

Temas Avanzados en Procesado de Señales

Tratamiento Digital de Señales Visuales

Tema 3: Operadores Puntuales

...modelado de histogramas, modificación de niveles, operaciones binarias...

José María Martínez Sánchez



Escuela Politécnica Superior





Universidad Autónoma de Madrid
E28049 Madrid (SPAIN)



Video Processing and Understanding Lab
Grupo de Tratamiento e Interpretación de Vídeo

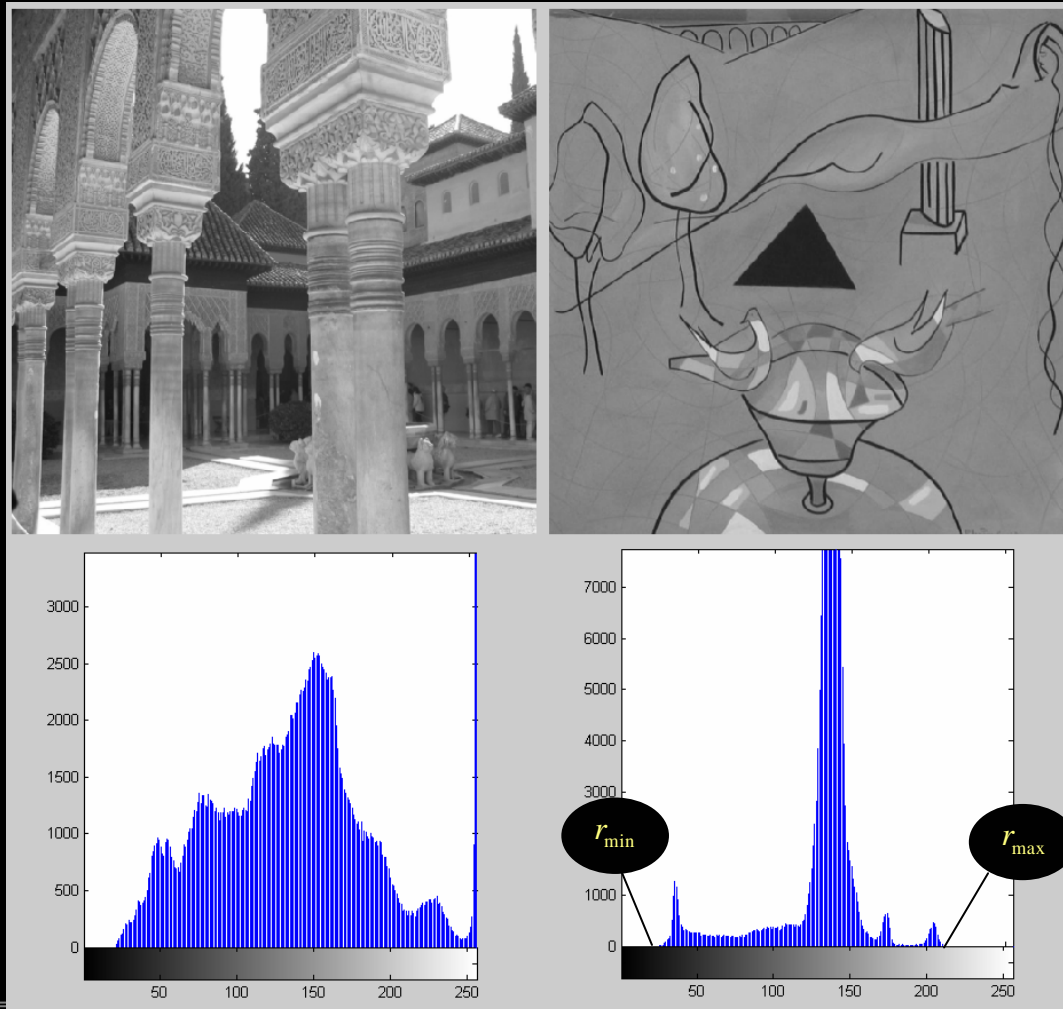
- Introducción
- Modelado de histograma
- Modificaciones de niveles
- Aspectos operativos
- Operaciones binarias

-  Cada píxel de la imagen resultante es función del píxel homólogo de la imagen (o imágenes) con que se opera.
-  Estos operadores modifican la amplitud de los píxeles de la imagen de acuerdo con la operación especificada:

$$\psi[n, m] / \psi[n_i, m_j] = r_k \xrightarrow{T} \theta[n, m] / \theta[n_i, m_j] = s_k = T(r_k), \\
 j \in [0, M - 1], i \in [0, N - 1], k \in [0, L - 1]$$

- Introducción
- Modelado de histograma
 - Ajuste de contraste
 - Igualación de histograma
 - Especificación de histograma
- Modificaciones de niveles
- Aspectos operativos
- Operaciones binarias

Histograma de $\psi[n, m]$: $h(r_k) = np_k$ (#píxeles con valor r_k)



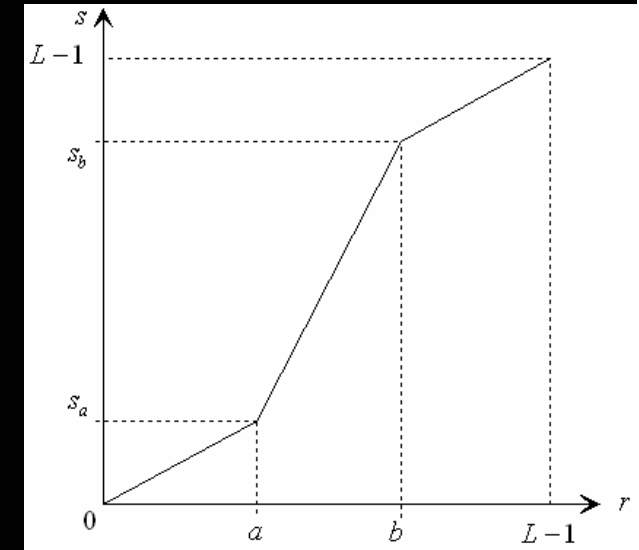
Histograma normalizado: estima la probabilidad de ocurrencia de r_k :

$$p(r_k) = \frac{np_k}{np}, \quad np = M \times N, \quad \sum_{k=0}^{L-1} p(r_k) = 1$$

La técnicas de modelado de histogramas modifican el histograma de una imagen de forma fija, o bien de forma *semiautomática* o adaptativa, hasta obtener la forma deseada.

- * **Objetivo (contrast stretching):** *realzar imágenes de bajo contraste, derivadas de condiciones de baja iluminación, poco rango en el captador o errores en la apertura del diafragma.*
- * **Solución:** *compresión o expansión del rango dinámico de la amplitud según convenga.*

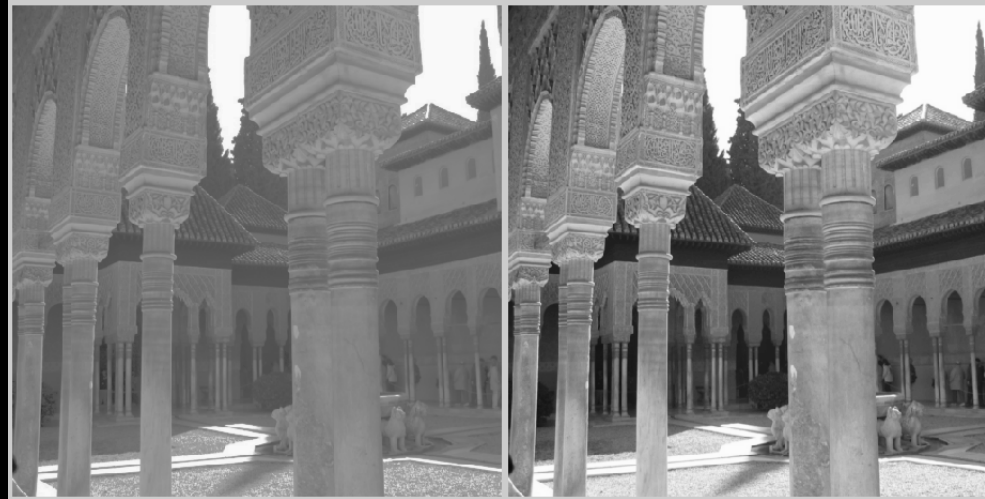
$$s = \begin{cases} \alpha \cdot (r - a) + s_a & 0 \leq r < a \\ \beta \cdot (r - a) + s_a & a \leq r < b \\ \gamma \cdot (r - b) + s_b & b \leq r < L \end{cases}$$



- * **Selección directa o selección dinámica de los parámetros de la transformación mediante análisis del histograma:**

- Maximización global de rango: $a = r_{\min}$, $b = r_{\max}$, $s_a = 0$, $s_b = L - 1$
- Basadas en parámetros estadísticos.
- ...

