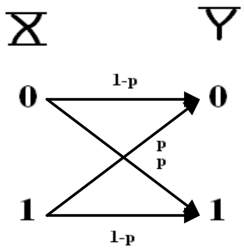
Transmisión de Datos 2011/12

- **Ejercicio 1 – Resolución Detallada:**

Demostrar razonadamente la capacidad de información del canal binario simétrico.

Dibujo esquemático de un canal binario simétrico, con probabilidad de error p (para cualquier p):



Por definición, la capacidad de un canal será el máximo de la función autinformación:

$$\boxed{C = \max_{p(x)} I(X;Y)}$$

Conocemos la expresión de dicha función, que es la información de una variable menos la información que se le resta al conocer otra variable de la que depende.

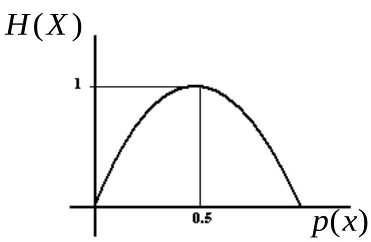
$$I(X;Y) = H(X) - H(X \mid Y) = H(Y) - H(Y \mid X)$$

Por un lado,

$$H(X) = -\sum p(x) \log_2 p(x) = -p_0 \log_2 p_0 - p_1 \log_2 p_1 = -p_0 \log_2 p_0 - (1-p_0)\log_2(1-p_0)$$

deducimos que la entropía de la entrada $\boxed{H(X) \leq 1}$.

*También podemos observarlo representándolo gráficamente:



De forma similar la entropía de la salida:

$$p(y) = \begin{cases} p'_0 = p_0(1-p) + p_1 p \\ p'_1 = p_1(1-p) + p_0 p \end{cases} = \begin{cases} p'_0 \\ 1 - p'_0 \end{cases}$$

$$H(Y) = -\sum p(x)\log_2 p(x) = -p'_0 \log_2 p'_0 - p'_1 \log_2 p'_1 = -p'_0 \log_2 p'_0 - (1-p'_0)\log_2(1-p'_0)$$

$$\boxed{H(Y) \le 1}$$

Y por otro lado, desarrollamos la expresión de la entropía condicionada. Para ello son útiles las probabilidades conjunta y condicionada.

p(x|y)	x = 0	x = 1
y = 0	1-p	p
y = 1	p	1-p

p(x,y)	x = 0	x = 1
y = 0	p_0 (1-p)	p_1 p
y = 1	p_0 p	p_1 (1-p)

$$H(X \mid Y) = -\sum_{x,y} p(x,y)\log_2 p(x \mid y) = \underbrace{(p_0 + p_1)}_{1}\left[-(1-p)\log_2(1-p) - p\log_2 p\right]$$

O bien:

p(y|x)	x = 0	x = 1
y = 0	1-p	p
y = 1	p	1-p

p(y,x)	x = 0	x = 1
y = 0	p'_0 (1-p)	p'_1 p
y = 1	p'_0 p	p'_1 (1-p)

$$H(Y \mid X) = -\sum_{x,y} p(x,y)\log_2 p(y \mid x) = \underbrace{(p'_0 + p'_1)}_{1}\left[-(1-p)\log_2(1-p) - p\log_2 p\right]$$

Recordando la definición de la función de entropía binaria, $H_b(p) = -(1-p)\log_2(1-p) - p\log_2 p$

y así, se obtiene $\boxed{H(X \mid Y) = H(Y \mid X) = H_b(p)}$ que no depende de p(x).

Finalmente sustituimos para hallar la fórmula de capacidad de un canal binario simétrico.

$$\boxed{C = \max_{p(x)} I(X;Y) = 1 - H_b(p)}$$