

# Temas Avanzados en Procesado de Señales

## *Tratamiento Digital de Señales Visuales*

### Tema 5: Operadores Globales

...transformadas lineales, transformadas morfológicas...

José María Martínez Sánchez



Escuela Politécnica Superior



Universidad Autónoma de Madrid  
E28049 Madrid (SPAIN)



Video Processing and Understanding Lab  
Grupo de Tratamiento e Interpretación de Vídeo



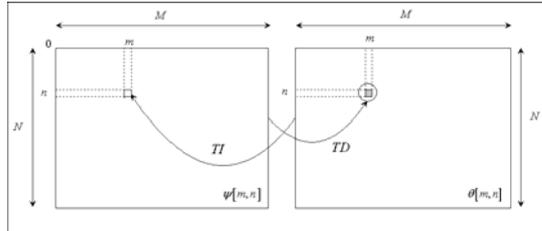
## Índice



- Introducción
- Transformadas discretas lineales
- Transformadas morfológicas

Los operadores globales efectúan una transformación de tipo:

$$\psi[m, n] \xrightleftharpoons[TI]{TD} \Psi[u, v], \quad m, u \in \{0, \dots, M-1\}, \quad n, v \in \{0, \dots, N-1\}$$



Tipos:

- *Fourier, seno, coseno, etc (directa e inversa): A, R, F, C*
- *Karhunen-Loewe (directa e inversa): C*
- *Hadamard, Haar, Slant (directa e inversa)*
- *Hough (directa): A*

- **Introducción**
- **Transformadas discretas lineales**
  - Introducción
  - Transformadas unidimensionales
  - Transformadas bidimensionales
  - Transformada discreta de Fourier (DFT)
  - Transformada discreta del coseno (DCT)
  - Transformada discreta del seno (DST)
  - Transformada discreta de Haar (DHT)
- **Transformadas morfológicas**

En el caso de las transformadas discretas lineales:

- Relación entre imagen natural e imagen transformada:

$$\Psi[u, v] = \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{M-1} \psi[m, n] \cdot w'[u, v, m, n]$$

$$\psi[m, n] = \sum_{u=0}^{N-1} \sum_{v=0}^{M-1} \Psi[u, v] \cdot w[m, n, u, v]$$

- Los conjuntos de valores  $w'[m, n, u, v]$  y  $w[u, v, m, n]$  son los núcleos de las transformaciones directa e inversa.
- Expresión de la señal original como combinación lineal de funciones de igual dimensión (cambio de base), que representan componentes espectrales (filtrado (F)) u otras características (análisis (A), restauración (R)), o buscan compactar la energía de la señal (codificación (C)).

Transformación discreta lineal:

$$f[n] \xleftrightarrow[\mathcal{H}]{\mathcal{H}^{-1}} F[k], \quad n, k \in \{0, \dots, N-1\}$$

$$F[k] = \sum_{n=0}^{N-1} f[n] \cdot w'[k, n] = \sum_{n=0}^{N-1} w'[k, n] \cdot f[n]$$

$$f[n] = \sum_{k=0}^{N-1} F[k] \cdot w[n, k] = \sum_{k=0}^{N-1} w[n, k] \cdot F[k]$$

Representación matricial:

- Definiendo las matrices:

$$\mathbf{W}' = \begin{bmatrix} w'[0,0] & \dots & w'[0, N-1] \\ \dots & w'[k, n] & \dots \\ w'[N-1,0] & \dots & w'[N-1, N-1] \end{bmatrix} \quad \mathbf{f} = [f[0], \dots, f[N-1]]^T$$

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} w[0,0] & \dots & w[0, N-1] \\ \dots & w[n, k] & \dots \\ w[N-1,0] & \dots & w[N-1, N-1] \end{bmatrix} \quad \mathbf{F} = [F[0], \dots, F[N-1]]^T$$

- Las transformadas pueden escribirse:

$$\begin{cases} \mathbf{F} = \mathbf{W}^T \cdot \mathbf{f} \\ \mathbf{f} = \mathbf{W} \cdot \mathbf{F} \end{cases} \Rightarrow \mathbf{f} = \mathbf{W} \cdot \mathbf{W}^T \cdot \mathbf{f} \Rightarrow \mathbf{W} \cdot \mathbf{W}^T = \mathbf{I} \Rightarrow \mathbf{W}^T = \mathbf{W}^{-1}$$

- , por lo que basta con conocer el núcleo de la transformación inversa,  $\mathbf{W}$ .