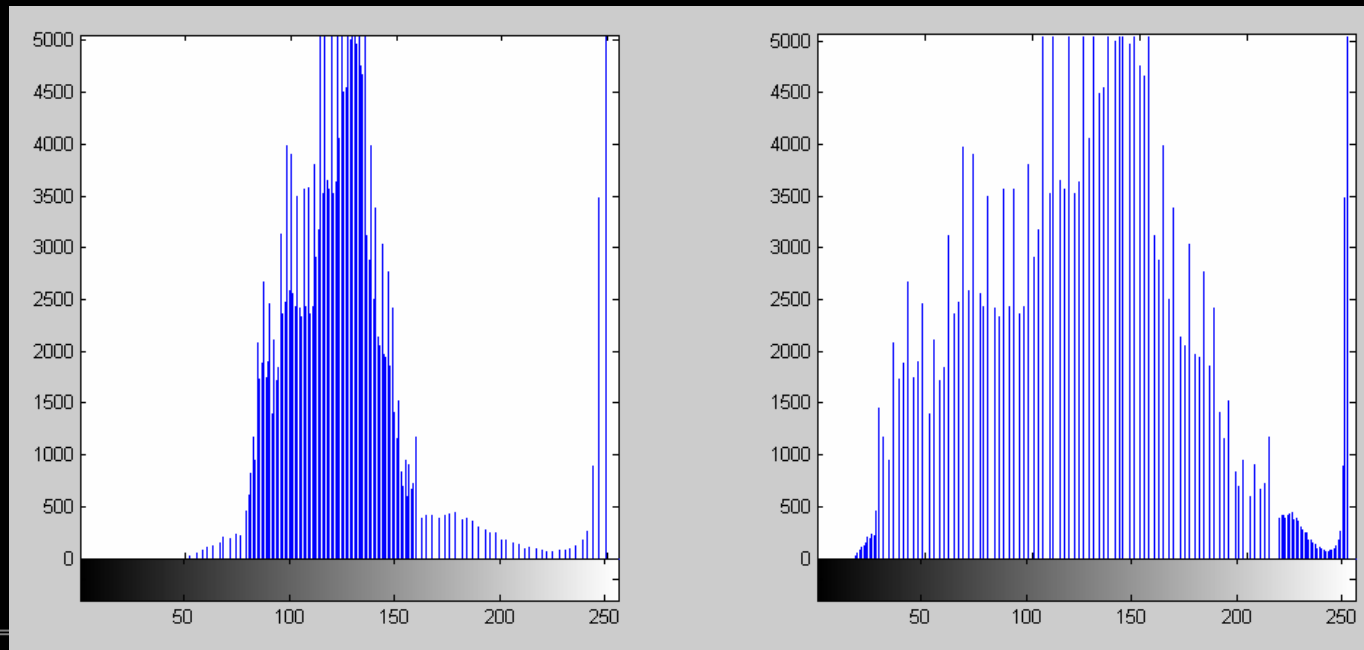
Modelado de histograma: Ajuste de contraste



$a = 80$
 $b = 160$
 $s_a = 30$
 $s_b = 220$

Imagen de bajo contraste

Imagen con contraste ajustado



La igualación (*equalization*) intenta que la imagen modificada presente un histograma uniformemente distribuido en su rango de variación, $[0, L-1]$

• Desarrollo para el caso continuo:

- Sean rangos continuos y normalizados de variación de nivel:

$$\psi[n, m] / \psi[n_i, m_j] = r \xrightarrow{T} \theta[n, m] / \theta[n_i, m_j] = s = T(r), \quad 0 \leq r \leq 1$$

- Sea una transformación $s = T(r)$ monovaluada, monótonamente creciente en el intervalo $0 \leq T(r) \leq 1$, y tal que $0 \leq r \leq 1$ para $0 \leq s \leq 1$ (propiedades necesarias*)

- Las variables r, s pueden verse como v.a. en $[0, 1]$, con f.d.p. $p_r(r), p_s(s)$. Si además la transformación inversa también es monovaluada, se verifica que:

$$p_s(s) = p_r(r) \cdot \left| \frac{dr}{ds} \right|$$

- Una $T(r)$ que verifica las propiedades anteriores es, por ejemplo:

$$s = T(r) = \int_0^r p_r(x) dx = F_r(r) \Rightarrow \frac{ds}{dr} = \frac{dT(r)}{dr} = p_r(r)$$

- Por lo tanto, en este caso se verifica $p_s(s) = 1, s \in [0, 1]$

✿ Desarrollo para el caso discreto:

- *Tomando el histograma normalizado como estimador de la f.d.p:*

$$p_r(r_k) = \frac{np_k}{np}, \quad s_k = T(r_k) = \sum_{i=0}^k p_r(r_i) = \sum_{i=0}^k \frac{np_i}{np}$$

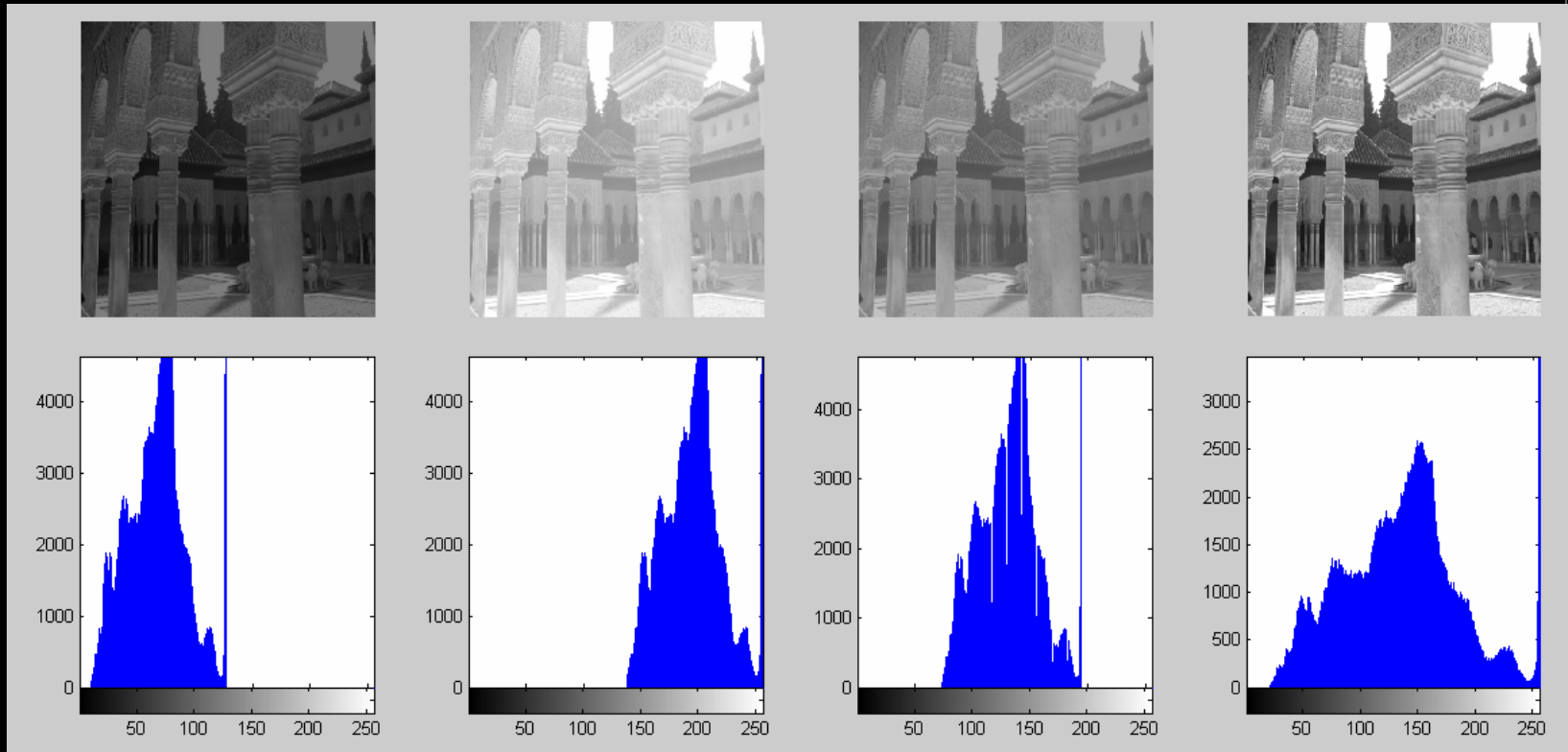
- *Obsérvese que en general $r_k \in \mathbb{Z} (r_k \in [0, L-1])$ y $s_k \in \mathbb{Q} (s_k \in [0, 1])$. Además, si $r_{\min} > 0 \Rightarrow s_{\min} > 0$. Por lo tanto es necesario cuantificar los valores de s_k desde el intervalo $[s_{\min}, 1]$ al intervalo de valores enteros $[0, L-1]$*

