

Temas Avanzados en Procesado de Señales

Tratamiento Digital de Señales Visuales

Tema 5: Operadores Globales

...transformadas lineales, transformadas morfológicas...

José María Martínez Sánchez



Escuela Politécnica Superior



Universidad Autónoma de Madrid
E28049 Madrid (SPAIN)

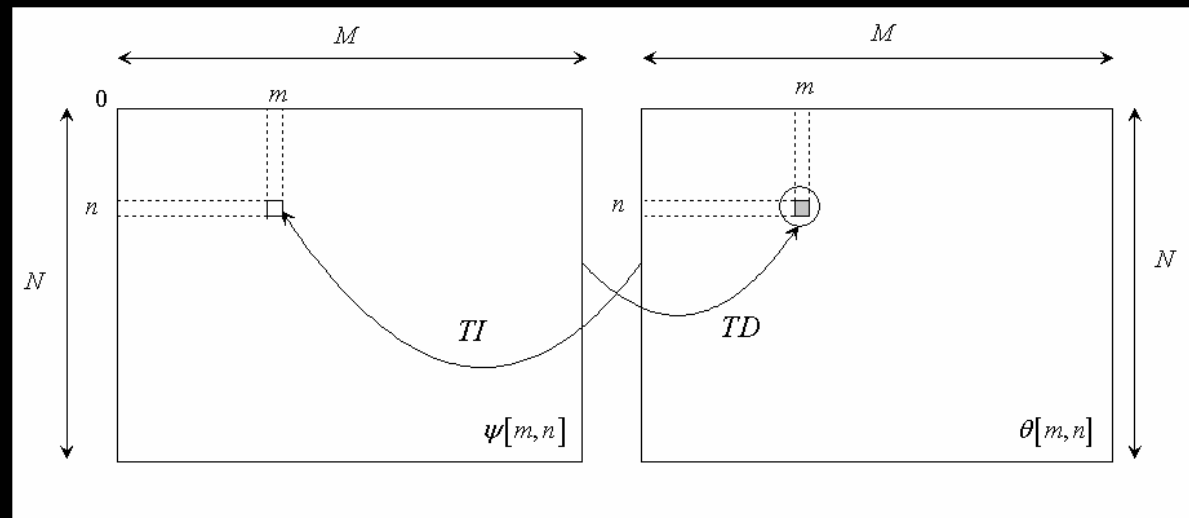


Video Processing and Understanding Lab
Grupo de Tratamiento e Interpretación de Vídeo

- ✿ Introducción
- ✿ Transformadas discretas lineales
- ✿ Transformadas morfológicas

Los operadores globales efectúan una transformación de tipo:

$$\psi[m, n] \begin{matrix} \xrightarrow{TD} \\ \xleftarrow{TI} \end{matrix} \Psi[u, v], \quad m, u \in \{0, \dots, M-1\}, \quad n, v \in \{0, \dots, N-1\}$$



Tipos:

- *Fourier, seno, coseno, etc (directa e inversa): A, R, F, C*
- *Karhunen-Loewe (directa e inversa): C*
- *Hadamard, Haar, Slant (directa e inversa)*
- *Hough (directa): A*

✿ Introducción

✿ Transformadas discretas lineales

- Introducción
- Transformadas unidimensionales
- Transformadas bidimensionales
- Transformada discreta de Fourier (DFT)
- Transformada discreta del coseno (DCT)
- Transformada discreta del seno (DST)
- Transformada discreta de Haar (DHT)

✿ Transformadas morfológicas

En el caso de las transformadas discretas lineales:

- *Relación entre imagen natural e imagen transformada:*

$$\Psi[u, v] = \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{M-1} \psi[m, n] \cdot w'[u, v, m, n]$$

$$\psi[m, n] = \sum_{u=0}^{N-1} \sum_{v=0}^{M-1} \Psi[u, v] \cdot w[m, n, u, v]$$

- *Los conjuntos de valores $w'[m, n, u, v]$ y $w[u, v, m, n]$ son los núcleos de las transformaciones directa e inversa.*
- *Expresión de la señal original como combinación lineal de funciones de igual dimensión (cambio de base), que representan componentes espectrales (filtrado (F)) u otras características (análisis (A), restauración (R)), o buscan compactar la energía de la señal (codificación (C)).*

Transformación discreta lineal:

$$f[n] \begin{matrix} \xrightarrow{TD} \\ \xleftarrow{TI} \end{matrix} F[k], \quad n, k \in \{0, \dots, N-1\}$$

$$F[k] = \sum_{n=0}^{N-1} f[n] \cdot w'[k, n] = \sum_{n=0}^{N-1} w'[k, n] \cdot f[n]$$

$$f[n] = \sum_{k=0}^{N-1} F[k] \cdot w[n, k] = \sum_{k=0}^{N-1} w[n, k] \cdot F[k]$$

Representación matricial:

- Definiendo las matrices:

$$\mathbf{W}' = \begin{bmatrix} w'[0,0] & \dots & w'[0, N-1] \\ \dots & w'[k,n] & \dots \\ w'[N-1,0] & \dots & w'[N-1, N-1] \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{f} = [f[0], \dots, f[N-1]]^T$$

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} w[0,0] & \dots & w[0, N-1] \\ \dots & w[n,k] & \dots \\ w[N-1,0] & \dots & w[N-1, N-1] \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{F} = [F[0], \dots, F[N-1]]^T$$

- Las transformadas pueden escribirse:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{F} &= \mathbf{W}' \cdot \mathbf{f} \\ \mathbf{f} &= \mathbf{W} \cdot \mathbf{F} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \mathbf{f} = \mathbf{W} \cdot \mathbf{W}' \cdot \mathbf{f} \Rightarrow \mathbf{W} \cdot \mathbf{W}' = \mathbf{I} \Rightarrow \mathbf{W}' = \mathbf{W}^{-1}$$

- , por lo que basta con conocer el núcleo de la transformación inversa, \mathbf{W} .

- Observando ahora la ecuación de síntesis en su versión inicial, es posible escribir:

$$f[n] = \sum_{k=0}^{N-1} F[k] \cdot w[n,k] = \sum_{k=0}^{N-1} F[k] \cdot \mathbf{W}_k[n]$$

columna k de la matriz \mathbf{W}

- , es decir, $\mathbf{W}_k[n]$ son los vectores base de la transformación.

- Habitualmente los vectores son ortonormales, por lo que forman un conjunto completo de vectores base del espacio N -dimensional, \mathbb{C}^N . En consecuencia, el núcleo o matriz que define la transformación suele ser una matriz unitaria:

$$\mathbf{W} \cdot \mathbf{W}^{*T} = \mathbf{W}^{*T} \cdot \mathbf{W} = \mathbf{I} \Rightarrow \mathbf{W}^{-1} = \mathbf{W}^{*T}$$

- , y de determinante unidad: $|\det(\mathbf{W})| = 1$

- En este caso, es inmediato demostrar que la transformación es una isometría o automorfismo isométrico, es decir, que mantiene la longitud euclídea de los vectores (o, en otras palabras, es una rotación en \mathbb{C}^N , mantiene la energía o información de las señales que representan los vectores):

$$\begin{aligned}
 |\mathbf{f}|^2 &= \sum_{n=0}^{N-1} |f[n]|^2 = \sum_{n=0}^{N-1} \left| \sum_{k=0}^{N-1} F[k] \cdot \mathbf{W}_k[n] \right|^2 = \sum_{n=0}^{N-1} \left[|\mathbf{W}_k[n]|^2 \left| \sum_{k=0}^{N-1} F[k] \right|^2 \right] = \\
 &= \left| \sum_{k=0}^{N-1} F[k] \right|^2 \sum_{n=0}^{N-1} |\mathbf{W}_k[n]|^2 = \sum_{k=0}^{N-1} |F[k]|^2 = |\mathbf{F}|^2
 \end{aligned}$$

, o matricialmente:

$$|\mathbf{f}|^2 = \mathbf{f}^{*T} \cdot \mathbf{f} = (\mathbf{W} \cdot \mathbf{F})^{*T} \cdot (\mathbf{W} \cdot \mathbf{F}) = \mathbf{F}^{*T} \cdot \mathbf{W}^{*T} \cdot \mathbf{W} \cdot \mathbf{F} = \mathbf{F}^{*T} \cdot \mathbf{I} \cdot \mathbf{F} = \mathbf{F}^{*T} \cdot \mathbf{F} = |\mathbf{F}|^2$$

✿ Separabilidad:

- Si el núcleo de la transformación es una matriz separable, el número de operaciones necesario para llevarla a cabo se puede reducir.