- Observando ahora la ecuación de síntesis en su versión inicial, es posible escribir:

$$f[n] = \sum_{k=0}^{N-1} F[k] \cdot w[n,k] = \sum_{k=0}^{N-1} F[k] \cdot \mathbf{W}_k[n]$$

columna k de la matriz  $\mathbf{W}$

- , es decir,  $\mathbf{W}_k[n]$  son los vectores base de la transformación.

- Habitualmente los vectores son ortonormales, por lo que forman un conjunto completo de vectores base del espacio N-dimensional,  $\mathbb{C}^N$ . En consecuencia, el núcleo o matriz que define la transformación suele ser una matriz unitaria:

$$\mathbf{W} \cdot \mathbf{W}^T = \mathbf{W}^T \cdot \mathbf{W} = \mathbf{I} \Rightarrow \mathbf{W}^{-1} = \mathbf{W}^T$$

- , y de determinante unidad:  $|\det(\mathbf{W})| = 1$

- En este caso, es inmediato demostrar que la transformación es una isometría o automorfismo isométrico, es decir, que mantiene la longitud euclídea de los vectores (o, en otras palabras, es una rotación en  $\mathbb{C}^N$ , mantiene la energía o información de las señales que representan los vectores):

$$\begin{aligned} |\mathbf{f}|^2 &= \sum_{n=0}^{N-1} |f[n]|^2 = \sum_{n=0}^{N-1} \left| \sum_{k=0}^{N-1} F[k] \cdot \mathbf{W}_k[n] \right|^2 = \sum_{n=0}^{N-1} \left[ \sum_{k=0}^{N-1} |\mathbf{W}_k[n]|^2 \left| \sum_{k=0}^{N-1} F[k] \right|^2 \right] = \\ &= \left[ \sum_{k=0}^{N-1} |F[k]|^2 \right] \sum_{n=0}^{N-1} |\mathbf{W}_k[n]|^2 = \sum_{k=0}^{N-1} |F[k]|^2 = |\mathbf{F}|^2 \end{aligned}$$

, o matricialmente:

$$|\mathbf{f}|^2 = \mathbf{f}^T \cdot \mathbf{f} = (\mathbf{W} \cdot \mathbf{F})^T \cdot (\mathbf{W} \cdot \mathbf{F}) = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{W}^T \cdot \mathbf{W} \cdot \mathbf{F} = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{I} \cdot \mathbf{F} = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} = |\mathbf{F}|^2$$

### ✿Separabilidad:

- Si el núcleo de la transformación es una matriz separable, el número de operaciones necesario para llevarla a cabo se puede reducir.

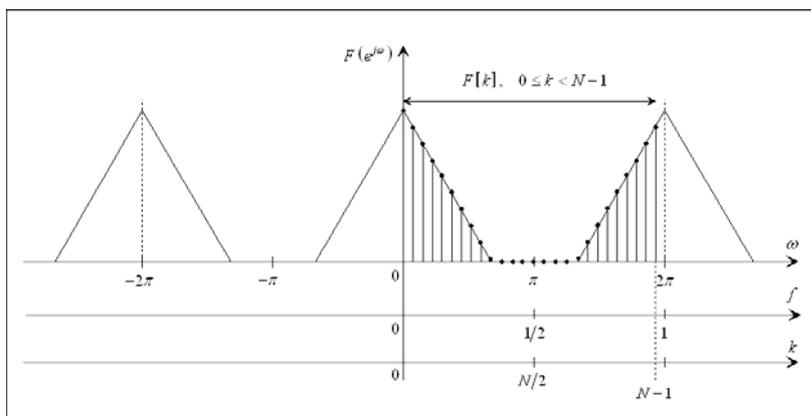
•Ejemplo: la Transformada Discreta de Fourier (DFT)

- Dada una señal discreta de duración finita:  $f[n] / f[n]=0, n < 0, n > N-1$
- Transformada de Fourier de Tiempo Discreto (DTFT): representación espectral exacta, *continua* y *periódica* de la señal discreta:

$$f[n] \xrightarrow{DTFT} F(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f[n] \cdot e^{-j\omega n}$$