Oscura

Clara

Media

Original

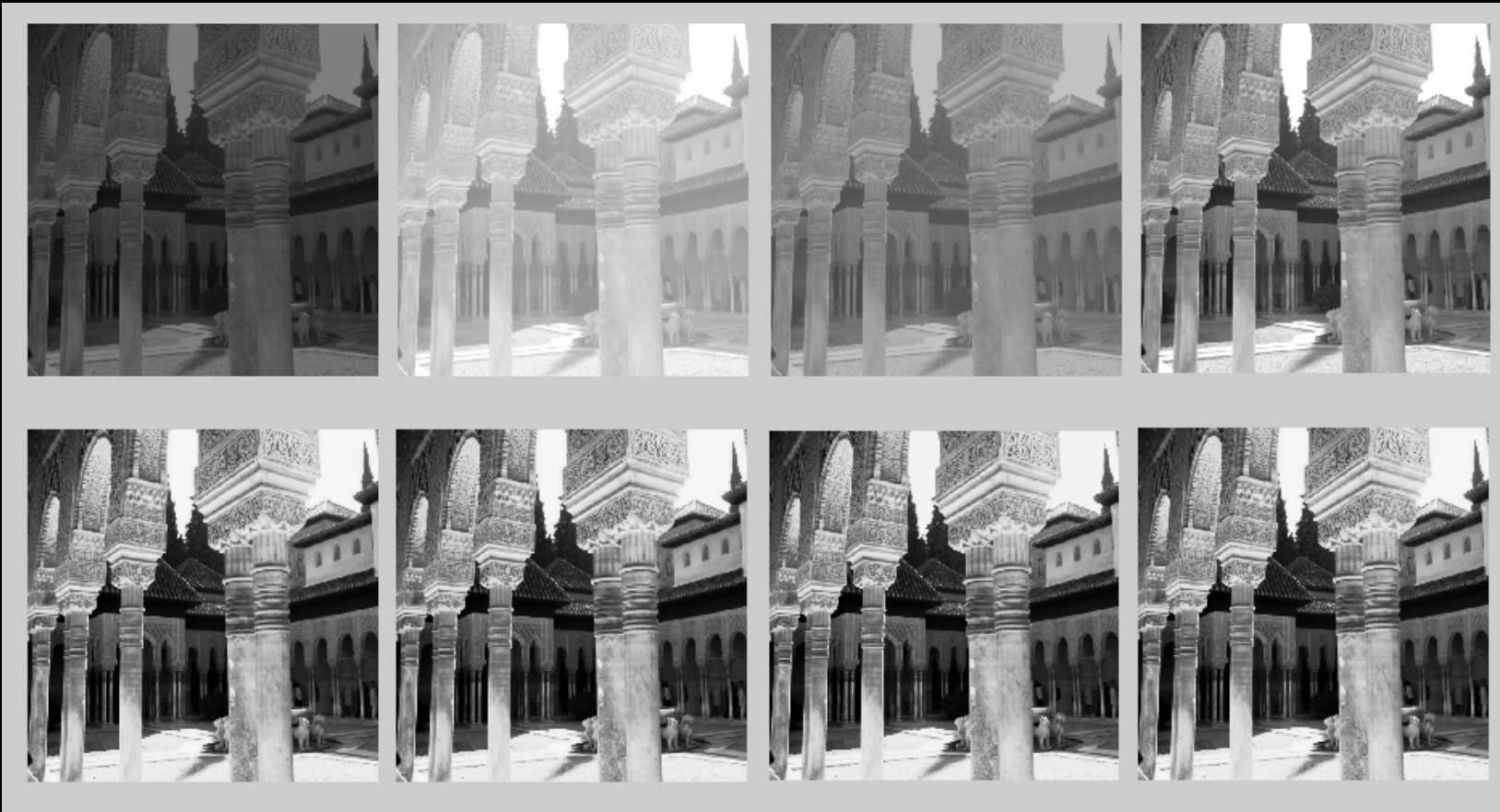


Oscura

Clara

Media

Original

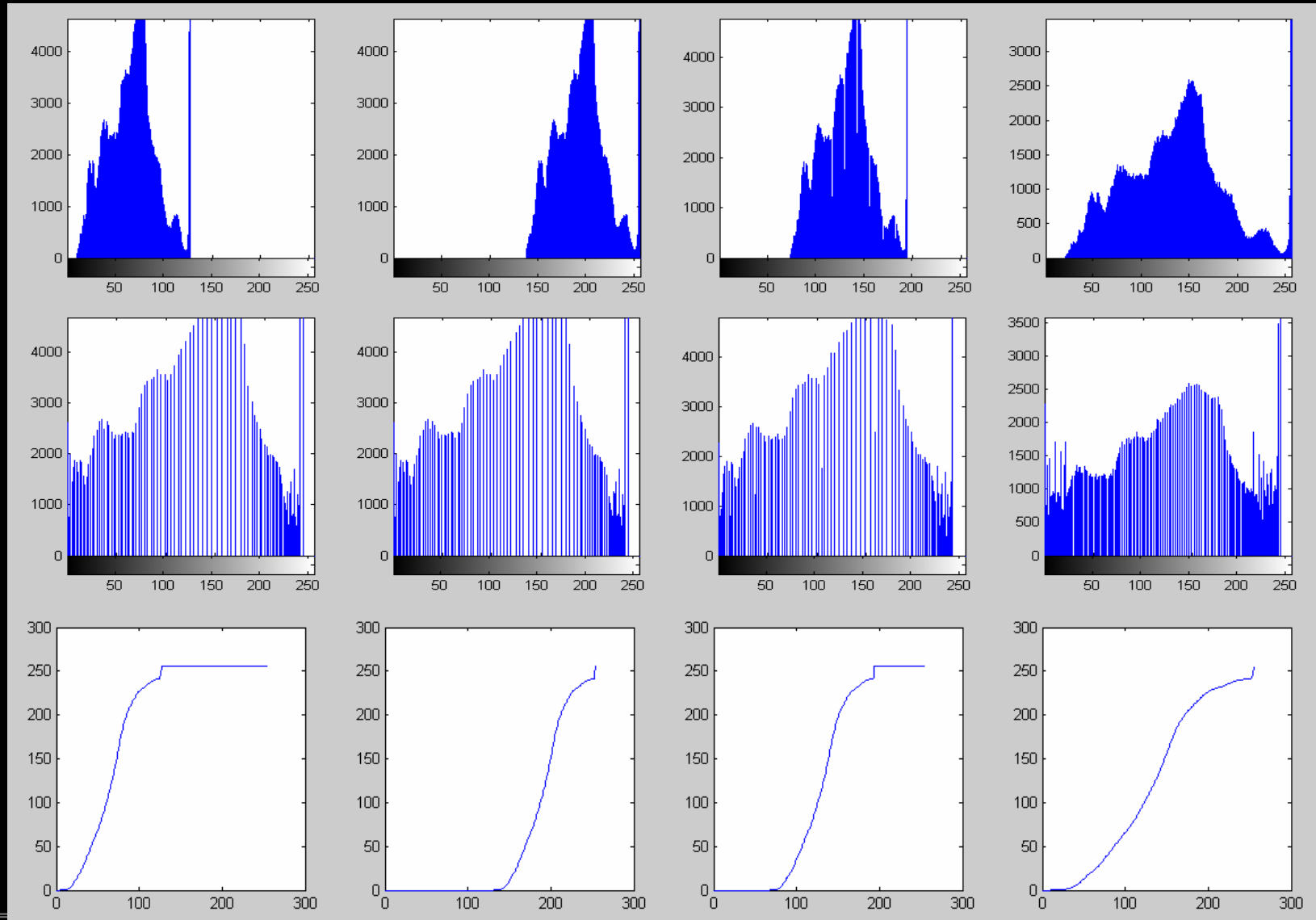


Oscura

Clara

Media

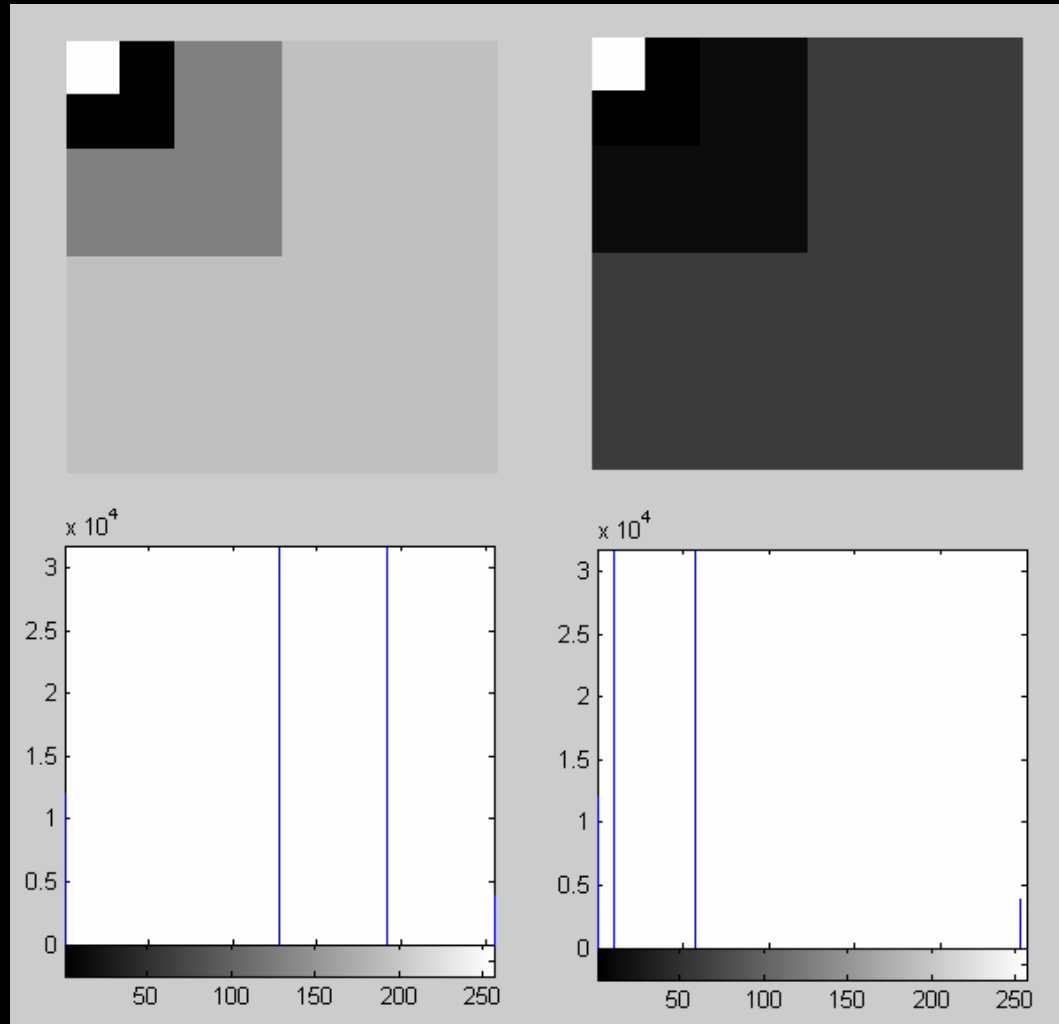
Original



- *No es posible demostrar que esta transformación de lugar al equivalente discreto de una f.d.p. uniforme, pero sí que tiende a distribuir el histograma de $\psi[x, y]$ en un rango más amplio de niveles en cierto tipo de imágenes.*

- *La transformación inversa sólo existe si todos los niveles están representados en la imagen original (ausencia de ceros en el histograma) :*

$$p_r(r_k) > 0, \forall k \in [0, L-1]$$



El objetivo es generar una imagen cuyo histograma sea uno especificado que, en general, no diferirá excesivamente del original.

• **Desarrollo para el caso continuo:**

- Sean rangos continuos y normalizados de variación de nivel:

$$\psi[n, m] / \psi[n_i, m_j] = r \longrightarrow \theta[n, m] / \theta[n_i, m_j] = s, \quad 0 \leq r, s \leq 1$$

- Sean $p_r(r)$, $p_s(s)$ las f.d.p de los niveles de la imagen original y de la imagen objetivo, donde es posible estimar $p_r(r)$ y $p_s(s)$ está especificada.