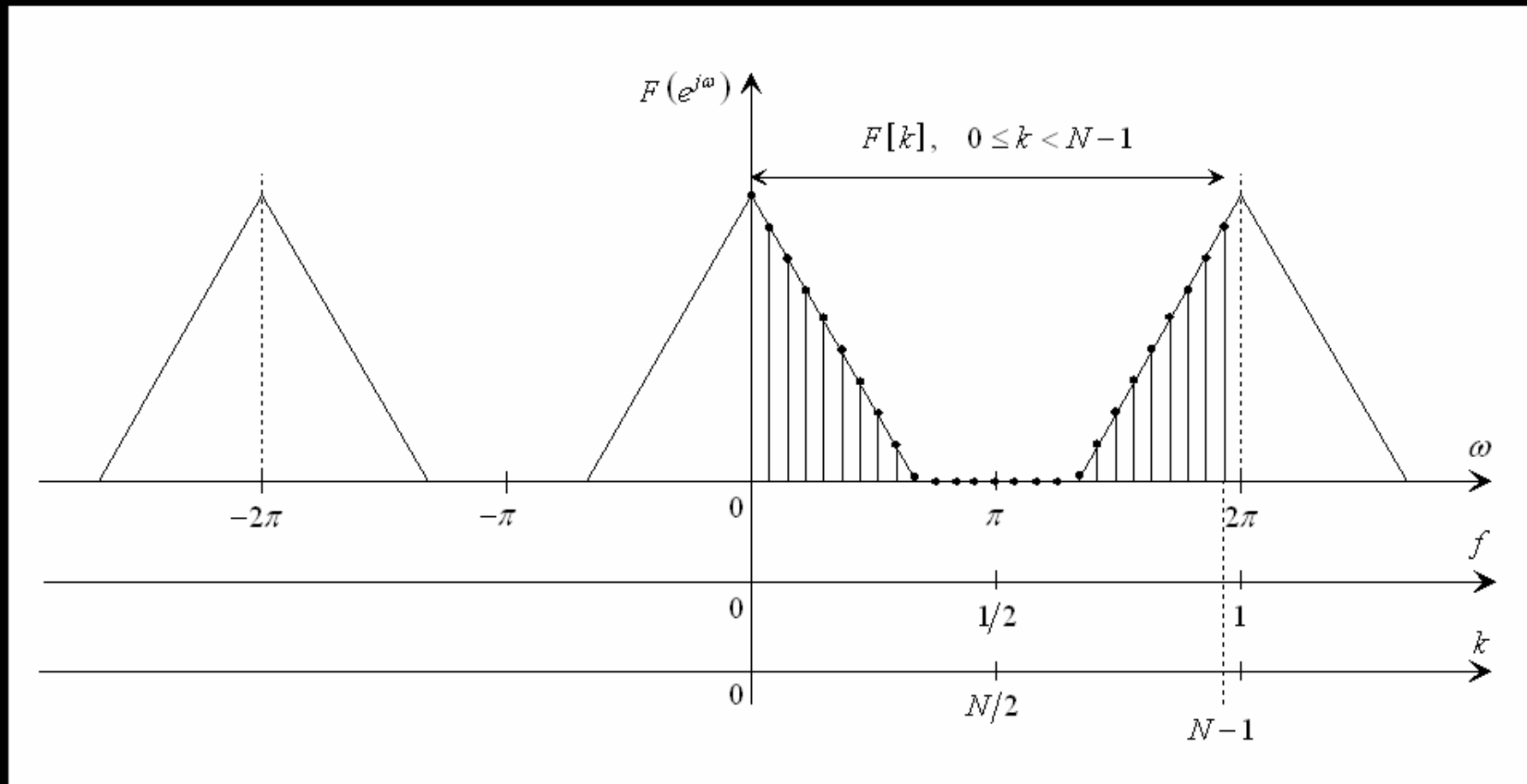
• Ejemplo: la Transformada Discreta de Fourier (DFT)

- Dada una señal discreta de duración finita: $f[n] / f[n] = 0, \quad n < 0, n > N - 1$
- Transformada de Fourier de Tiempo Discreto (DTFT): representación espectral exacta, *continua* y periódica de la señal discreta:

$$f[n] \xrightarrow{DTFT} F(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f[n] \cdot e^{-j\omega n}$$

- La Transformada Discreta de Fourier (DFT) es una aproximación discreta a la DTFT. Por ser una transformada discreta tiene el mismo número de valores que la señal de partida. Puede interpretarse como N muestras equiespaciadas de la DTFT de $f[n]$:

$$f[n] \xrightarrow{DFT} F[k] = F(e^{j\omega}) \Big|_{\omega=2k\pi/N} = \sum_{n=0}^{N-1} f[n] \cdot e^{-j\frac{2k\pi}{N}n}, \quad 0 \leq k \leq N-1$$



- *Coincide, salvo por un factor de escala, con el Desarrollo en Serie de Fourier (DTFS) de una señal periódica cuyo periodo coincida con $f[n]$:*

$$\tilde{f}[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f[n - kN] \xrightarrow{FS} F[k] = \frac{1}{N} \sum_{\langle N \rangle} \tilde{f}[n] \cdot e^{-j\frac{2k\pi}{N}n} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f[n] \cdot e^{-j\frac{2k\pi}{N}n}$$

- *Para que la matriz de transformación sea unitaria y de determinante unidad, la DFT suele definirse*

$$\left. \begin{aligned} F[k] &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} f[n] \cdot e^{-j\frac{2k\pi}{N}n} \\ f[n] &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} F[k] \cdot e^{j\frac{2k\pi}{N}n} \end{aligned} \right\} \Rightarrow w[n, k] = \mathbf{W}(n, k) = \frac{1}{\sqrt{N}} \cdot e^{j\frac{2k\pi}{N}n}$$

Núcleo de la transformación inversa

$$\mathbf{W} = \frac{1}{\sqrt{N}} \cdot \begin{bmatrix} e^{j\frac{2\cdot 0\pi}{N} \cdot 0} & \dots & e^{j\frac{2k\pi}{N} \cdot 0} & \dots & e^{j\frac{2(N-1)\pi}{N} \cdot 0} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ e^{j\frac{2\cdot 0\pi}{N} \cdot n} & \dots & e^{j\frac{2k\pi}{N} \cdot n} & \dots & e^{j\frac{2(N-1)\pi}{N} \cdot n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ e^{j\frac{2\cdot 0\pi}{N} \cdot (N-1)} & \dots & e^{j\frac{2k\pi}{N} \cdot (N-1)} & \dots & e^{j\frac{2(N-1)\pi}{N} \cdot (N-1)} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{W}_0[n] \quad \dots \quad \mathbf{W}_k[n] \quad \dots \quad \mathbf{W}_{(N-1)}[n]$$

Bajas frecuencias

Altas frecuencias

Bajas frecuencias

$$\mathbf{W}_0[n]$$

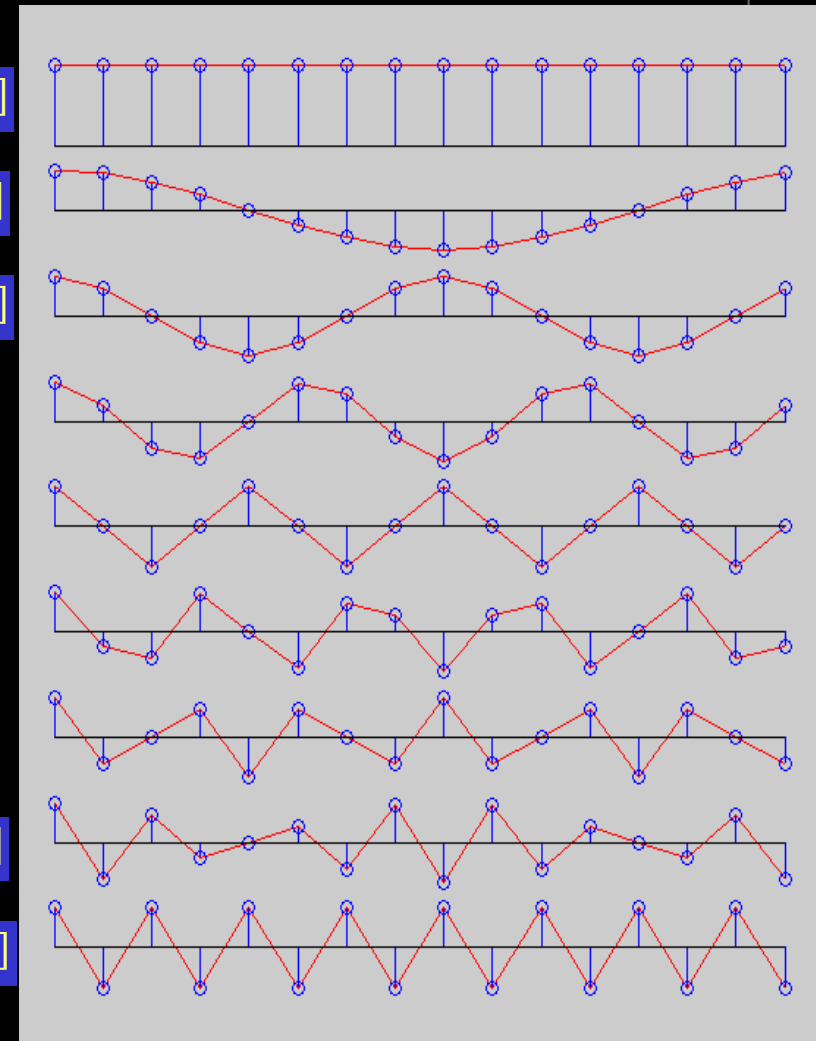
$$\mathbf{W}_1[n]$$

$$\mathbf{W}_2[n]$$

$$\mathbf{W}_7[n]$$

$$\mathbf{W}_8[n] = \mathbf{W}_{N/2}[n]$$

Vectores de la nueva base (N=16) – parte real



$$\Psi[u, v] = \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{M-1} \psi[m, n] \cdot w'[u, v, m, n]$$

$$\psi[m, n] = \sum_{u=0}^{N-1} \sum_{v=0}^{M-1} \Psi[u, v] \cdot w[m, n, u, v]$$