- La Transformada Discreta de Fourier (DFT) es una aproximación discreta a la DTFT. Por ser una transformada discreta tiene el mismo número de valores que la señal de partida. Puede interpretarse como  $N$  muestras equiespaciadas de la DTFT de  $f[n]$  :

$$f[n] \xrightarrow{DFT} F[k] = F(e^{j\omega})_{\omega=2k\pi/N} = \sum_{n=0}^{N-1} f[n] \cdot e^{-j\frac{2k\pi}{N}n}, \quad 0 \leq k \leq N-1$$



- Coincide, salvo por un factor de escala, con el Desarrollo en Serie de Fourier (DTFS) de una señal periódica cuyo periodo coincide con  $f[n]$  :

$$\tilde{f}[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f[n - kN] \xrightarrow{FS} F[k] = \frac{1}{N} \sum_{(N)} \tilde{f}[n] \cdot e^{-j\frac{2k\pi}{N}n} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f[n] \cdot e^{-j\frac{2k\pi}{N}n}$$

- Para que la matriz de transformación sea unitaria y de determinante unidad, la DFT suele definirse

$$\left. \begin{aligned} F[k] &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} f[n] \cdot e^{-j\frac{2k\pi}{N}n} \\ f[n] &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} F[k] \cdot e^{j\frac{2k\pi}{N}n} \end{aligned} \right\} \Rightarrow w[n, k] = W(n, k) = \frac{1}{\sqrt{N}} \cdot e^{j\frac{2k\pi}{N}n}$$

Núcleo de la transformación inversa

$$W = \frac{1}{\sqrt{N}} \begin{bmatrix} e^{j\frac{2 \cdot 0 \cdot \pi}{N} \cdot 0} & \dots & e^{j\frac{2k \cdot \pi}{N} \cdot 0} & \dots & e^{j\frac{2(N-1) \cdot \pi}{N} \cdot 0} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ e^{j\frac{2 \cdot 0 \cdot \pi}{N} \cdot n} & \dots & e^{j\frac{2k \cdot \pi}{N} \cdot n} & \dots & e^{j\frac{2(N-1) \cdot \pi}{N} \cdot n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ e^{j\frac{2 \cdot 0 \cdot \pi}{N} \cdot (N-1)} & \dots & e^{j\frac{2k \cdot \pi}{N} \cdot (N-1)} & \dots & e^{j\frac{2(N-1) \cdot \pi}{N} \cdot (N-1)} \end{bmatrix}$$

$W_0[n] \dots W_k[n] \dots W_{(N-1)}[n]$

Bajas frecuencias

Altas frecuencias

Bajas frecuencias

$$W_8[n] = W_{N/2}[n]$$

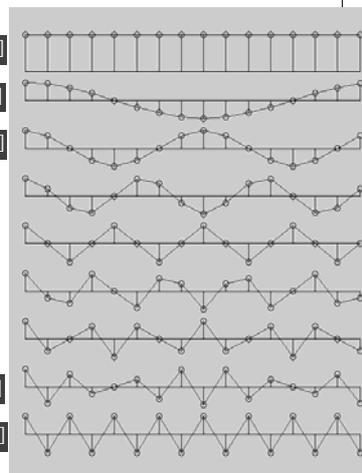
Vectores de la nueva base (N=16) – parte real

$W_0[n]$

$W_1[n]$

$W_2[n]$

$W_7[n]$



$$\Psi[u, v] = \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{M-1} \psi[m, n] \cdot w'[u, v, m, n]$$

$$\psi[m, n] = \sum_{u=0}^{N-1} \sum_{v=0}^{M-1} \Psi[u, v] \cdot w[m, n, u, v]$$

• Separabilidad:

- Los núcleos de la transformación se pueden separar en un producto externo de matrices:

$$w'[u, v, m, n] = w'_1[u, m] \otimes w'_2[v, n] = W'_1 \otimes W'_2$$

$$w[m, n, u, v] = w_1[m, u] \otimes w_2[n, v] = W_1 \otimes W_2$$

- Permite calcular la transformada en dos pasos, reduciendo operaciones de  $N^4$  a  $2N^3$

$$\Psi_{aux}[u, n] = \sum_{m=0}^{N-1} \psi[m, n] \cdot w'_1[u, m], \quad \forall u \Rightarrow \Psi_{aux} = W'_1 \cdot \Psi$$