- Sea una imagen intermedia cuyos niveles vienen dados por la transformación, ya conocida:

$$z = T(r) = \int_0^r p_r(x) dx \Rightarrow p_z(z) = 1, \quad z \in [0, 1]$$

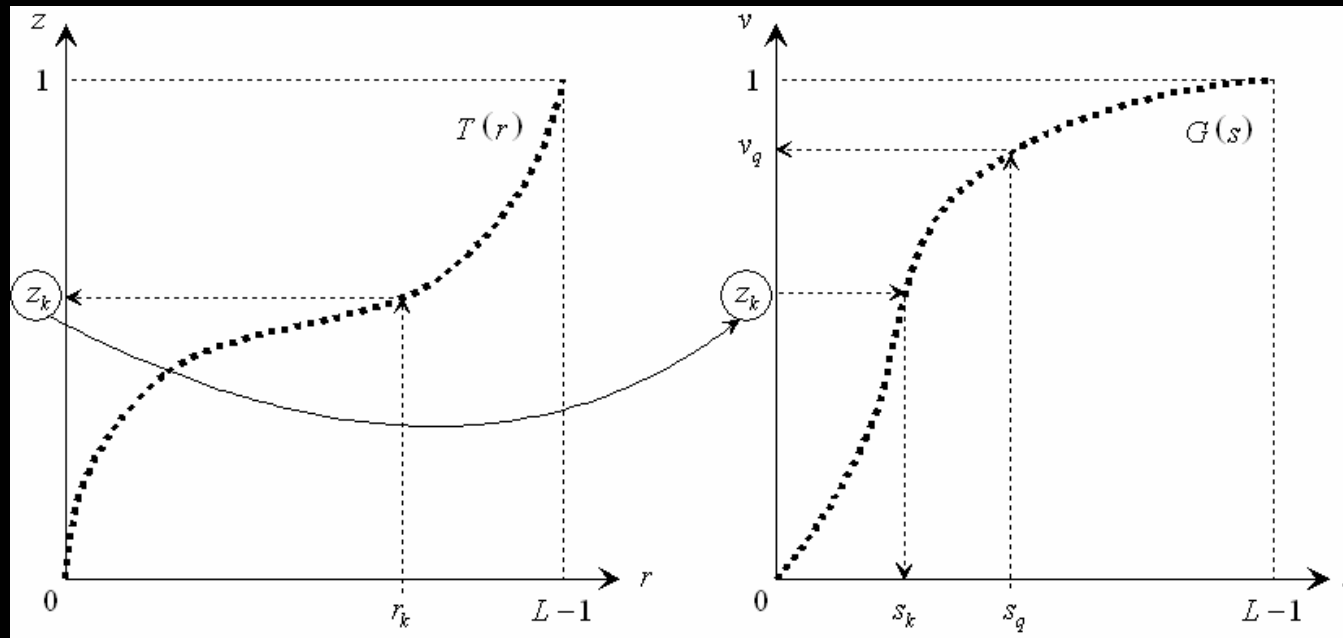
- Si, siendo $p_s(s)$ la f.d.p. deseada, podemos definir sobre la variable aleatoria una transformación que verifique:

$$G(s) = \int_0^s p_s(x) dx \Rightarrow G(s) \in [0, 1] \Rightarrow G(s) = z = T(r)$$

, por lo que es posible concluir que: $s = G^{-1}(z) = G^{-1}(T(r))$

- Por lo tanto, siempre que la transformación G sea invertible y que G^{-1} satisfaga las propiedades necesarias*, es posible obtener la imagen objetivo.

• **Desarrollo para el caso discreto: método de ajuste iterativo no exacto.**



Niveles de la imagen original

Niveles de la imagen procesada

- ✿ Introducción
- ✿ Modelado de histograma
- ✿ Modificaciones de niveles
 - Recorte y umbralización
 - Umbralización de imágenes bimodales
 - Negativo
 - Seccionado de niveles
 - Extracción de bandas a nivel de bit
 - Compresión logarítmica de rango
- ✿ Aspectos operativos
- ✿ Operaciones binarias

✿ Modificación de niveles

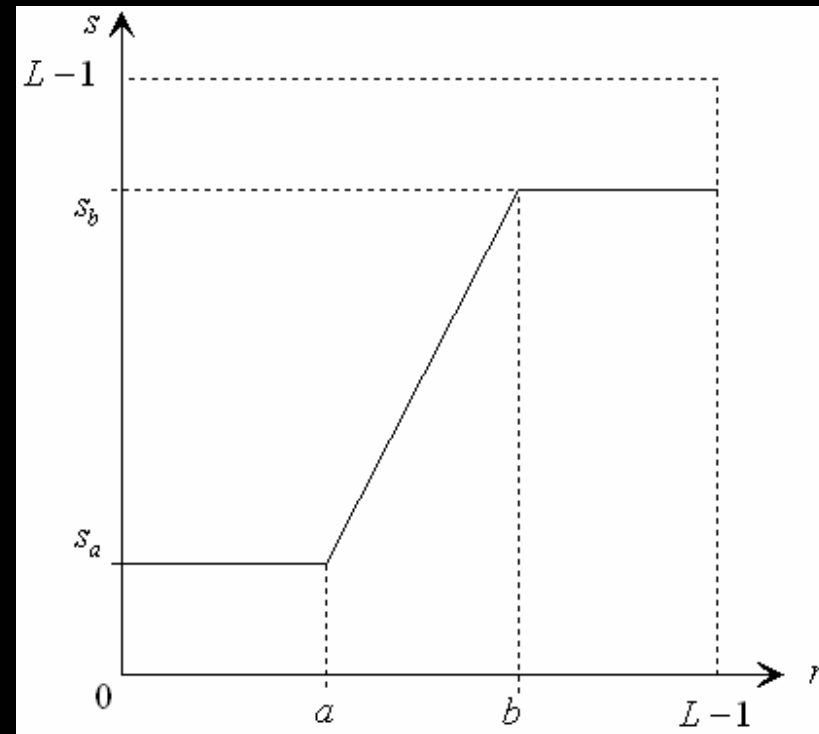
- Selección de información u obtención de un determinado efecto.
- Indirectamente modifican el histograma

✿ Tipos

- Recorte y umbralización
- Umbralización de imágenes bimodales
- Negativo
- Seccionado de niveles
- Extracción de bandas a nivel de bit
- Compresión logarítmica de rango

✿ Recorte (*clipping*):

- Útil para seleccionar regiones en imágenes en que hay una correspondencia niveles-regiones, para eliminar ruido si se sabe que los niveles de la imagen están en un rango $[a, b]$



Modificaciones de niveles: Recorte y umbralización



Imagen original

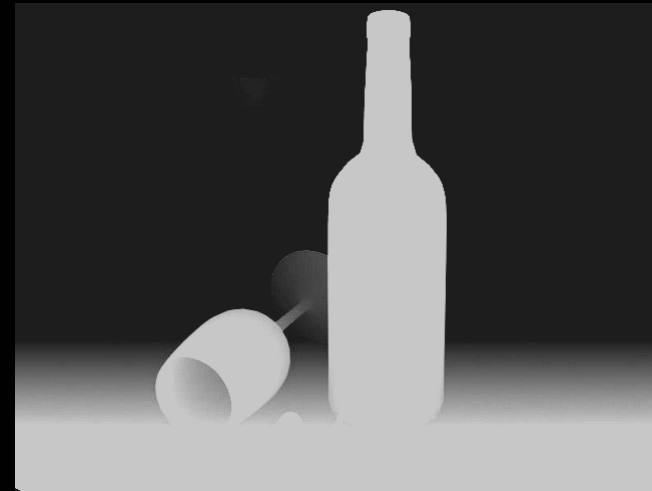


Imagen recortada

$a = 143$
 $b = 202$
 $s_a = 30$
 $s_b = 200$

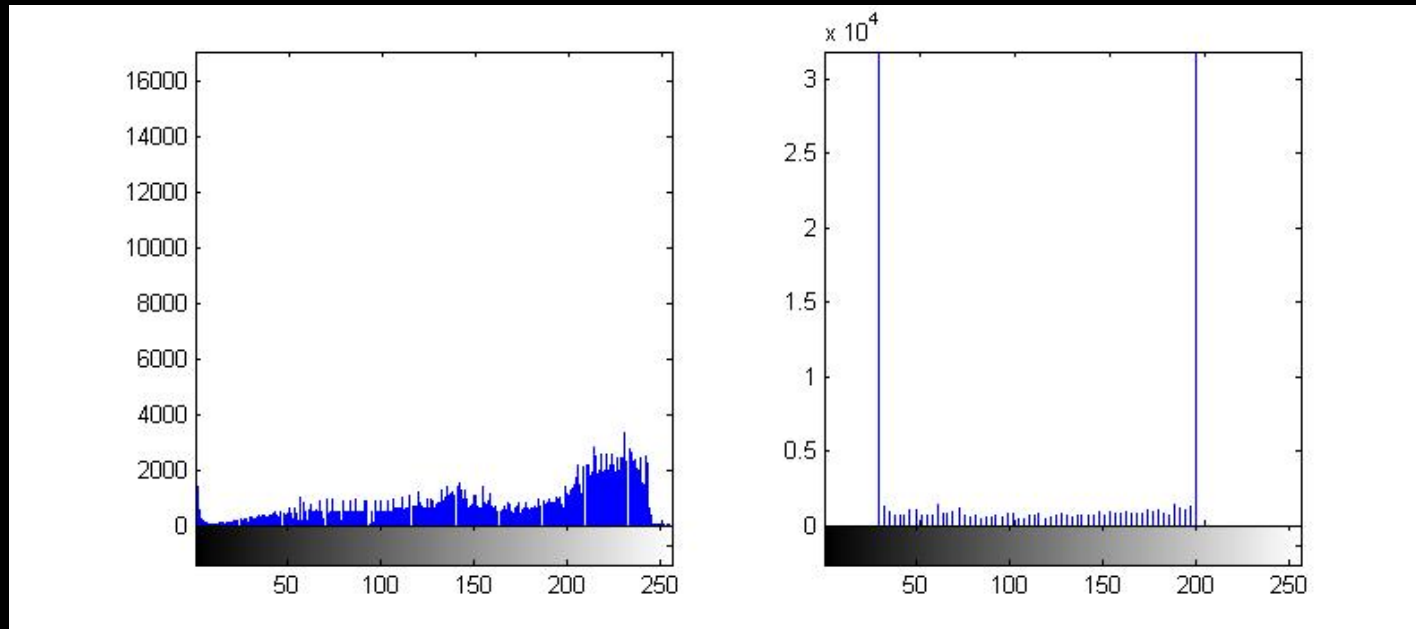



Imagen original extraída de "www.9jcg.com"

 **Umbralización**
(thresholding): es un caso particular de recorte para $a = b = T$

- *Útil para eliminar niveles cuando se sabe que el original sólo tiene dos y, en general, en la toma de decisiones binarias (e.g., para finalizar la separación de objetos en procesos de segmentación).*