✿ Separabilidad:

- Los núcleos de la transformación se pueden separar en un producto externo de matrices:

$$w'[u, v, m, n] = w'_1[u, m] \otimes w'_2[v, n] = \mathbf{W}'_1 \otimes \mathbf{W}'_2$$

$$w[m, n, u, v] = w_1[m, u] \otimes w_2[n, v] = \mathbf{W}_1 \otimes \mathbf{W}_2$$

- Permite calcular la transformada en dos pasos, reduciendo operaciones de N^4 a $2N^3$

$$\left. \begin{aligned} \Psi_{aux}[u, n] &= \sum_{m=0}^{N-1} \psi[m, n] \cdot w'_1[u, m], \quad \forall u \Rightarrow \Psi_{aux} = \mathbf{W}'_1 \cdot \psi \\ \Psi[u, v] &= \sum_{n=0}^{M-1} \Psi_{aux}[u, n] \cdot w'_2[v, n], \quad \forall v \Rightarrow \Psi = \Psi_{aux} \cdot \mathbf{W}'_2{}^T \end{aligned} \right\} \Rightarrow \Psi = \mathbf{W}'_1 \cdot \psi \cdot \mathbf{W}'_2{}^T$$

- Normalmente se escogen transformadas en las que se verifica $\mathbf{W}'_1 = \mathbf{W}'_2 = \mathbf{W}'$, por lo que la expresión matricial de las transformadas directa e inversa resulta (para imágenes cuadradas de $N \times N$):

$$\left. \begin{aligned} \Psi &= \mathbf{W}' \cdot \psi \cdot \mathbf{W}'^T \\ \psi &= \mathbf{W} \cdot \Psi \cdot \mathbf{W}^T \end{aligned} \right\} \Rightarrow \mathbf{W}' = \mathbf{W}^{-1}$$

Imágenes base:

- Si además el núcleo de la transformación es un conjunto completo de imágenes base ortonormales, entonces se verifica que las matrices en que se separa son unitarias. Por lo tanto:

$$\mathbf{W}' = \mathbf{W}^{-1} = \mathbf{W}^{*T} \Rightarrow \begin{cases} \Psi = \mathbf{W}^{*T} \cdot \psi \cdot \mathbf{W}^* \\ \psi = \mathbf{W} \cdot \Psi \cdot \mathbf{W}^T \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Psi = \mathbf{W}_M^{*T} \cdot \psi \cdot \mathbf{W}_N^* \\ \psi = \mathbf{W}_M \cdot \Psi \cdot \mathbf{W}_N^T \end{cases}$$

- Al ser \mathbf{W} una matriz unitaria, sus columnas son vectores ortonormales entre sí. Sea el conjunto de $N \times N$ matrices generado por el producto externo de los vectores columna de la matriz unitaria:

$$\mathbf{B}_{u,v} = \mathbf{W}_u [n] \otimes \mathbf{W}_v^T [n]$$

- Definiendo el producto interno de dos matrices como:

$$\langle \mathbf{F}, \mathbf{G} \rangle = \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} f[m,n] \cdot g^*[m,n]$$

- , podemos escribir las transformadas inversa y directa según:

$$\psi[m,n] = \sum_{u=0}^{N-1} \sum_{v=0}^{N-1} \Psi[u,v] \cdot w[m,n,u,v] \Rightarrow \psi = \sum_{u=0}^{N-1} \sum_{v=0}^{N-1} \Psi[u,v] \cdot \mathbf{B}_{u,v}$$

$$\Psi[u,v] = \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{M-1} \psi[m,n] \cdot w'[u,v,m,n] \Rightarrow \Psi[u,v] = \langle \psi, \mathbf{B}_{u,v} \rangle$$

- En conclusión, cada coeficiente de la transformada resulta del producto interno (escalar) o proyección de la imagen original con cada una de las imágenes base.

Definición:

- El núcleo viene dado por la matriz unitaria compleja y simétrica:

$$\mathbf{W}(n, u) = \mathbf{W}(m, v) = \frac{1}{\sqrt{N}} \cdot e^{j \frac{2u\pi}{N} n}, \quad \mathbf{W} = \mathbf{W}^T, \quad \mathbf{W}^{-1} = \mathbf{W}^{*T} = \mathbf{W}^*$$

- Por lo tanto, las expresiones de la transformada resultan:

$$\Psi = \mathbf{W}^* \cdot \psi \cdot \mathbf{W}^*$$

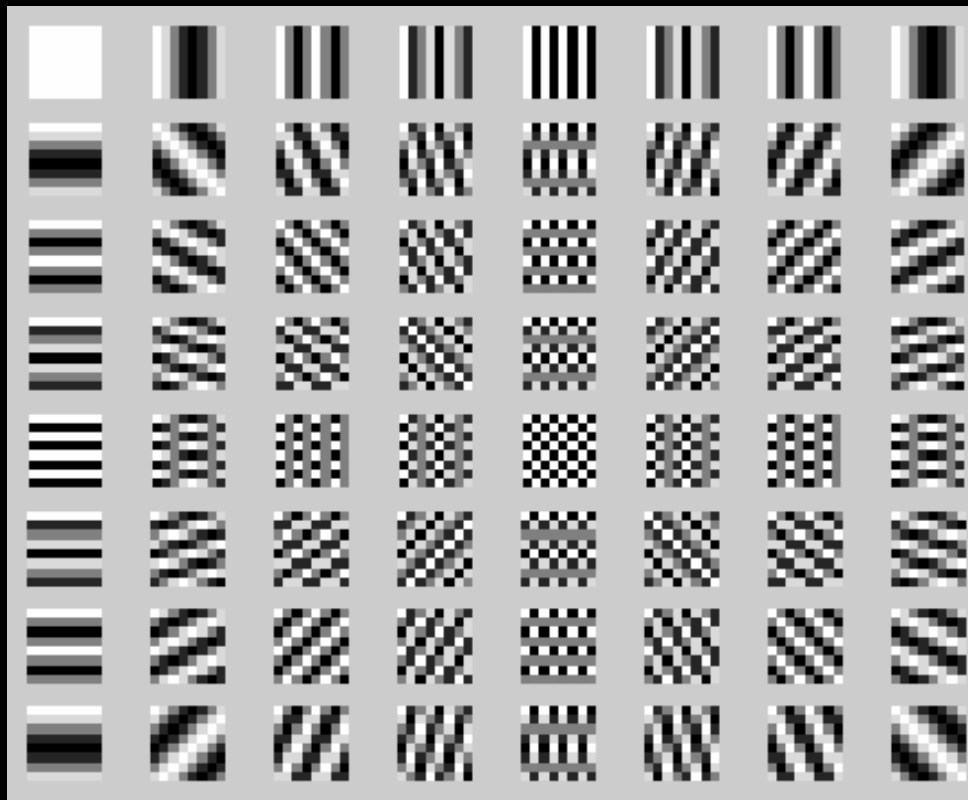
$$\psi = \mathbf{W} \cdot \Psi \cdot \mathbf{W}$$

Interpretación y cálculo

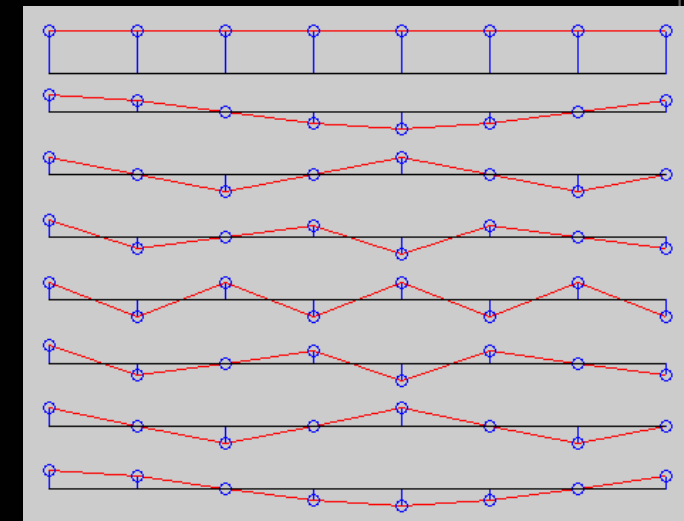
- Vectores base e imágenes base de la transformación
- Relación con la DSFT: $N \times N$ muestras equiespaciadas
- Ejemplos de cálculo