$$\Psi[u, v] = \sum_{n=0}^{M-1} \Psi_{aux}[u, n] \cdot w'_2[v, n], \quad \forall v \Rightarrow \Psi = \Psi_{aux} \cdot W'_2{}^T$$

$$\Rightarrow \Psi = W'_1 \cdot \Psi \cdot W'_2{}^T$$

- Normalmente se escogen transformadas en las que se verifica  $W'_1 = W'_2 = W'$ , por lo que la expresión matricial de las transformadas directa e inversa resulta (para imágenes cuadradas de  $N \times N$ ):

$$\Psi = W' \cdot \Psi \cdot W'^T \Rightarrow W' = W'^{-1}$$

$$\psi = W \cdot \Psi \cdot W^T \Rightarrow W = W^{-1}$$

• Imágenes base:

- Si además el núcleo de la transformación es un conjunto completo de imágenes base ortonormales, entonces se verifica que las matrices en que se separa son unitarias. Por lo tanto:

$$W' = W'^{-1} = W'^T \Rightarrow \begin{cases} \Psi = W'^T \cdot \Psi \cdot W' \\ \psi = W \cdot \Psi \cdot W^T \end{cases} \quad \begin{cases} \Psi = W_M'^T \cdot \Psi \cdot W_N' \\ \psi = W_M \cdot \Psi \cdot W_N^T \end{cases}$$

- Al ser  $W$  una matriz unitaria, sus columnas son vectores ortonormales entre sí. Sea el conjunto de  $N \times N$  matrices generado por el producto externo de los vectores columna de la matriz unitaria:

$$B_{u,v} = W_u[n] \otimes W_v^T[n]$$

- Definiendo el producto interno de dos matrices como:

$$\langle F, G \rangle = \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} f[m, n] \cdot g^*[m, n]$$

- , podemos escribir las transformadas inversa y directa según:

$$\psi[m, n] = \sum_{u=0}^{N-1} \sum_{v=0}^{M-1} \Psi[u, v] \cdot w[m, n, u, v] \Rightarrow \psi = \sum_{u=0}^{N-1} \sum_{v=0}^{M-1} \Psi[u, v] \cdot B_{u,v}$$

$$\Psi[u, v] = \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{M-1} \psi[m, n] \cdot w'[u, v, m, n] \Rightarrow \Psi[u, v] = \langle \psi, B_{u,v} \rangle$$

- En conclusión, cada coeficiente de la transformada resulta del producto interno (escalar) o proyección de la imagen original con cada una de las imágenes base.

Definición:

- El núcleo viene dado por la matriz unitaria compleja y simétrica:

$$W(n, u) = W(m, v) = \frac{1}{\sqrt{N}} \cdot e^{j \frac{2\pi}{N} n v}, \quad W = W^T, \quad W^{-1} = W^{*T} = W^*$$

- Por lo tanto, las expresiones de la transformada resultan:

$$\Psi = W^* \cdot \psi \cdot W$$

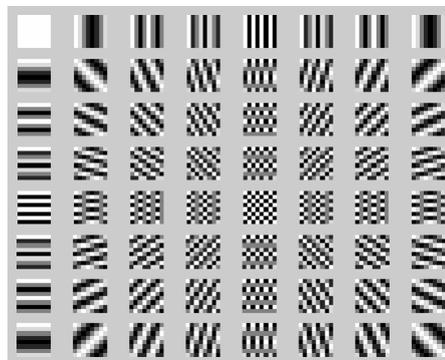
$$\psi = W \cdot \Psi \cdot W$$

Interpretación y cálculo

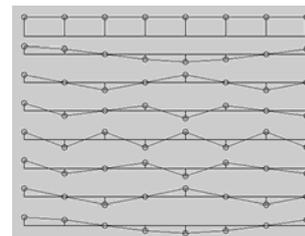
- Vectores base e imágenes base de la transformación
- Relación con la DSFT:  $N \times N$  muestras equiespaciadas
- Ejemplos de cálculo