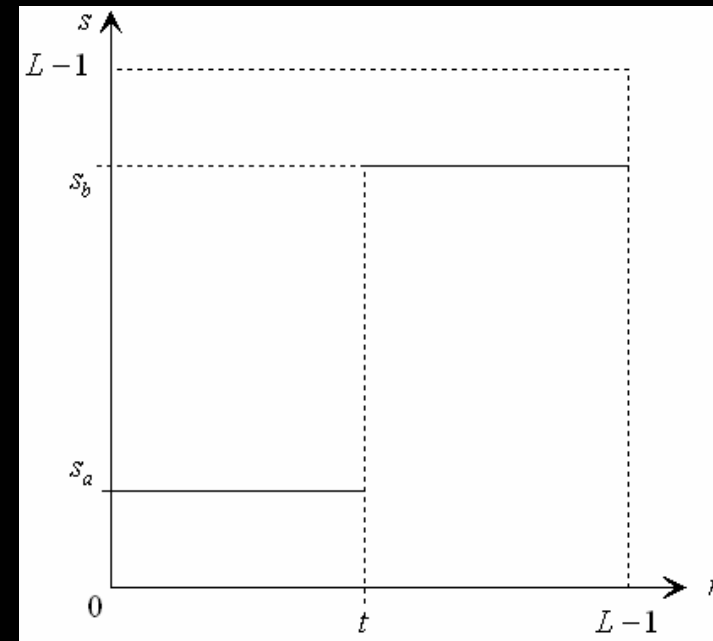


Imagen original

Imagen umbralizada

30

rapidamente, y que como se va a justificar a continuación solo transmiten energía en la dirección del sistema de transmisión (\hat{z}).

De un modo intuitivo, se puede razonar diciendo que si existiera flujo transversal (dirección \hat{r}) de energía, los campos deberían decrecer en amplitud con z , o lo que es lo mismo, la constante de propagación γ no podría ser imaginaria pura, tal y como aquí se ha obtenido para estos modos a frecuencias superiores a la de corte.

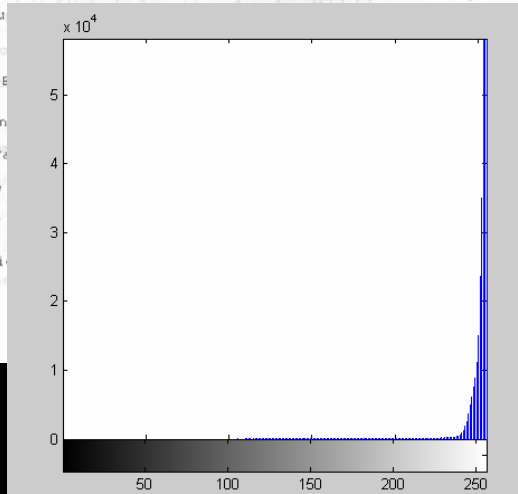
De un modo riguroso, el flujo radial de energía, por unidad de longitud en z viene dado por :

$$W_{rad} = \int_S (\vec{E}_t \times \vec{H}_z^* + \vec{E}_z \times \vec{H}_t^*) \cdot \hat{r} d\vec{r} dz = \int_0^{2\pi} \int_0^1 (E_r H_z^* + E_z H_r^*) r dr dz \quad (66)$$

Este flujo de potencia radiada, si no hay pérdidas en el medio, debe permanecer constante para cualquier r . Resulta sencillo demostrar que...

Teniendo en cuenta la expresión anterior se...

donde el doble se...



30

rapidamente, y que como se va a justificar a continuación solo transmiten energía en la dirección del sistema de transmisión (\hat{z}).

De un modo intuitivo, se puede razonar diciendo que si existiera flujo transversal (dirección \hat{r}) de energía, los campos deberían decrecer en amplitud con z , o lo que es lo mismo, la constante de propagación γ no podría ser imaginaria pura, tal y como aquí se ha obtenido para estos modos a frecuencias superiores a la de corte.

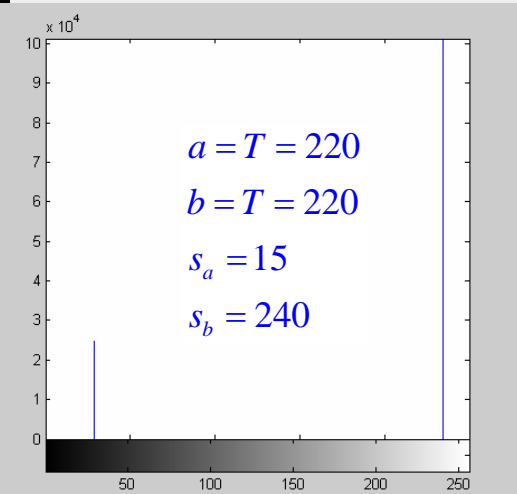
De un modo riguroso, el flujo radial de energía, por unidad de longitud en z viene dado por :

$$W_{rad} = \int_S (\vec{E}_t \times \vec{H}_z^* + \vec{E}_z \times \vec{H}_t^*) \cdot \hat{r} d\vec{r} dz = \int_0^{2\pi} \int_0^1 (E_r H_z^* + E_z H_r^*) r dr dz \quad (66)$$

Este flujo de potencia radiada, si no hay pérdidas en el medio, debe permanecer constante para cualquier r . Resulta...

generales de los campos diferentes modos, la...

a los modos EH y HE...



$W_{rad} \rightarrow 0$ para lo...

(67)

generales de los campos diferentes modos, la...

(68)

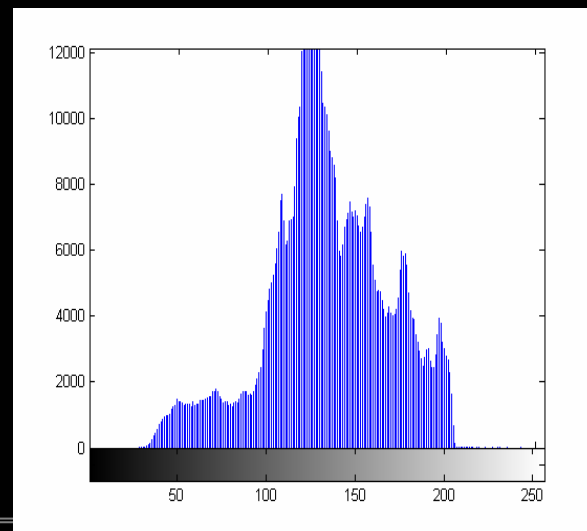
a los modos EH y HE...

Umbralización como técnica básica de segmentación en imágenes con sus píxeles agrupados en dos modos (objetos vs fondo)

$$\psi[x, y]$$



$$p_{\psi}(r)$$



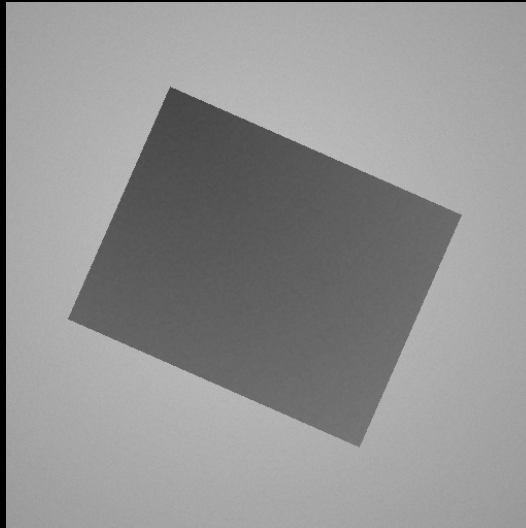
$$\theta[x, y]$$



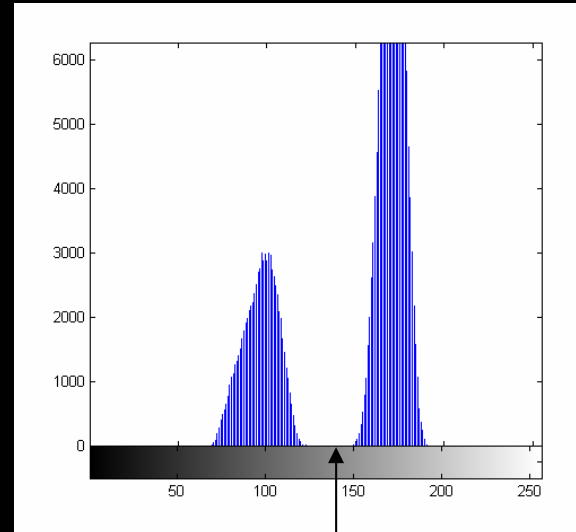
• Selección de un umbral global:

- Efecto de la iluminación sobre situaciones bimodales.
- Aplicación en entornos con fondo e iluminación controlados.
- Selección automática del umbral.