- Vectores base e imágenes base de la transformación

Imágenes base (N=8) : parte real

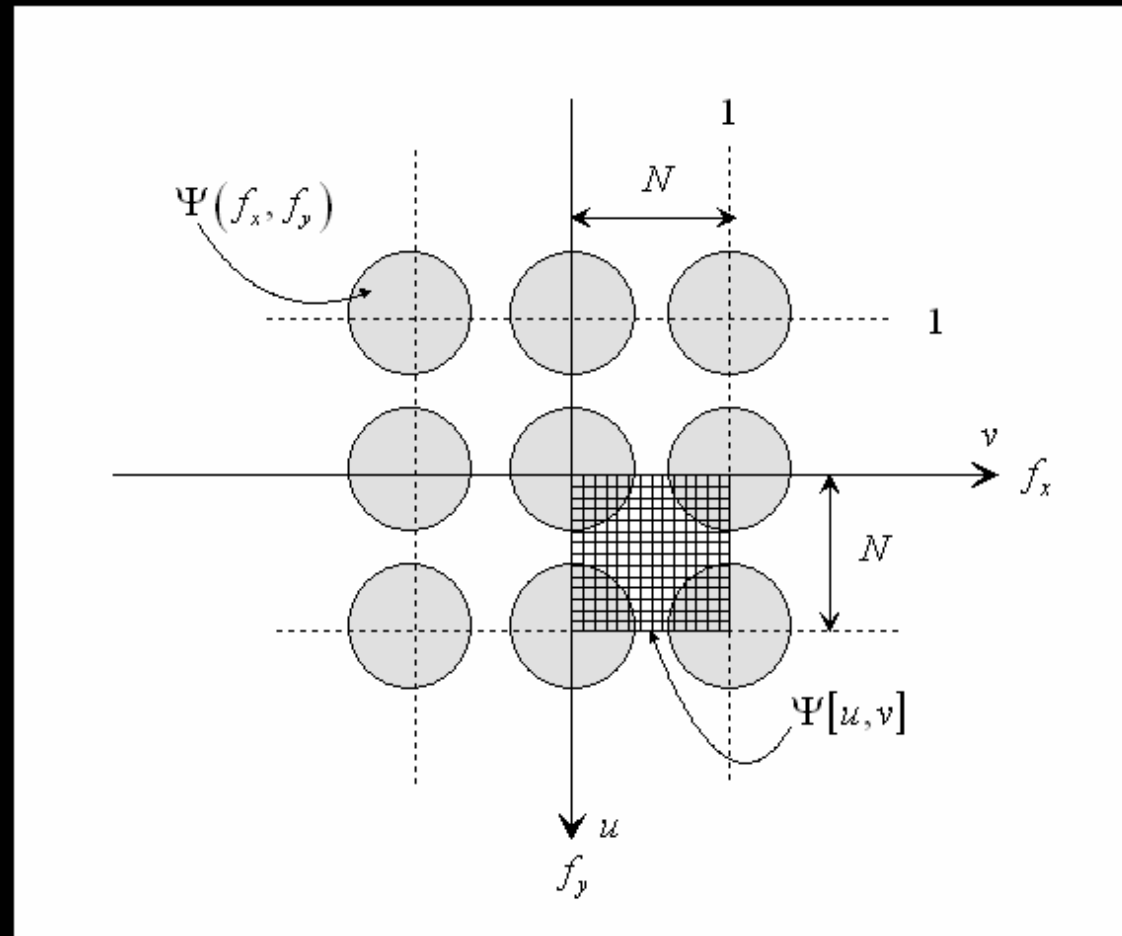


Vectores base (N=8) – parte real



Transformadas discretas lineales: Transformada discreta de Fourier (DFT)

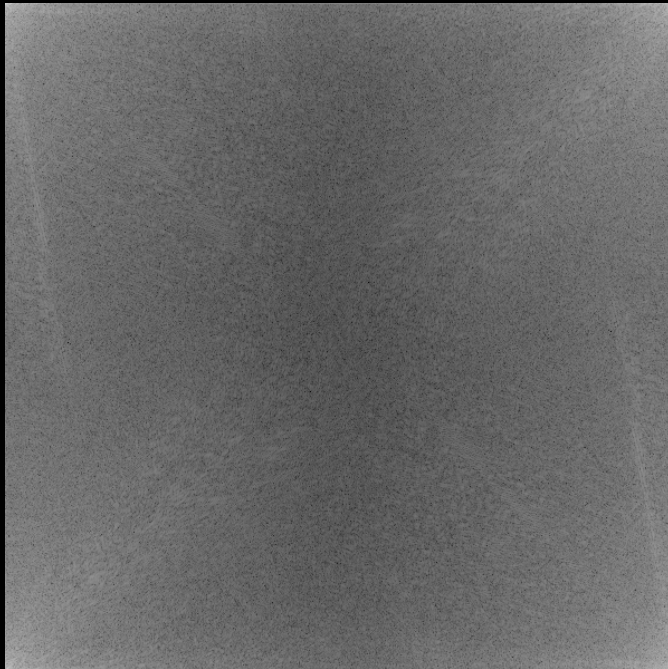
- Relación con la DSFT: $n \times n$ muestras equiespaciadas