- Vectores base e imágenes base de la transformación

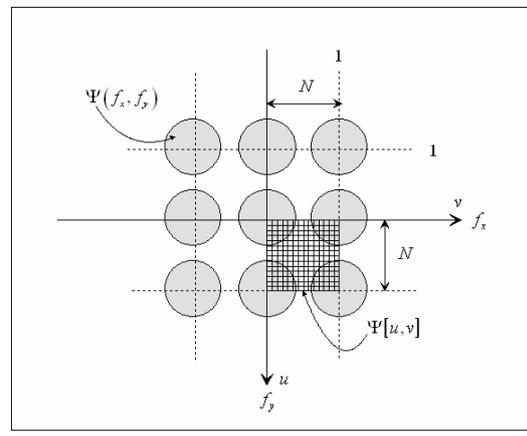
Imágenes base (N=8) : parte real



Vectores base (N=8) – parte real



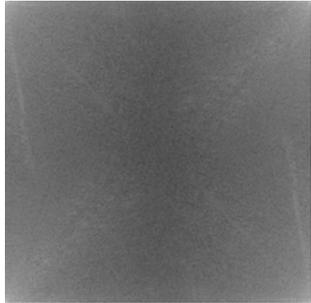
- Relación con la DSFT:  $n \times n$  muestras equiespaciadas



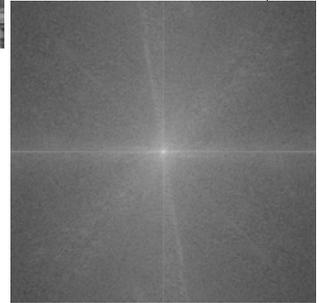
- Ejemplos de cálculo



DFT - módulo



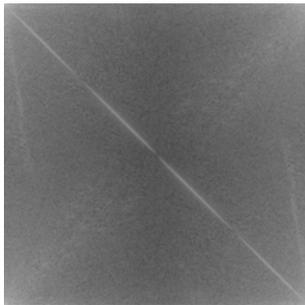
DFT centrada - módulo



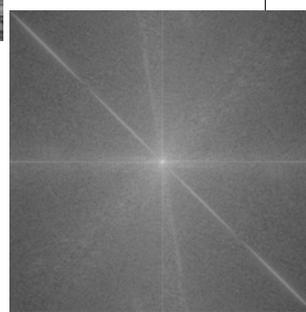
- Ejemplos de cálculo



DFT - módulo



DFT centrada - módulo



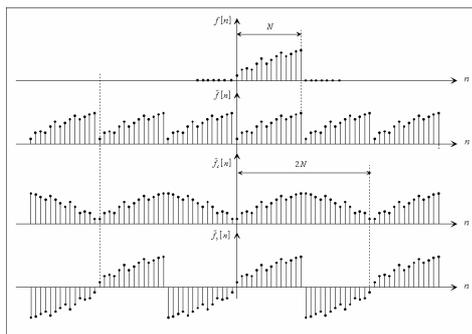
### • Propiedades y aplicaciones

- *Es una transformada rápida (FFT).*
- *Aprovechamiento de la propiedad de convolución circular para realizar filtrados en frecuencia.*
- *Análisis de características de imágenes y secuencias de vídeo.*

Definición:

- Es el DSF de la extensión par y periódica de una señal de duración finita, lo que resulta en una serie de términos reales de frecuencia creciente en forma 'cos':

$$f_c[n] = f[n] + f[-n-1], \quad \tilde{f}_c[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_c[n - 2kN] \quad \tilde{f}_c[n] \xrightarrow{FS} F_c[k] = \frac{1}{N} \sum_{(2N)} \tilde{f}_c[n] \cdot e^{-j\frac{2k\pi}{N}n}, \quad 0 \leq k \leq 2N-1$$



- Operando sobre esta expresión se llega a:

$$f[n] \xrightarrow{DCT} F[k] = c[k] \cdot \sum_{n=0}^{N-1} f[n] \cdot \cos\left(\frac{(2n+1)k \cdot \pi}{2N}\right), \quad 0 \leq k \leq N-1$$

, donde  $c[0] = \sqrt{\frac{1}{N}}, \quad c[k] = \sqrt{\frac{2}{N}}$

- El núcleo de la transformación viene dado por la matriz unitaria real (no simétrica):

$$W(n,u) = W(m,v) = \begin{cases} \sqrt{\frac{1}{N}} & , u = 0, 0 \leq n \leq N-1 \\ \sqrt{\frac{2}{N}} \cos\left(\frac{(2n+1)u \cdot \pi}{2N}\right) & , 1 \leq u \leq N-1, 0 \leq n \leq N-1 \end{cases}$$

$$W = W^*, \quad W^{-1} = W^{*T} = W^T$$

- Por lo tanto, las expresiones de las transformadas resultan:

$$\Psi = W^T \cdot \psi \cdot W$$

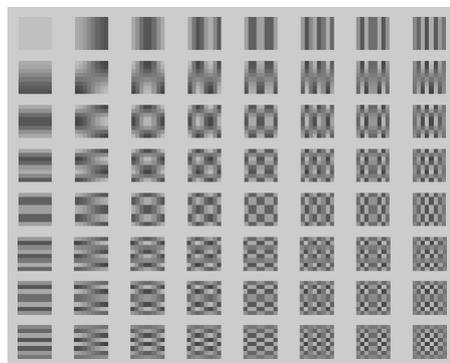
$$\psi = W \cdot \Psi \cdot W^T$$

• Interpretación y cálculo

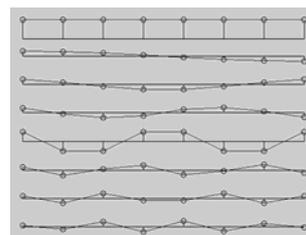
- *Vectores base e imágenes base de la transformación*
- *Relación con la DSFT:  $N \times N$  muestras equiespaciadas de las frecuencias positivas de la DTFT*
- *Ejemplos de cálculo*

- *Vectores base e imágenes base de la transformación*

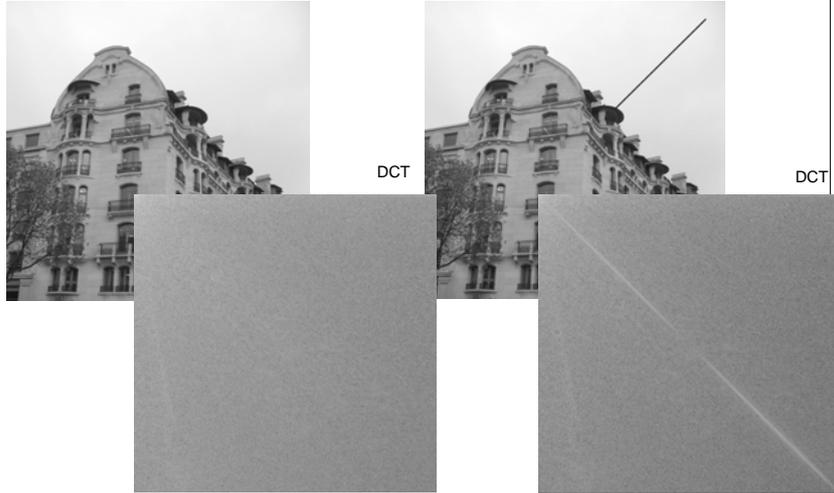
Imágenes base (N=8)



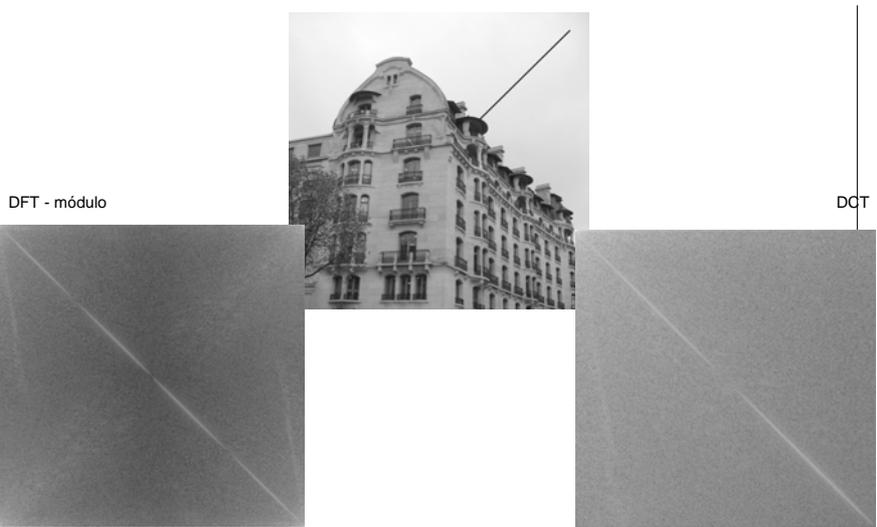
Vectores base (N=8)



■ Ejemplos de cálculo



■ DFT vs. DCT



• Propiedades y aplicaciones

- Eliminación de las altas frecuencias ficticias generadas por la DFT
- Transformada rápida, calculable con una FFT
- Alta compactación: cuasi-óptima para procesos muy correlacionados ( $\rho \approx 1$ )
- Codificación por bloques en JPEG y MPEG.