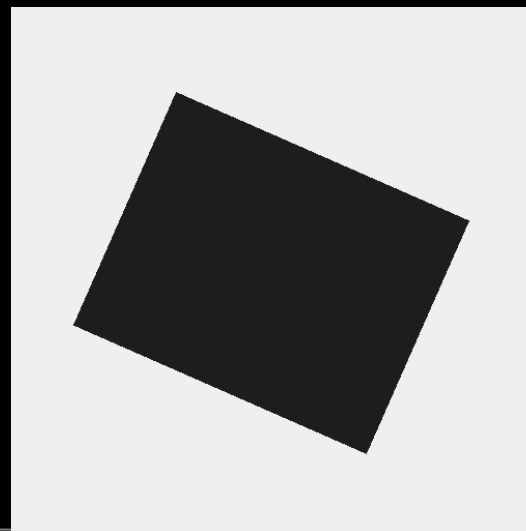
$\psi[x, y]$



$p_\psi(r)$



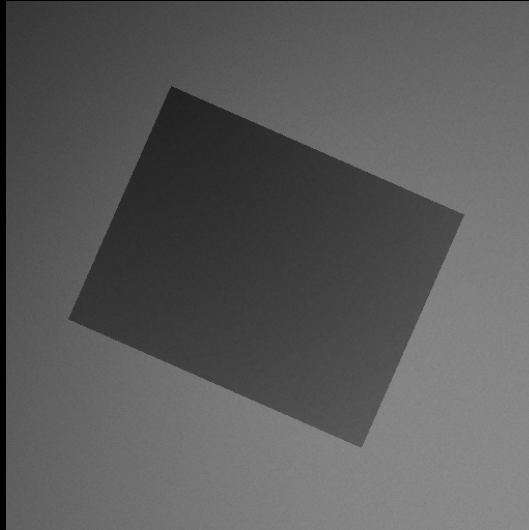
$T = 140$



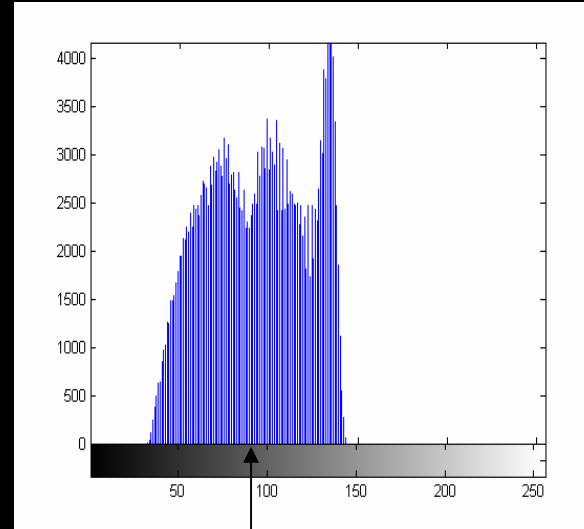
$$\theta[x, y] = \begin{cases} s_a & , r > T \\ s_b & , r \leq T \end{cases}$$

Modificaciones de niveles: Umbralización de imágenes bimodales

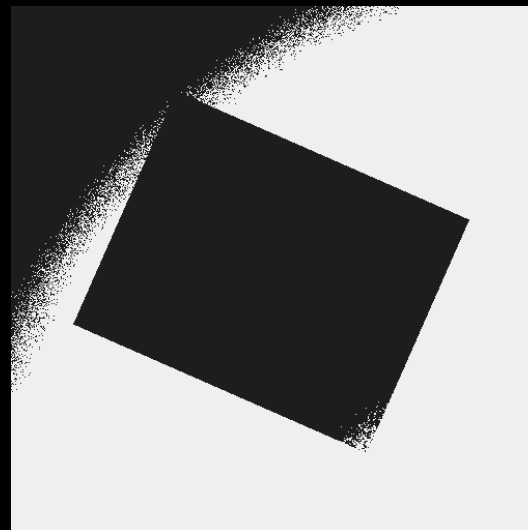
$\psi[x, y]$



$p_\psi(r)$



$T = 88$

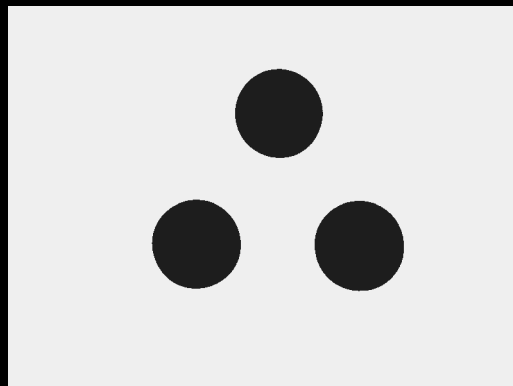
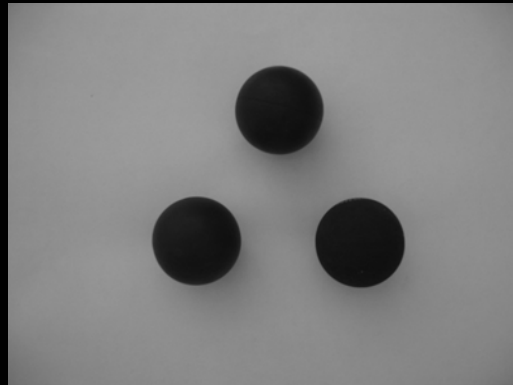


$$\theta[x, y] = \begin{cases} s_a & , r > T \\ s_b & , r \leq T \end{cases}$$

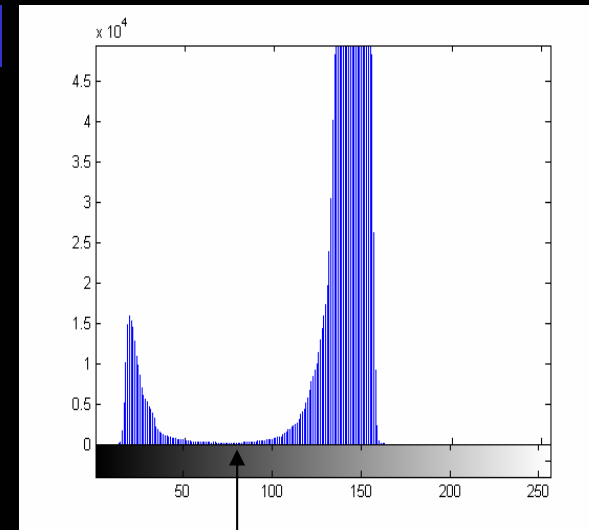
PSEUDOCODIGO

- 1- $T_{init} = (r_{max} - r_{min}) / 2$
- 2- Umbralización con $T_{in} = T_{init}$, obtención de los niveles medios, m_1 y m_2 , de los dos grupos de píxeles que separa el umbral, y generación de un nuevo umbral $T_{out} = (m_1 + m_2) / 2$
- 3- Repetir '2' con $T_{in} = T_{out}$ hasta que la diferencia entre el nuevo umbral y el anterior sea menor que la unidad.

$\psi[x, y]$



$p_{\psi}(r)$



$T = 84$

$$\theta[x, y] = \begin{cases} s_a & , r > T \\ s_b & , r \leq T \end{cases}$$

• Selección adaptativa del umbral:

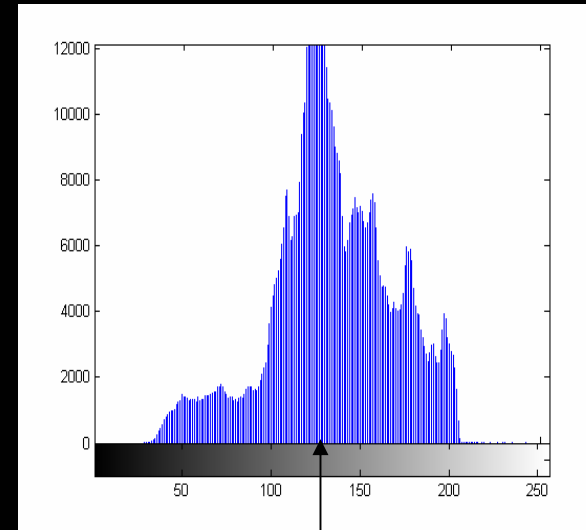
- Subdivisión de la imagen en subimágenes bimodales.
- Gestión unificada de los umbrales de cada subimagen.

Modificaciones de niveles: Umbralización de imágenes bimodales

$\psi[x, y]$



$p_\psi(r)$



$T = 135$

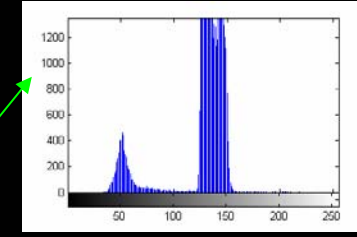
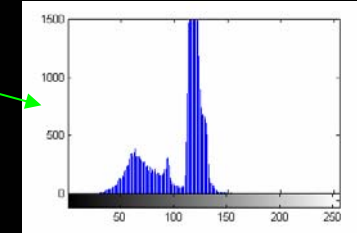
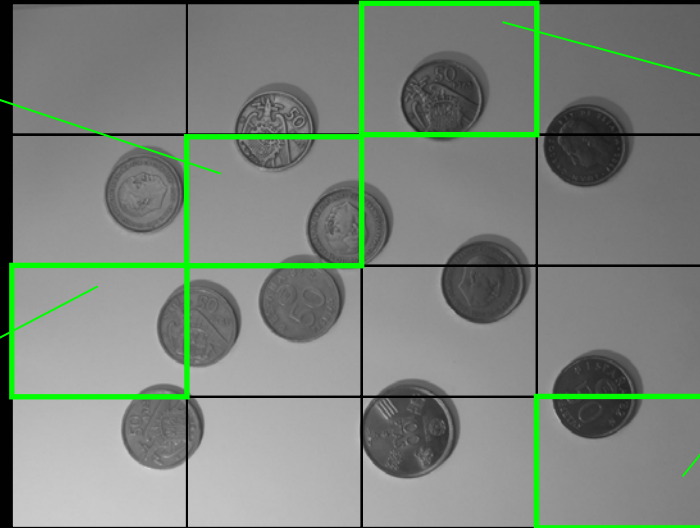
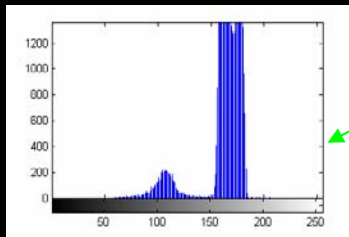
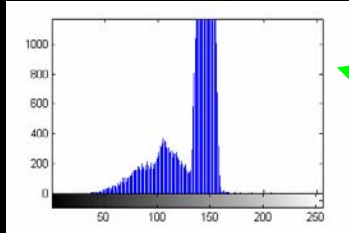
$\theta[x, y]$



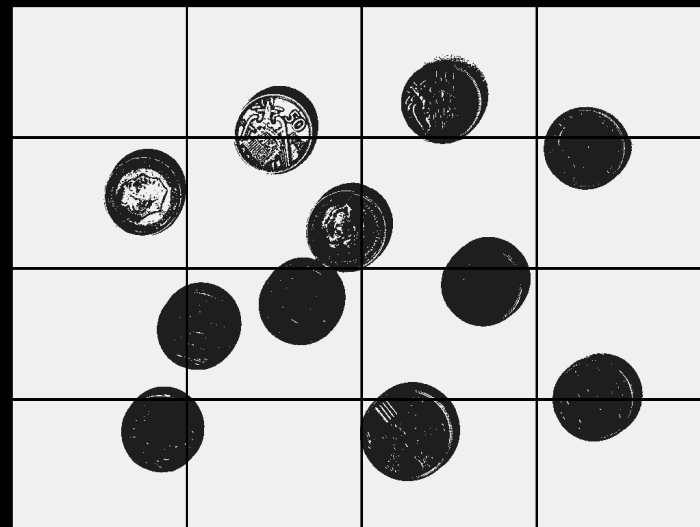
$$\theta[x, y] = \begin{cases} s_a & , r > T \\ s_b & , r \leq T \end{cases}$$