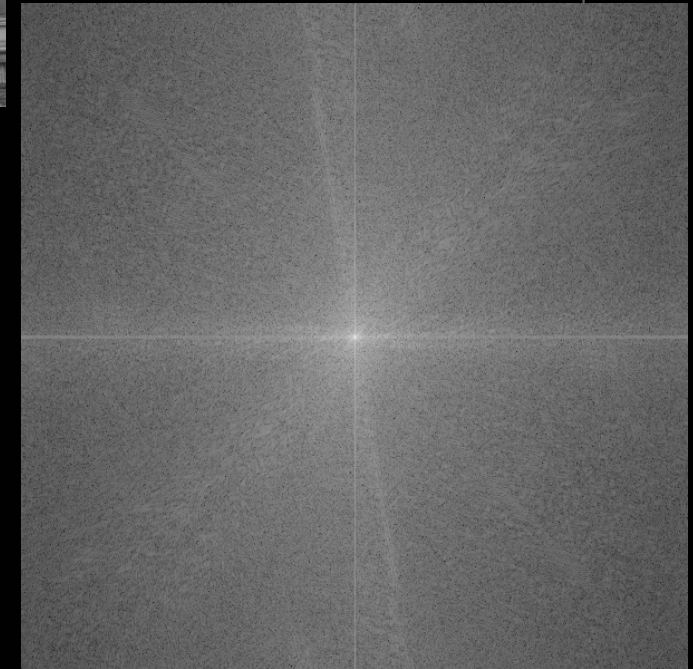
- Ejemplos de cálculo



DFT - módulo



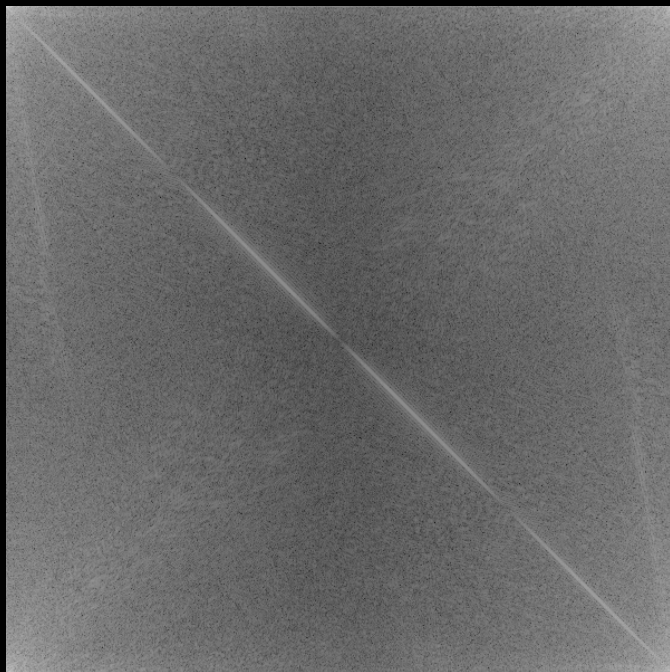
DFT centrada – módulo



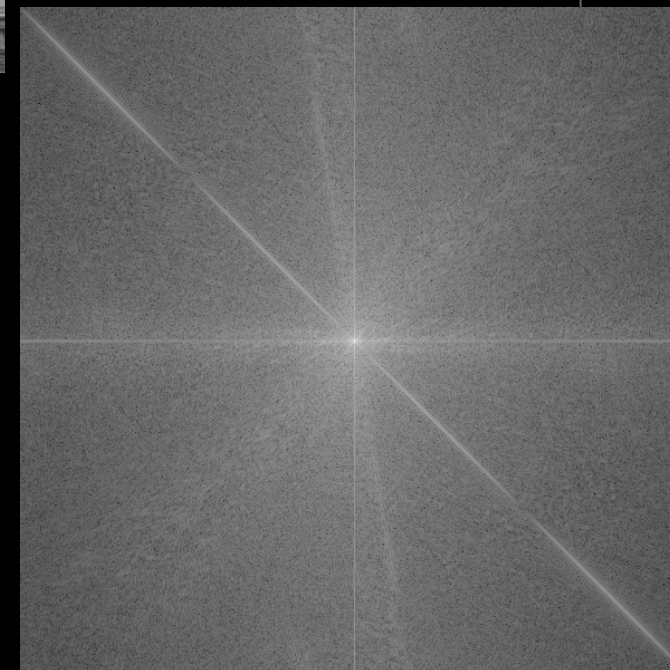
- Ejemplos de cálculo



DFT - módulo



DFT centrada - módulo



✿ Propiedades y aplicaciones

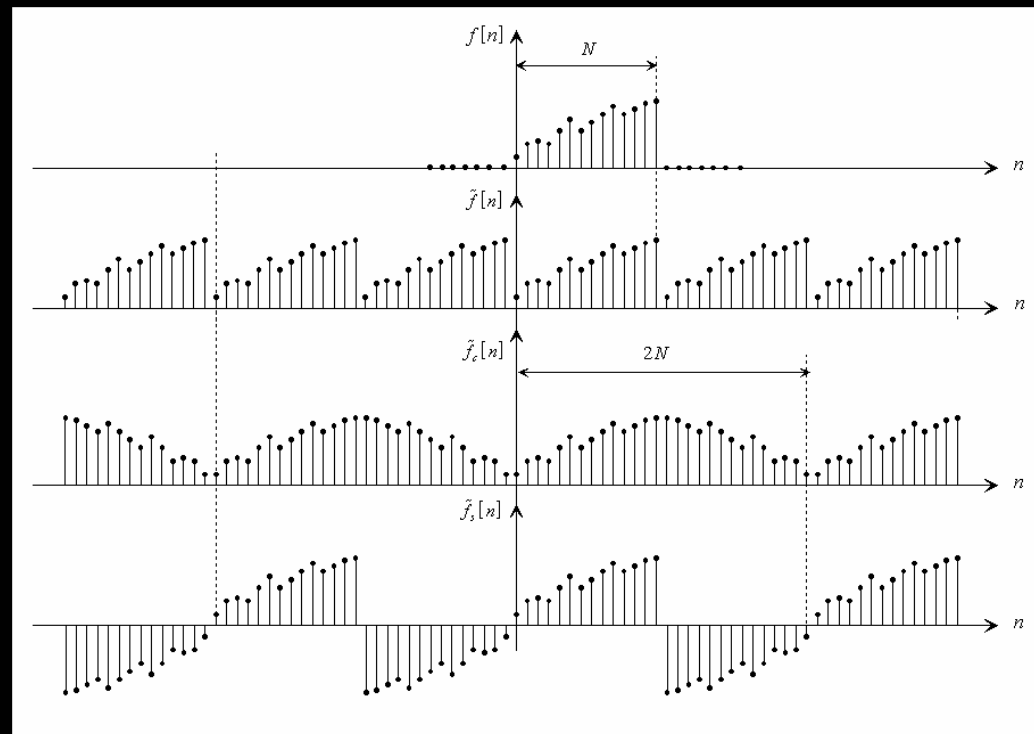
- *Es una transformada rápida (FFT).*
- *Aprovechamiento de la propiedad de convolución circular para realizar filtrados en frecuencia.*
- *Análisis de características de imágenes y secuencias de vídeo.*

Definición:

- Es el DSF de la extensión par y periódica de una señal de duración finita, lo que resulta en una serie de términos reales de frecuencia creciente en forma 'cos':

$$f_c[n] = f[n] + f[-n-1], \quad \tilde{f}_c[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_c[n-2kN]$$

$$\tilde{f}_c[n] \xrightarrow{FS} F_c[k] = \frac{1}{N} \sum_{\langle 2N \rangle} \tilde{f}_c[n] \cdot e^{-j\frac{2k\pi}{N}n}, \quad 0 \leq k \leq 2N-1$$



- Operando sobre esta expresión se llega a:

$$f[n] \xrightarrow{DCT} F[k] = c[k] \cdot \sum_{n=0}^{N-1} f[n] \cdot \cos \frac{(2n+1)k \cdot \pi}{2N}, \quad 0 \leq k \leq N-1$$

- , donde $c[0] = \sqrt{\frac{1}{N}}, c[k] = \sqrt{\frac{2}{N}}$

- El núcleo de la transformación viene dado por la matriz unitaria real (no simétrica):

$$\mathbf{W}(n, u) = \mathbf{W}(m, v) = \begin{cases} \sqrt{\frac{1}{N}} & , u = 0, 0 \leq n \leq N-1 \\ \sqrt{\frac{2}{N}} \cos \frac{(2n+1)u \cdot \pi}{2N} & , 1 \leq u \leq N-1, 0 \leq n \leq N-1 \end{cases}$$

$$\mathbf{W} = \mathbf{W}^*, \quad \mathbf{W}^{-1} = \mathbf{W}^{*T} = \mathbf{W}^T$$

- Por lo tanto, las expresiones de las transformadas resultan:

$$\Psi = \mathbf{W}^T \cdot \psi \cdot \mathbf{W}$$

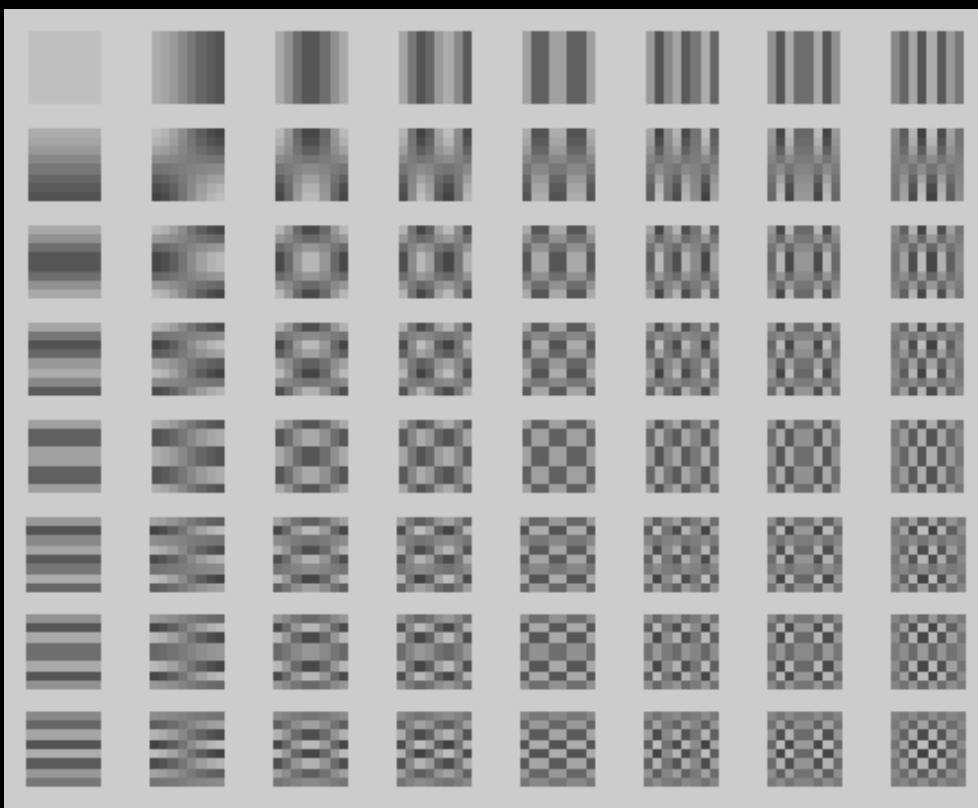
$$\psi = \mathbf{W} \cdot \Psi \cdot \mathbf{W}^T$$

✿ Interpretación y cálculo

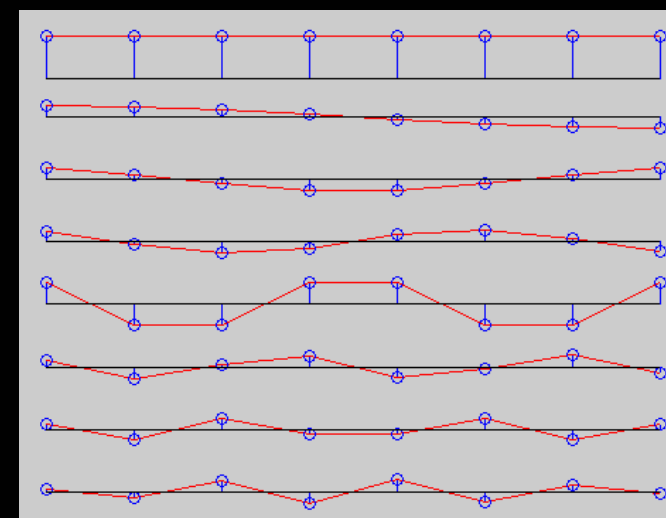
- *Vectores base e imágenes base de la transformación*
- *Relación con la DSFT: $N \times N$ muestras equiespaciadas de las frecuencias positivas de la DTFT*
- *Ejemplos de cálculo*

- Vectores base e imágenes base de la transformación

Imágenes base (N=8)



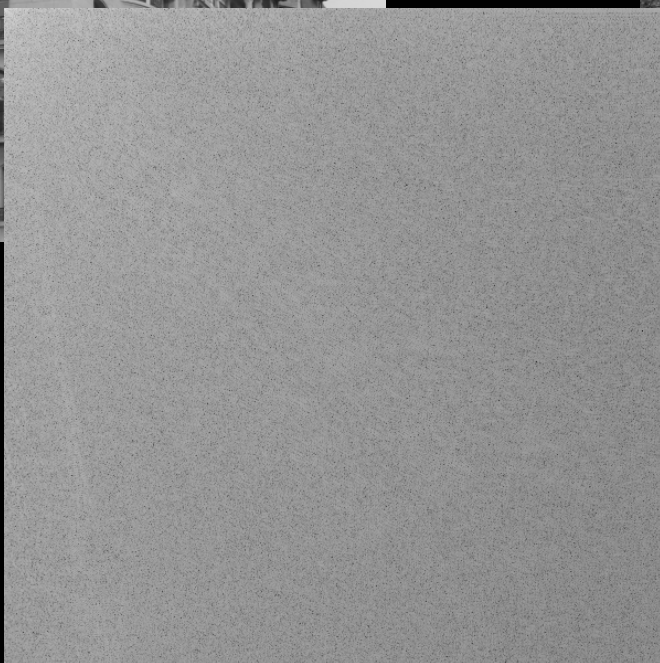
Vectores base (N=8)