• Definición:

- Es el DSF de la extensión impar y periódica de una señal de duración finita, lo que resulta en una serie de términos reales de frecuencia creciente en forma 'sin':
- Su desarrollo es idéntico al de la DCT pero partiendo de:  $f_s[n] = f[n] - f[-n-1]$
- El resultado es un núcleo que queda definido por la matriz real, unitaria y simétrica:

$$W(n, u) = W(m, v) = \sqrt{\frac{2}{N+1}} \sin \frac{(n+1)(u+1) \cdot \pi}{N+1}, \quad 0 \leq n, u \leq N-1$$

$$W = W^* = W^T, \quad W^{-1} = W^{*T} = W$$

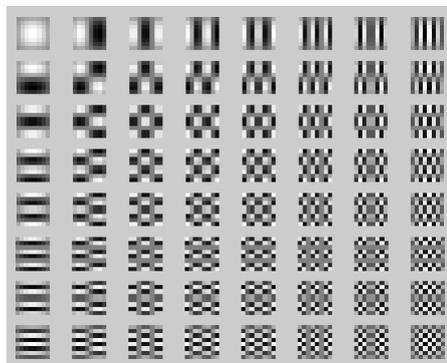
- Por lo tanto, las expresiones de las transformada resultan:  $\Psi = W \cdot \psi \cdot W$   
 $\psi = W \cdot \Psi \cdot W$

• Interpretación y cálculo

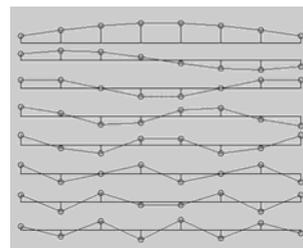
- *Vectores base e imágenes base de la transformación*
- *Ejemplos de cálculo*

- *Vectores base e imágenes base de la transformación*

Imágenes base (N=8)

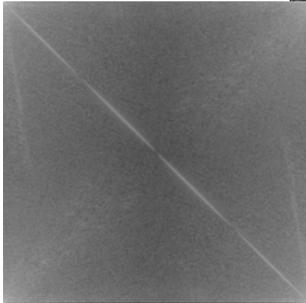


Vectores base (N=8) – parte imaginaria

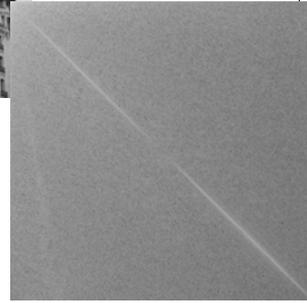


▪ Ejemplos de cálculo

DFT - módulo



DST - parte imaginaria



▪ Propiedades y aplicaciones

- Transformada rápida, más que una FFT
- Alta compactación: cuasi-óptima para procesos correlacionados ( $\rho < 0.5$ )
- Vía rápida para calcular la transformada óptima KL.

Definición:

- Basadas en las funciones de Haar, familias de  $N$  funciones (orden  $N$ ) continuas distintas:

$$h_k(x), \quad k \in \{0, \dots, N-1\}, \quad N = 2^n$$

- La definición de la función  $k$ -ésima se basa en la definición intermedia de dos índices,  $p$  y  $q$ , asociados a cada  $k$ , que toman  $N$  valores según el criterio (en notación MatLab):

- $p = [\text{zeros}(1,2) \text{ ones}(1,2^1) 2^* \text{ones}(1,2^2) \dots (n-1)^* \text{ones}(1,2^{(n-1)})]$
- $q = [0 \ 1 \ 1:2^1 \ 1:2^2 \dots \ 1:2^{(n-1)}]$
- $k = [0:N-1]$

, que para  $n=4$  resulta:

- $p = [0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 2 \ 2 \ 2 \ 2 \ 3 \ 3 \ 3 \ 3 \ 3 \ 3 \ 3 \ 3]$
- $q = [0 \ 1 \ 1 \ 2 \ 1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6 \ 7 \ 8]$
- $k = [0 \ 1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6 \ 7 \ 8 \ 9 \ 10 \ 11 \ 12 \ 13 \ 4 \ 15]$

