Transmisión de Datos 2011/12

- **Ejercicio 13 – Resolución Detallada:**

Generar el código lineal C(6,3) que incluye como palabras código las siguientes: {(100101),(010111),(111001)}, así como sus matrices generatriz (G), de chequeo de paridad (H) y estándar. Comentar las capacidades detectoras y correctoras del código, tanto a nivel general (para cualquiera de las matrices estándar posibles, como para la matriz estándar generada).

Según la característica principal de los códigos lineales, el resultado de la suma binaria de dos palabras código es otra palabra código. Combinando las palabras dadas. se obtiene el código para las $2^3 = 8$ posibilidades:

Palabra	Código	Manera de obtenerlo
000	000000	→ 010111 ⊕ 010111 = 000000 (comprobación, pues siempre está)
001	001011	→ 110010 ⊕ 111001 = 001011
010	010111	-
011	011100	→ 001011 ⊕ 010111 = 011100
100	100101	-
101	101110	→ 100101 ⊕ 001011 = 101110
110	110010	→ 010111 ⊕ 100101 = 110010
111	111001	-

Una vez conocido el código para cada palabra podemos calcular G y a partir de ésta H:

$$G = \begin{bmatrix} c(100) \\ c(010) \\ c(001) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100101 \\ 010111 \\ 001011 \end{bmatrix} = \left[I_{3x3} \mid P_{3x3} \right] \quad \Rightarrow \quad H = \left[P_{3x3}{}^{T} \mid I_{3x3} \right] = \left[\begin{array}{c|c} 110 & 100 \\ 011 & 010 \\ 111 & 001 \end{array} \right]$$

Nota: lo lógico (por eficiencia en casos reales) sería calcular primero G y luego el código.

Para generar las 2^{n-k} filas de la matriz estándar:

1) El primer Coset son las palabras código. Primera fila:

000000	001011	010111	011100	100101	101110	110010	111001

2) Escogemos como Coset líder para la siguiente fila ‘100000’, y el resto de elementos se forman sumando éste a cada uno de los elementos del primer Coset. Segunda fila:

000001	001010	010110	011101	100100	101111	110011	111000

3) Coset líder ‘000010’. Tercera fila:

000010	001001	010101	011110	100111	101100	110000	111011

4) Coset líder ‘000100’. Cuarta fila:

000100	001111	010011	011000	100001	101010	110110	111101

5) Coset líder ‘001000’. Quinta fila:

001000	000011	011111	010100	101101	100110	111010	110001

6) Coset líder ‘010000’. Sexta fila:

010000	011011	000111	001100	110101	111110	100010	101001

7) Coset líder ‘100000’. Séptima fila:

100000	101011	110111	111100	000101	001110	010010	011001

8) El último Coset líder tendrá w=2. Entre todas las posibilidades escogemos cualquiera que no haya aparecido ya en las filas anteriores, por ejemplo ‘000110’. Octava fila:

000110	001101	010001	011010	100011	101000	110100	111111

Para terminar con la matriz estándar falta calcular el síndrome de cada Coset líder:

Coset Líder	***Síndrome***
000000	000
000001	001
000010	010
000100	100
001000	011
010000	111
100000	101
000110	110

A partir de la d_{min} del código podemos calcular ε (hasta número de bits cuyos patrones detecta por completo) y t (hasta número de bits cuyos patrones detecta por completo), sin necesidad de calcular la matriz estándar.

$$d_{\min} = w_{\min} = 3 \Rightarrow \begin{cases} \varepsilon = d_{\min} - 1 = 2 \\ t = \left\lfloor \dfrac{d_{\min} - 1}{2} \right\rfloor = \lfloor 1 \rfloor = 1 \end{cases}$$

Sin haber calculado la matriz estándar, pero conociendo estos parámetros podríamos adelantar que este código puede detectar y corregir todos los errores de un bit. Por tanto, ya conoceríamos 7 de los 8 (siempre serán $2^{(n-k)}$, siendo 00...0 siempre el primer coset leader) Coset’s leaders (el ’00…0’ y los patrones de error con w=1 –que serán 6-) de la matriz estándar. El último previsiblemente será un patrón de error de w=2.

Nota: porqué no se cumple $d_{\min} = \varepsilon + t + 1$?