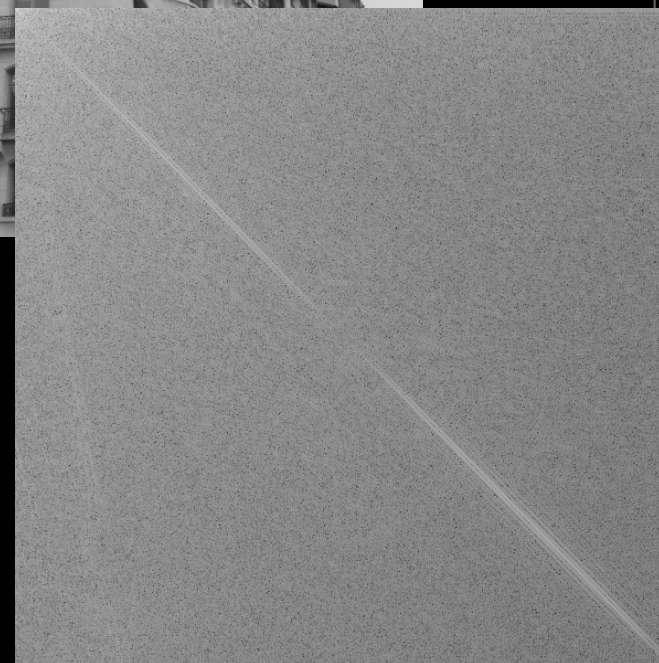
- Ejemplos de cálculo



DCT

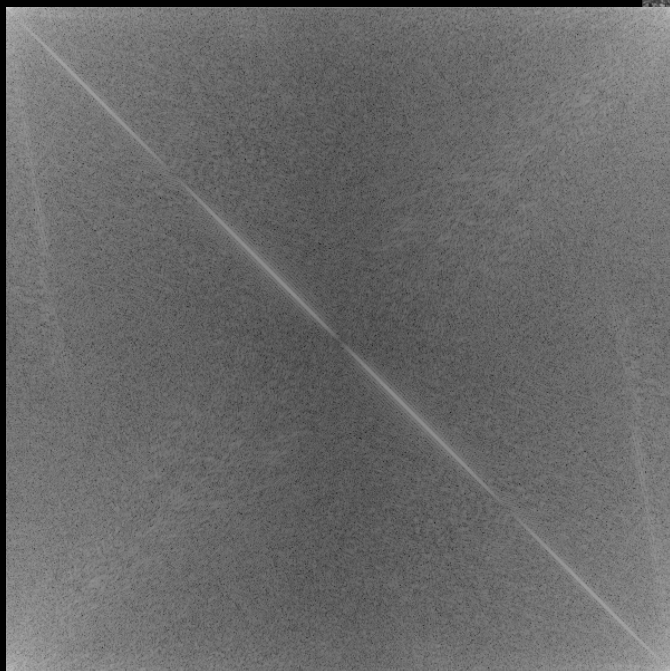


DCT

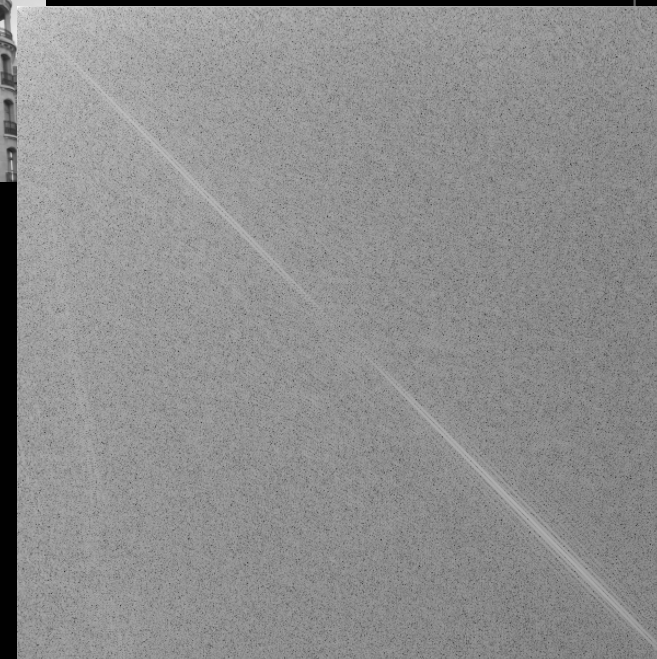


- DFT vs. DCT

DFT - módulo



DCT



• Propiedades y aplicaciones

- *Eliminación de las altas frecuencias ficticias generadas por la DFT*
- *Transformada rápida, calculable con una FFT*
- *Alta compactación: cuasi-óptima para procesos muy correlacionados ($\rho \approx 1$)*
- *Codificación por bloques en JPEG y MPEG.*

Definición:

- Es el DSF de la extensión impar y periódica de una señal de duración finita, lo que resulta en una serie de términos reales de frecuencia creciente en forma 'sin':

- Su desarrollo es idéntico al de la DCT pero partiendo de: $f_s[n] = f[n] - f[-n-1]$

- El resultado es un núcleo que queda definido por la matriz real, unitaria y simétrica:

$$\mathbf{W}(n, u) = \mathbf{W}(m, v) = \sqrt{\frac{2}{N+1}} \sin \frac{(n+1)(u+1) \cdot \pi}{N+1}, \quad 0 \leq n, u \leq N-1$$

$$\mathbf{W} = \mathbf{W}^* = \mathbf{W}^T, \quad \mathbf{W}^{-1} = \mathbf{W}^{*T} = \mathbf{W}$$

- Por lo tanto, las expresiones de las transformada resultan: $\Psi = \mathbf{W} \cdot \psi \cdot \mathbf{W}$

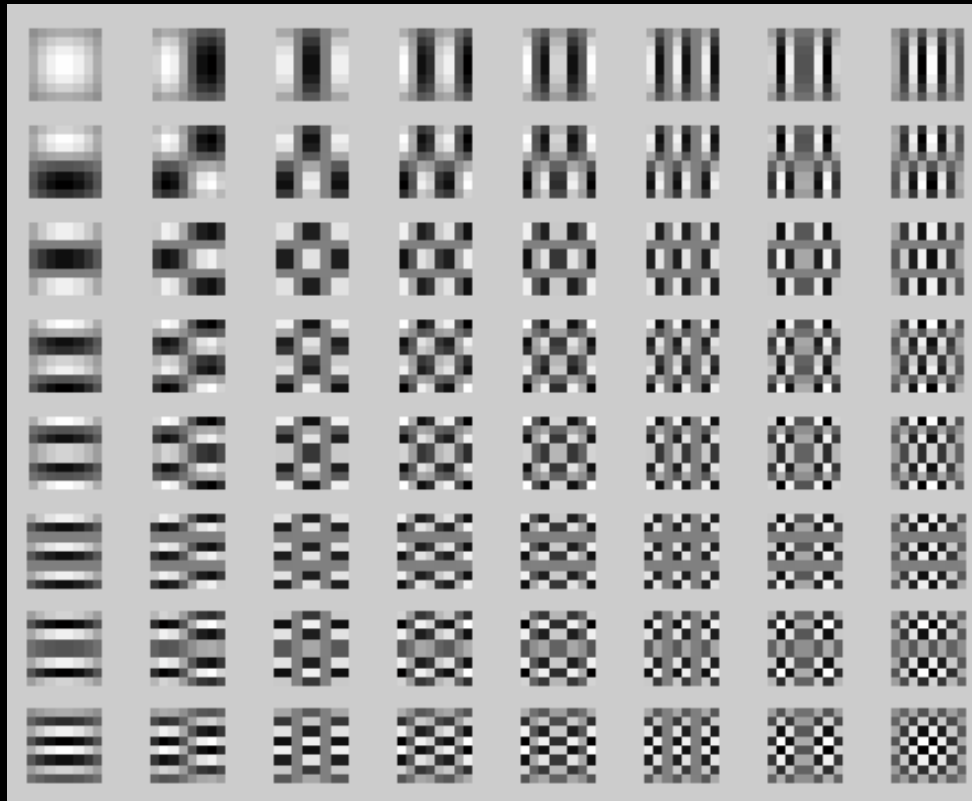
$$\psi = \mathbf{W} \cdot \Psi \cdot \mathbf{W}$$