- A partir de estos índices, las  $k$  funciones se definen según la expresión:

$$h_k(x) = h_{pq}(x) = \begin{cases} \frac{2^{p/2}}{\sqrt{N}} & , \frac{q-1}{2^p} \leq x < \frac{q-0.5}{2^p} \\ -\frac{2^{p/2}}{\sqrt{N}} & , \frac{q-0.5}{2^p} \leq x < \frac{q}{2^p} \\ 0 & \text{resto} \end{cases}, \quad x \in [0,1]$$

- Los vectores de una transformada de Haar de  $N \times N$  son  $N$  muestras equiespaciadas de las  $N$  funciones de una familia de funciones de Haar de orden  $N$ .

- La matriz resultante es real y ortogonal; por lo tanto:

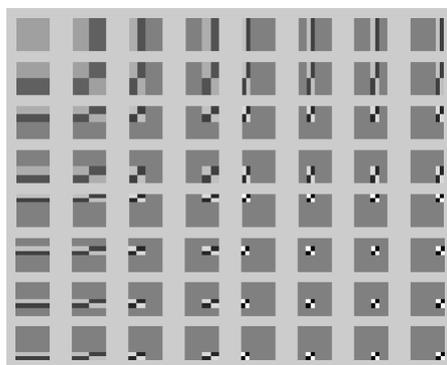
$$\mathbf{W} = \mathbf{W}^*, \quad \mathbf{W}^{-1} = \mathbf{W}^{*T} = \mathbf{W}^T \Rightarrow \begin{cases} \Psi = \mathbf{W}^T \cdot \psi \cdot \mathbf{W}^T \\ \psi = \mathbf{W} \cdot \Psi \cdot \mathbf{W} \end{cases}$$

• Interpretación y cálculo

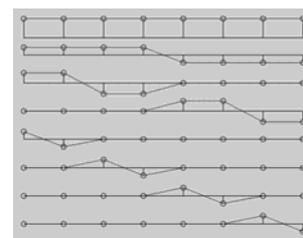
- *Vectores base e imágenes base de la transformación*
- *Ejemplos de cálculo*

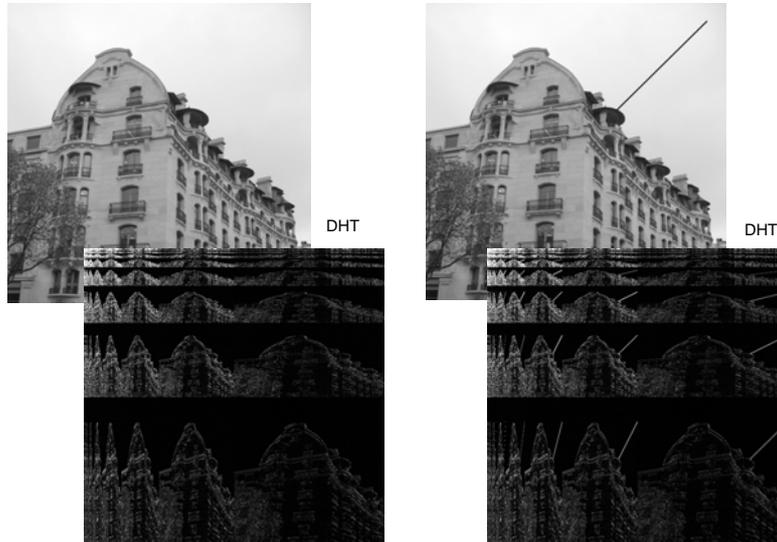
- *Vectores base e imágenes base de la transformación*      Funciones de Haar (N=8)

Imágenes base (N=8)



Vectores base (N=8)





### • Propiedades y aplicaciones

- Transformada muy rápida:  $O(N)$
- No compacta energía tanto como las anteriores.
- Codificación escalable.

- Introducción
- Transformadas discretas lineales
  - Introducción
  - Transformadas unidimensionales
  - Transformadas bidimensionales
  - Transformada discreta de Fourier (DFT)
  - Transformada discreta del coseno (DCT)
  - Transformada discreta del seno (DST)
  - Transformada discreta de Haar (DHT)
- Transformadas morfológicas
  - Transformada de Hough (Tema 6)

Estas transparencias están editadas a partir de las generadas por el profesor

Jesús Bescós Cano durante sus años de impartición de esta asignatura.