \times 3}^T \mid I_{3 \times 3}] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 101 & 100 \\ 110 & 010 \\ 011 & 001 \end{array} \right]$$

$$MS1 = \left(\begin{array}{cccccccc|c}
 00000 & 00110 & 01001 & 01111 & 10001 & 10111 & 11000 & 11110 & \mathbf{S} \\
 10000 & 10110 & 11001 & 11111 & 00001 & 00111 & 01000 & 01110 & 00 \\
 00100 & 00010 & 01101 & 01011 & 10101 & 10011 & 11100 & 11010 & 10 \\
 10100 & 10010 & 11101 & 11011 & 00101 & 00011 & 01100 & 01010 & 11
 \end{array} \right)$$

$$MS2 = \left(\begin{array}{cccccccc|c}
 000000 & 001101 & 010011 & 011110 & 100110 & 101011 & 110101 & 111000 & \mathbf{S} \\
 100000 & 101101 & 110011 & 111110 & 000110 & 001011 & 010101 & 011000 & 000 \\
 010000 & 011101 & 000011 & 001110 & 110110 & 111011 & 100101 & 101000 & 011 \\
 001000 & 000101 & 011011 & 010110 & 101110 & 100011 & 111101 & 110000 & 101 \\
 000100 & 001001 & 010111 & 011010 & 100010 & 101111 & 110001 & 111100 & 100 \\
 000010 & 001111 & 010001 & 011100 & 100100 & 101001 & 110111 & 111010 & 010 \\
 000001 & 001100 & 010010 & 011111 & 100111 & 101010 & 110100 & 111001 & 001 \\
 100001 & 101100 & 110010 & 111111 & 000111 & 001010 & 010100 & 011001 & 111
 \end{array} \right)$$

Una vez realizados estos cálculos previos el procedimiento consiste en hallar el síndrome de filas y después columnas (o viceversa) repetidamente hasta que ambos sean cero:

Bloque 1:

→ C1

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

Síndromes-C1

$$\left. \begin{array}{l} 00001 \cdot H1^T = 01 \Rightarrow \varepsilon = 10000 \\ 10001 \cdot H1^T = 00 \Rightarrow \varepsilon = 00000 \\ 01110 \cdot H1^T = 01 \Rightarrow \varepsilon = 10000 \\ 10111 \cdot H1^T = 00 \Rightarrow \varepsilon = 00000 \\ 00000 \cdot H1^T = 00 \Rightarrow \varepsilon = 00000 \\ 10111 \cdot H1^T = 00 \Rightarrow \varepsilon = 00000 \end{array} \right\}$$

Correccion MS1:

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} \textcircled{1} & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline \textcircled{1} & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right)$$



Síndromes-C1

$$\left. \begin{array}{l} 10001 \cdot H1^T = 01 \Rightarrow \varepsilon = 00000 \\ 10001 \cdot H1^T = 01 \Rightarrow \varepsilon = 00000 \\ 00110 \cdot H1^T = 01 \Rightarrow \varepsilon = 00000 \\ 10110 \cdot H1^T = 00 \Rightarrow \varepsilon = 00000 \\ 00000 \cdot H1^T = 00 \Rightarrow \varepsilon = 00000 \\ 10111 \cdot H1^T = 00 \Rightarrow \varepsilon = 00000 \end{array} \right\}$$

FIN

Correccion MS2:

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline \textcircled{0} & \textcircled{0} & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

Síndromes-C2

$$\left. \begin{array}{l} 111101 \cdot H2^T = 101 \Rightarrow \varepsilon = 001000 \\ 001000 \cdot H2^T = 101 \Rightarrow \varepsilon = 001000 \\ 001101 \cdot H2^T = 000 \Rightarrow \varepsilon = 000000 \\ 001101 \cdot H2^T = 000 \Rightarrow \varepsilon = 000000 \\ 110101 \cdot H2^T = 000 \Rightarrow \varepsilon = 000000 \end{array} \right\}$$

C2

⇒ Bloque 1 decodifica do = 100100001

0 errores

Bloque 2:

$$\begin{array}{c|cc} \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ \hline \end{array} \begin{array}{c} \rightarrow \\ \text{C1} \end{array}$$

Síndromes-C1

$$\left. \begin{array}{l} 11111 \cdot H1^T = 01 \Rightarrow \varepsilon = 10000 \\ 00001 \cdot H1^T = 01 \Rightarrow \varepsilon = 10000 \\ 11000 \cdot H1^T = 00 \Rightarrow \varepsilon = 00000 \\ 00110 \cdot H1^T = 00 \Rightarrow \varepsilon = 00000 \\ 10111 \cdot H1^T = 00 \Rightarrow \varepsilon = 00000 \\ 10001 \cdot H1^T = 00 \Rightarrow \varepsilon = 00000 \end{array} \right\}$$

Correccion MS1:

$$\begin{array}{c|cc} \hline 0 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ \hline \end{array} \begin{array}{c} \downarrow \\ \text{C2} \end{array}$$

Síndromes-C1

$$\left. \begin{array}{l} 01110 \cdot H1^T = 01 \Rightarrow \varepsilon = 10000 \\ 11001 \cdot H1^T = 01 \Rightarrow \varepsilon = 10000 \\ 01000 \cdot H1^T = 01 \Rightarrow \varepsilon = 10000 \\ 00110 \cdot H1^T = 00 \Rightarrow \varepsilon = 00000 \\ 10111 \cdot H1^T = 00 \Rightarrow \varepsilon = 00000 \\ 10001 \cdot H1^T = 00 \Rightarrow \varepsilon = 00000 \end{array} \right\}$$

Correccion MS2:

$$\begin{array}{c|cc} \hline 0 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ \hline \end{array} \begin{array}{c} \leftarrow \\ \text{C1} \end{array}$$

Síndromes-C2

$$\left. \begin{array}{l} 011011 \cdot H2^T = 101 \Rightarrow \varepsilon = 001000 \\ 101000 \cdot H2^T = 011 \Rightarrow \varepsilon = 010000 \\ 100110 \cdot H2^T = 000 \Rightarrow \varepsilon = 000000 \\ 100110 \cdot H2^T = 000 \Rightarrow \varepsilon = 000000 \\ 110011 \cdot H2^T = 110 \Rightarrow \varepsilon = 100000 \end{array} \right\}$$

Correccion MS1:

$$\begin{array}{c|cc} \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ \hline \end{array}$$

Síndromes-C2

$$\left. \begin{array}{l} 101011 \cdot H2^T = 000 \Rightarrow \varepsilon = 000000 \\ 111000 \cdot H2^T = 000 \Rightarrow \varepsilon = 000000 \\ 100110 \cdot H2^T = 000 \Rightarrow \varepsilon = 000000 \\ 100110 \cdot H2^T = 000 \Rightarrow \varepsilon = 000000 \\ 010011 \cdot H2^T = 000 \Rightarrow \varepsilon = 000000 \end{array} \right\} \text{FIN}$$

\Rightarrow Bloque 2 decodificado = 111010110

0 errores

Por lo tanto la secuencia final decodificada tiene un solo fallo y es la siguiente:

[000100001111010110]