• Interpretación y cálculo

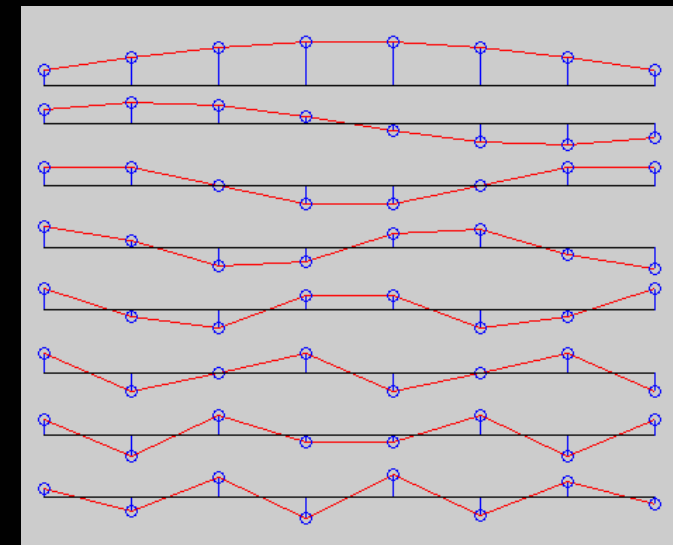
- *Vectores base e imágenes base de la transformación*
- *Ejemplos de cálculo*

- Vectores base e imágenes base de la transformación

Imágenes base (N=8)



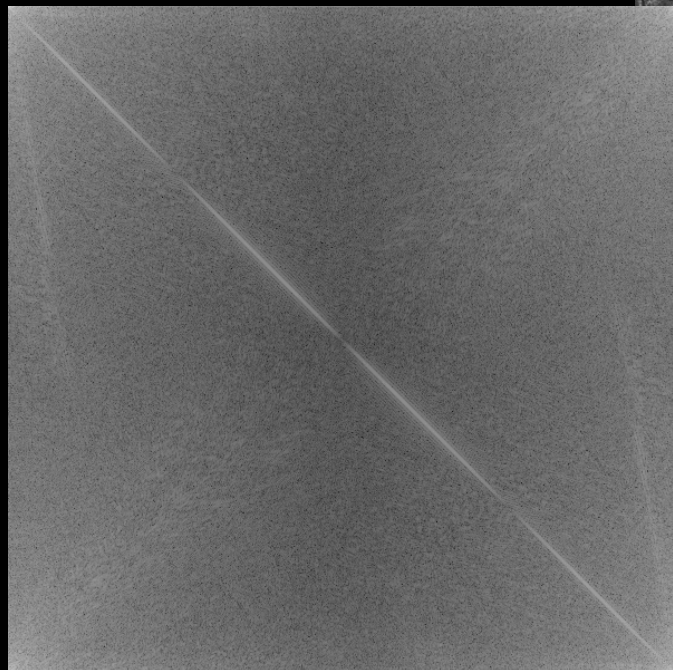
Vectores base (N=8) – parte imaginaria



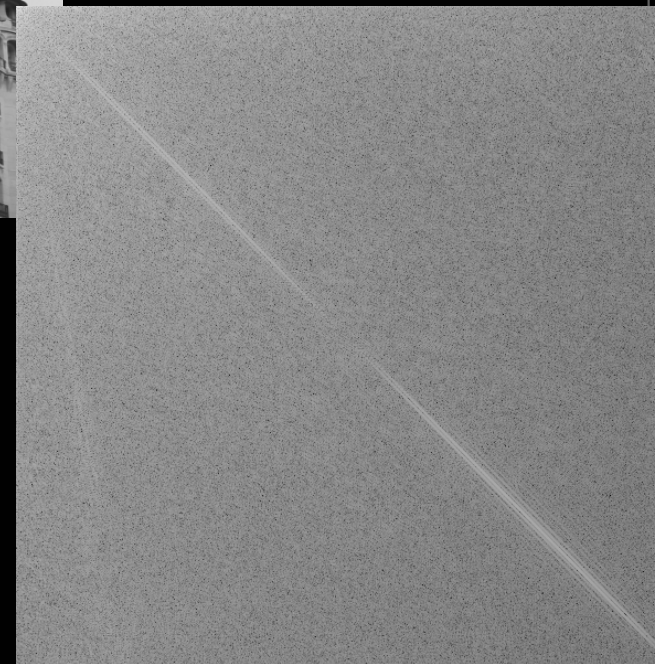
- Ejemplos de cálculo



DFT - módulo



DST - parte imaginaria



• Propiedades y aplicaciones

- *Transformada rápida, más que una FFT*
- *Alta compactación: cuasi-óptima para procesos correlacionados ($\rho < 0.5$)*
- *Vía rápida para calcular la transformada óptima KL.*

Definición:

- Basadas en las funciones de Haar, familias de N funciones (orden N) continuas distintas:

$$h_k(x), \quad k \in \{0, \dots, N-1\}, \quad N = 2^n$$

- La definición de la función k -ésima se basa en la definición intermedia de dos índices, p y q , asociados a cada k , que toman N valores según el criterio (en notación MatLab):
 - $p = [\text{zeros}(1,2) \text{ ones}(1,2^1) 2^* \text{ones}(1,2^2) \dots (n-1)^* \text{ones}(1,2^{(n-1)})]$
 - $q = [0 \ 1 \ 1:2^1 \ 1:2^2 \ \dots \ 1:2^{(n-1)}]$
 - $k = [0:N-1]$

, que para $n=4$ resulta:

- $p = [0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 2 \ 2 \ 2 \ 2 \ 3 \ 3 \ 3 \ 3 \ 3 \ 3 \ 3 \ 3]$
- $q = [0 \ 1 \ 1 \ 2 \ 1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6 \ 7 \ 8]$
- $k = [0 \ 1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6 \ 7 \ 8 \ 9 \ 10 \ 11 \ 12 \ 13 \ 4 \ 15]$

- *A partir de estos índices, las k funciones se definen según la expresión:*

$$h_k(x) = h_{pq}(x) = \begin{cases} \frac{2^{p/2}}{\sqrt{N}} & , \frac{q-1}{2^p} \leq x < \frac{q-0.5}{2^p} \\ \frac{-2^{p/2}}{\sqrt{N}} & \frac{q-0.5}{2^p} \leq x < \frac{q}{2^p} \\ 0 & \text{resto} \end{cases}, \quad x \in [0,1]$$

- *Los vectores de una transformada de Haar de $N \times N$ son N muestras equiespaciadas de las N funciones de una familia de funciones de Haar de orden N .*
- *La matriz resultante es real y ortogonal; por lo tanto:*

$$\mathbf{W} = \mathbf{W}^*, \quad \mathbf{W}^{-1} = \mathbf{W}^{*T} = \mathbf{W}^T \Rightarrow \begin{cases} \Psi = \mathbf{W}^T \cdot \psi \cdot \mathbf{W}^T \\ \psi = \mathbf{W} \cdot \Psi \cdot \mathbf{W} \end{cases}$$

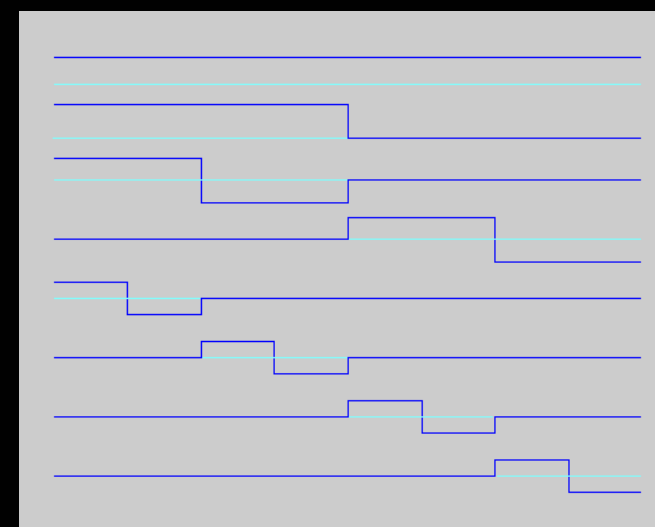
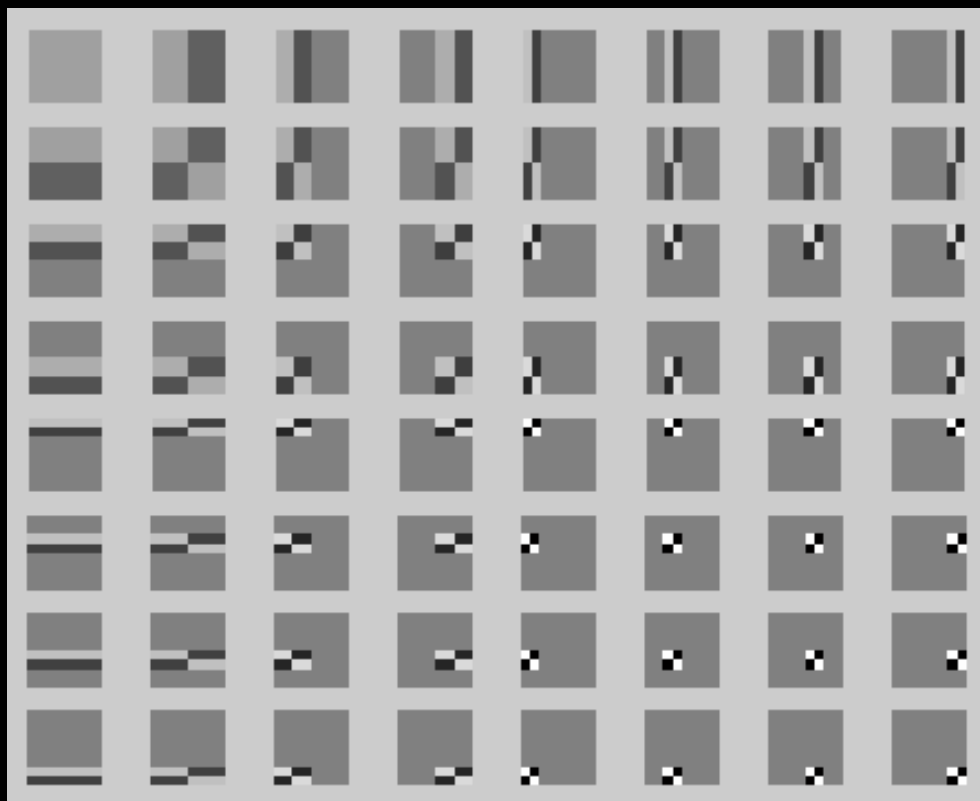
• Interpretación y cálculo