Modificaciones de niveles: Umbralización de imágenes bimodales

$\psi[x, y]$



$\theta[x, y]$

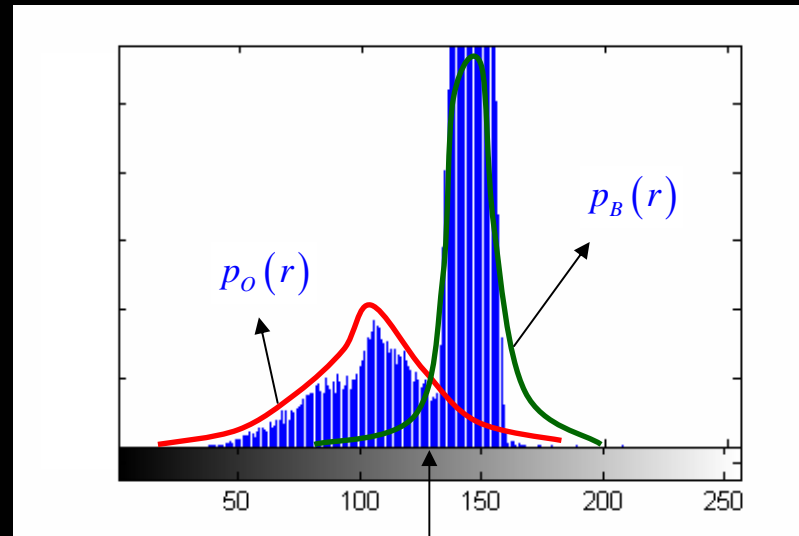


✿ Selección óptima del umbral:

- Análisis probabilístico de las distribuciones de fondo y objetos.
- Basada en suposiciones sobre las distribuciones o en ajustes de modelos paramétricos.

Modificaciones de niveles: Umbralización de imágenes bimodales

$p(r)$



T

FDP conjunta:

$$p(r) = P_o \cdot p_o(r) + P_B \cdot p_B(r) , P_B + P_o = 1$$

Probabilidad de error:

$$E(T) = P_B E_o(T) + P_o E_B(T) = P_B \int_{-\infty}^T p_o(r) \cdot dr + P_o \int_T^{\infty} p_B(r) \cdot dr$$

Condición de error mínimo:

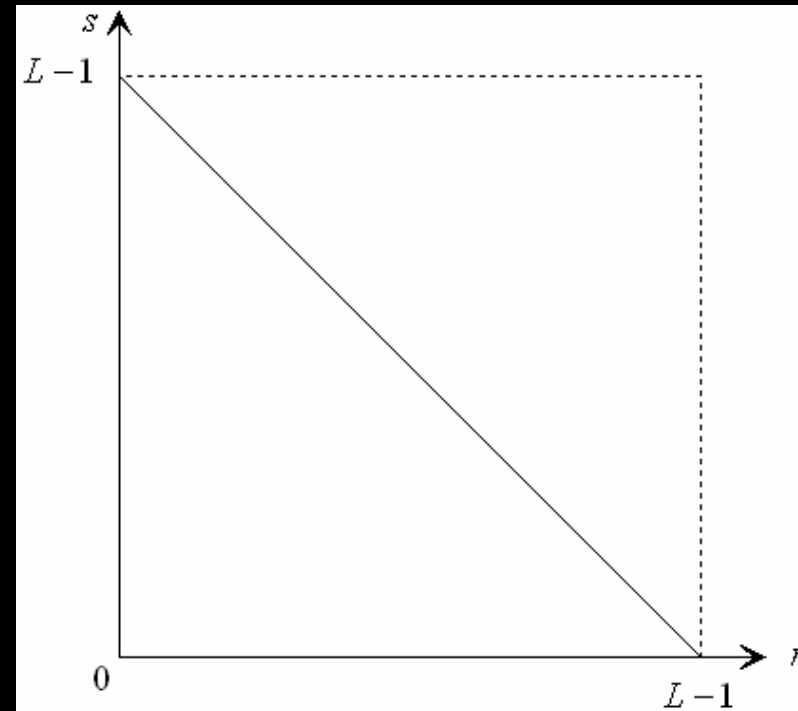
$$P_o p_o(T) = P_B p_B(T)$$

Solución para el caso Gaussiano:

$$p(r) = \frac{P_o}{\sqrt{2\pi}\sigma_o} \cdot e^{-\frac{(r-\mu_o)^2}{2\sigma_o^2}} + \frac{P_B}{\sqrt{2\pi}\sigma_B} \cdot e^{-\frac{(r-\mu_B)^2}{2\sigma_B^2}}$$

$$T = \frac{\mu_B + \mu_o}{2} + \frac{\sigma^2}{\mu_B - \mu_o} \ln \frac{P_o}{P_B} , (\sigma^2 = \sigma_B^2 = \sigma_o^2)$$

- *Inversión del eje de intensidades. Útil en aplicaciones médicas y fotográficas*



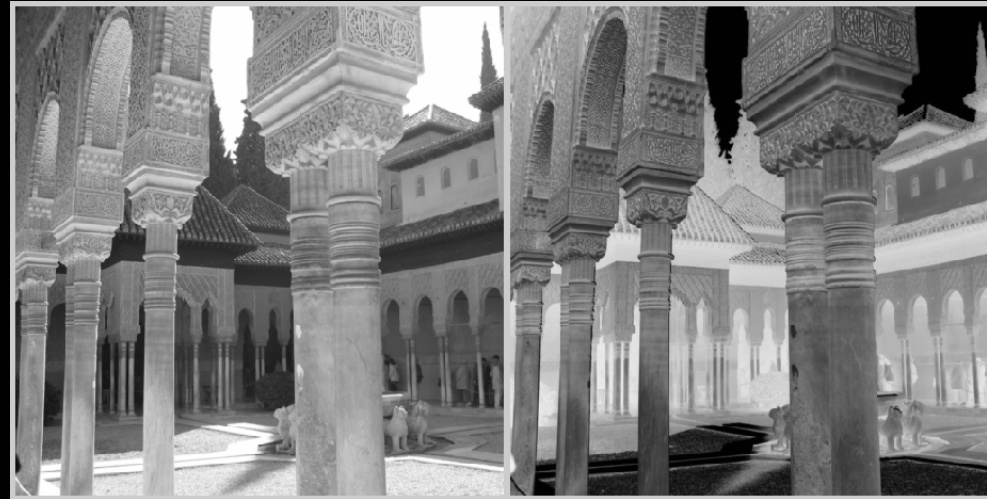
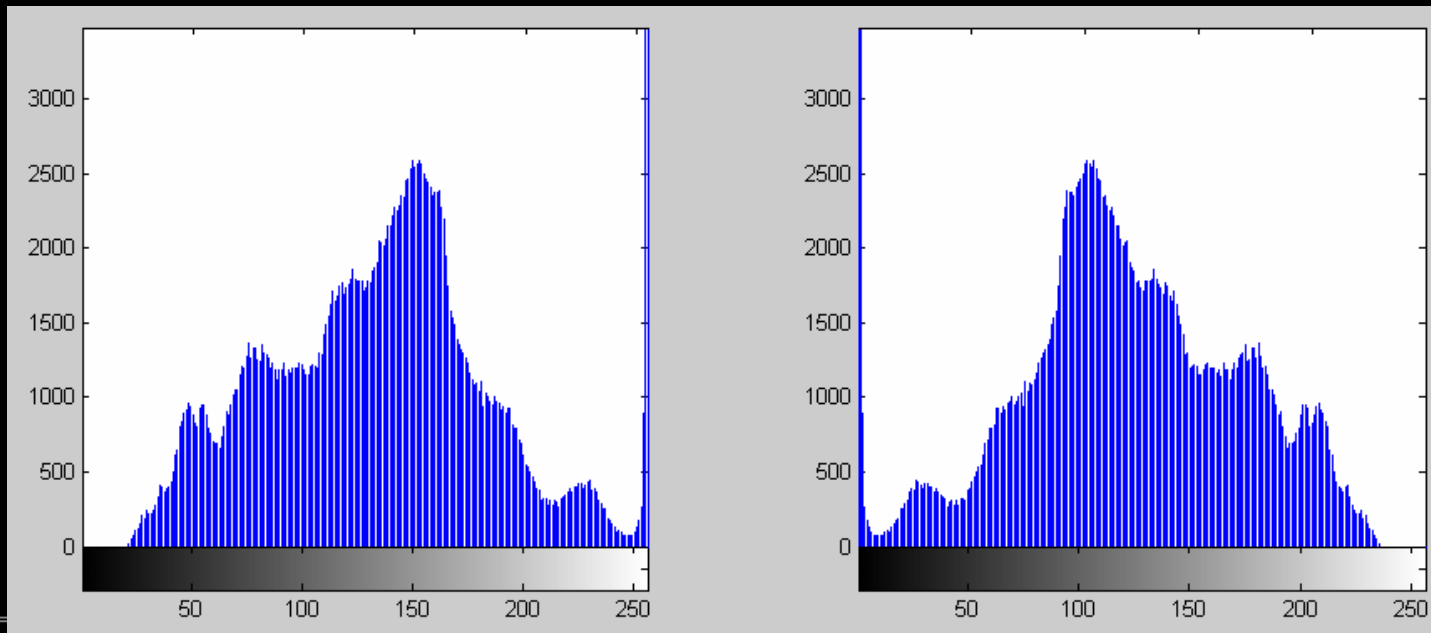