- *Vectores base e imágenes base de la transformación*
- *Ejemplos de cálculo*

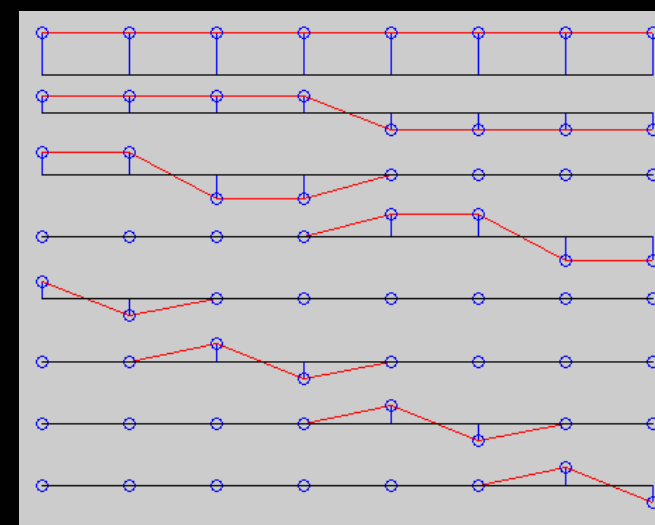
- Vectores base e imágenes base de la transformación

Funciones de Haar (N=8)

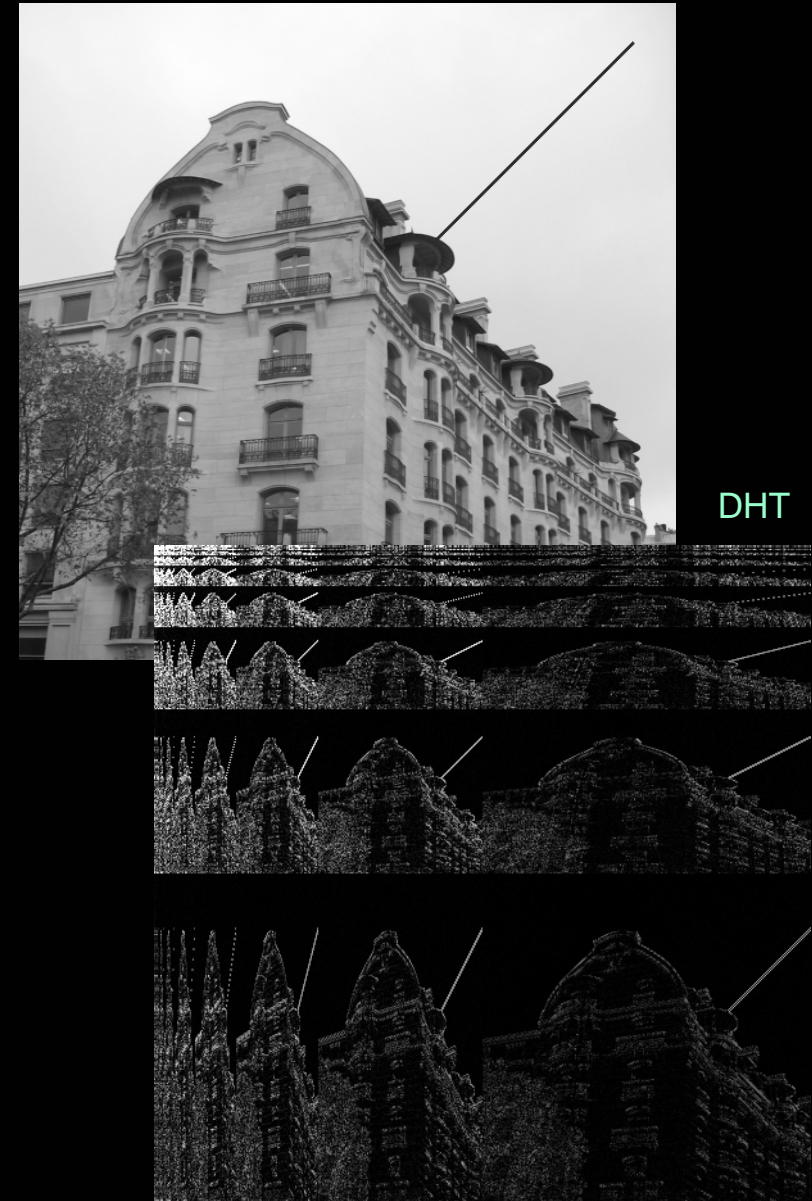
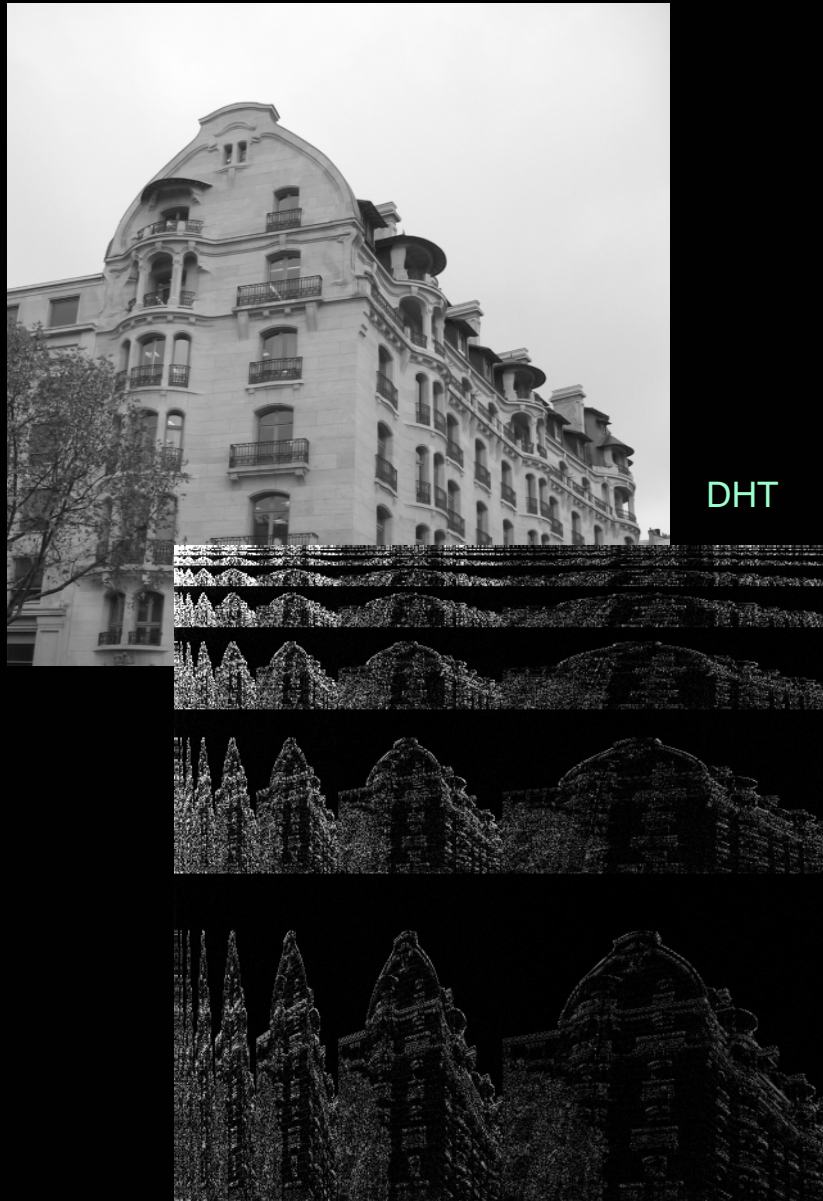
Imágenes base (N=8)



Vectores base (N=8)



Transformadas discretas lineales: Transformada discreta de Haar (DHT)



✿ Propiedades y aplicaciones

- *Transformada muy rápida: $O(N)$*
- *No compacta energía tanto como las anteriores.*
- *Codificación escalable.*

✿ Introducción

✿ Transformadas discretas lineales

- Introducción
- Transformadas unidimensionales
- Transformadas bidimensionales
- Transformada discreta de Fourier (DFT)
- Transformada discreta del coseno (DCT)
- Transformada discreta del seno (DST)
- Transformada discreta de Haar (DHT)

✿ Transformadas morfológicas

- Transformada de Hough (Tema 6)

Estas transparencias están editadas a partir de las generadas por el profesor

Jesús Bescós Cano durante sus años de impartición de esta asignatura.