Imagen original

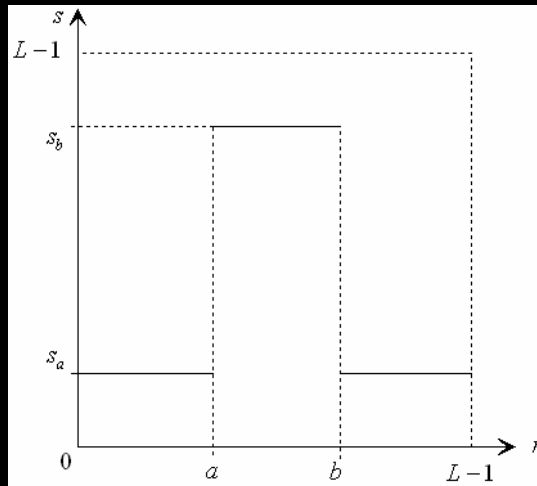
Imagen negativo



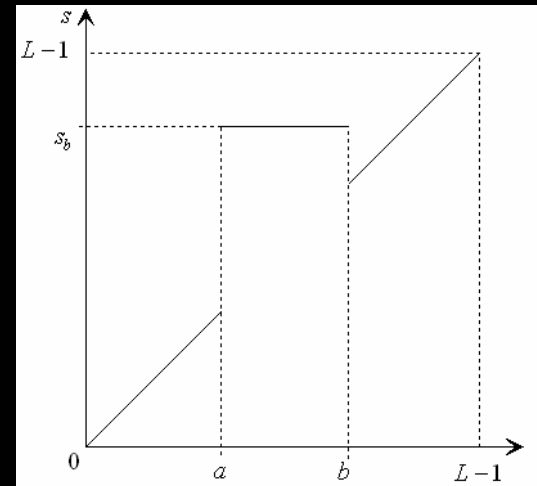
Slicing

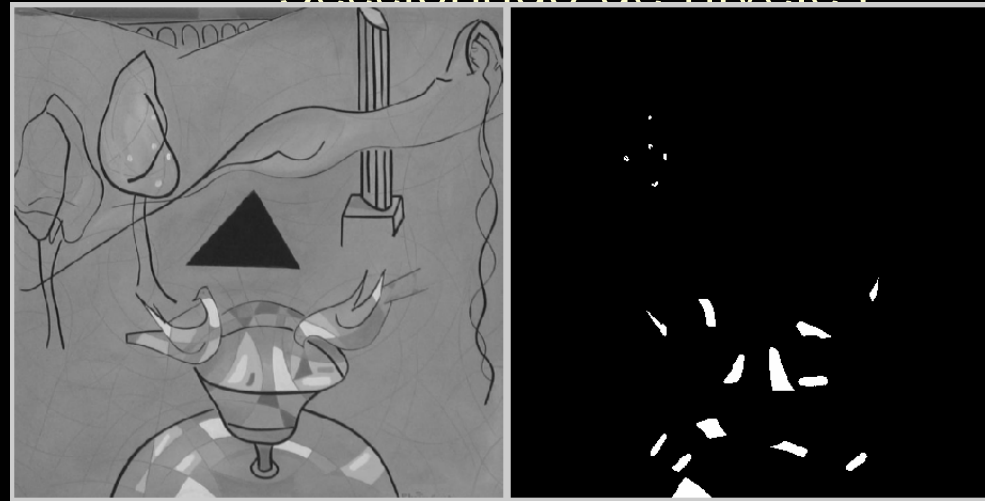
- *Objetivo: extraer una determinada banda de niveles de luminancia o resaltarla sobre el resto.*

Extracción



Resalte.

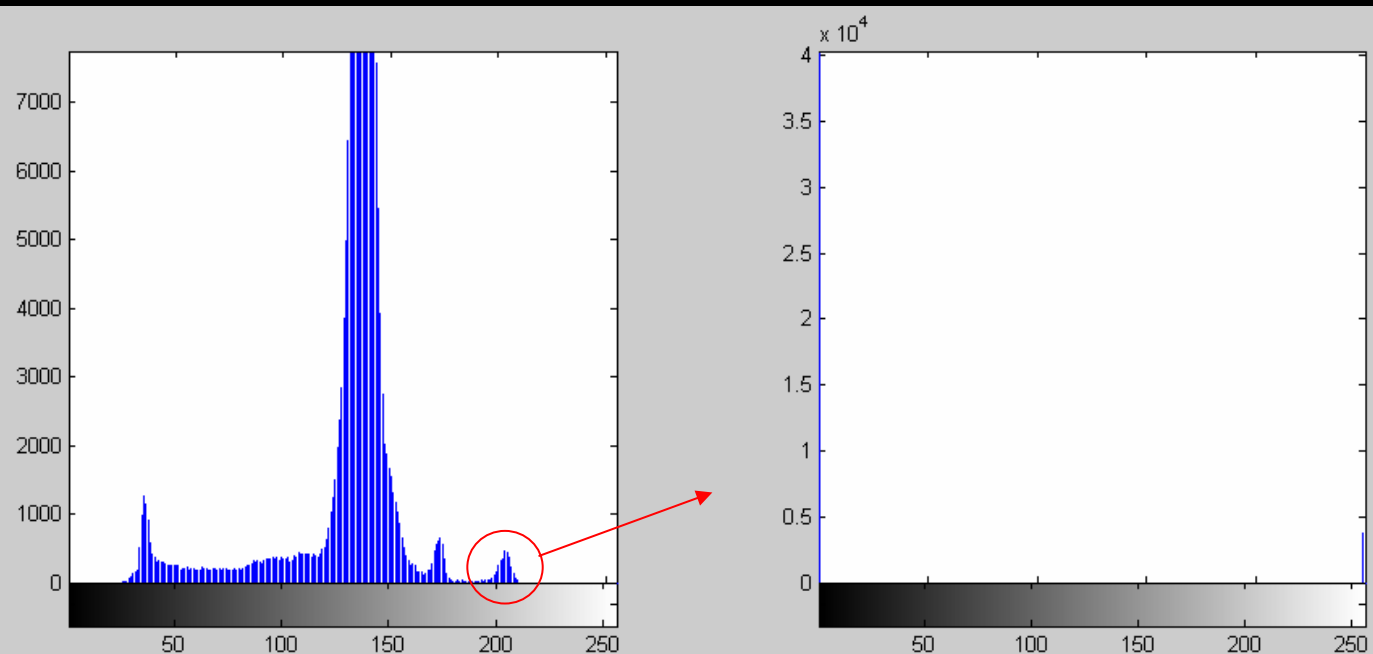




$a = 180$
 $b = 230$
 $s_a = 0$
 $s_b = 255$

Imagen original

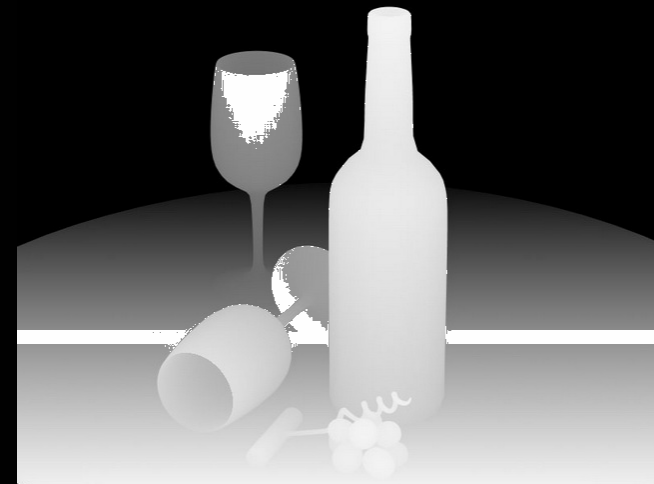
Extracción de un rango



Modificaciones de niveles: Seccionado de niveles



Imagen original



Resalte de un rango

$a = 140$
 $b = 150$
 $s_a = 0$
 $s_b = 255$

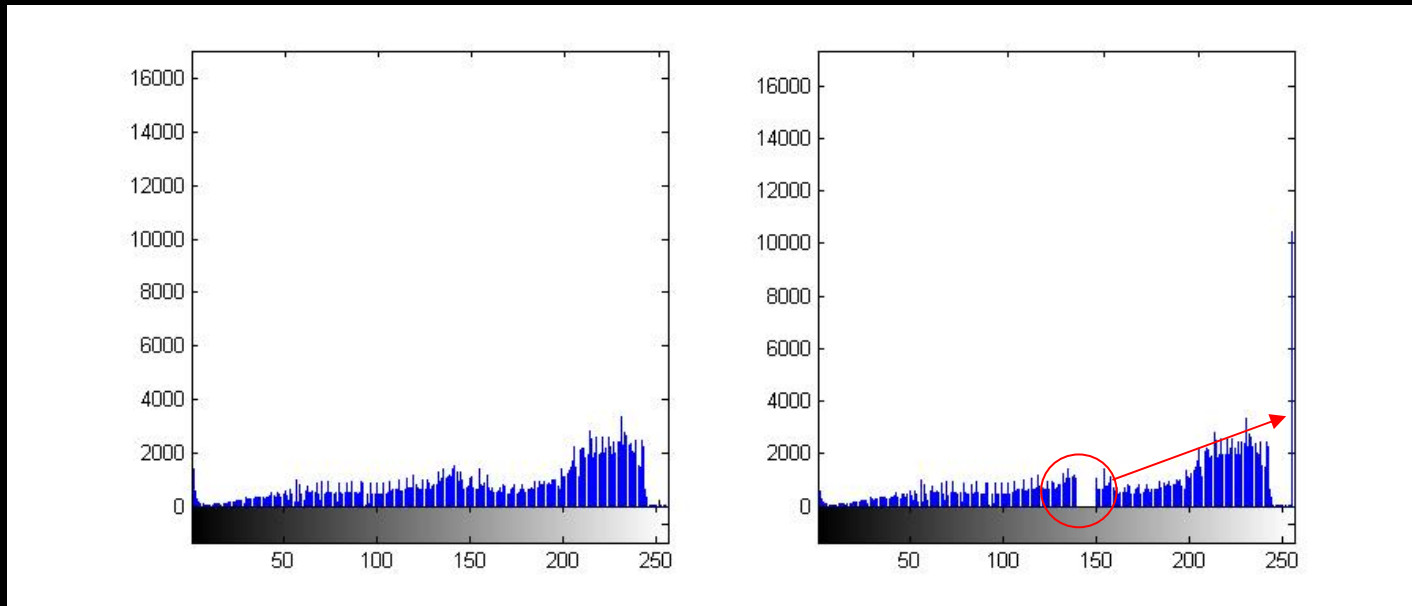


Imagen original extraída de "www.9jcg.com"

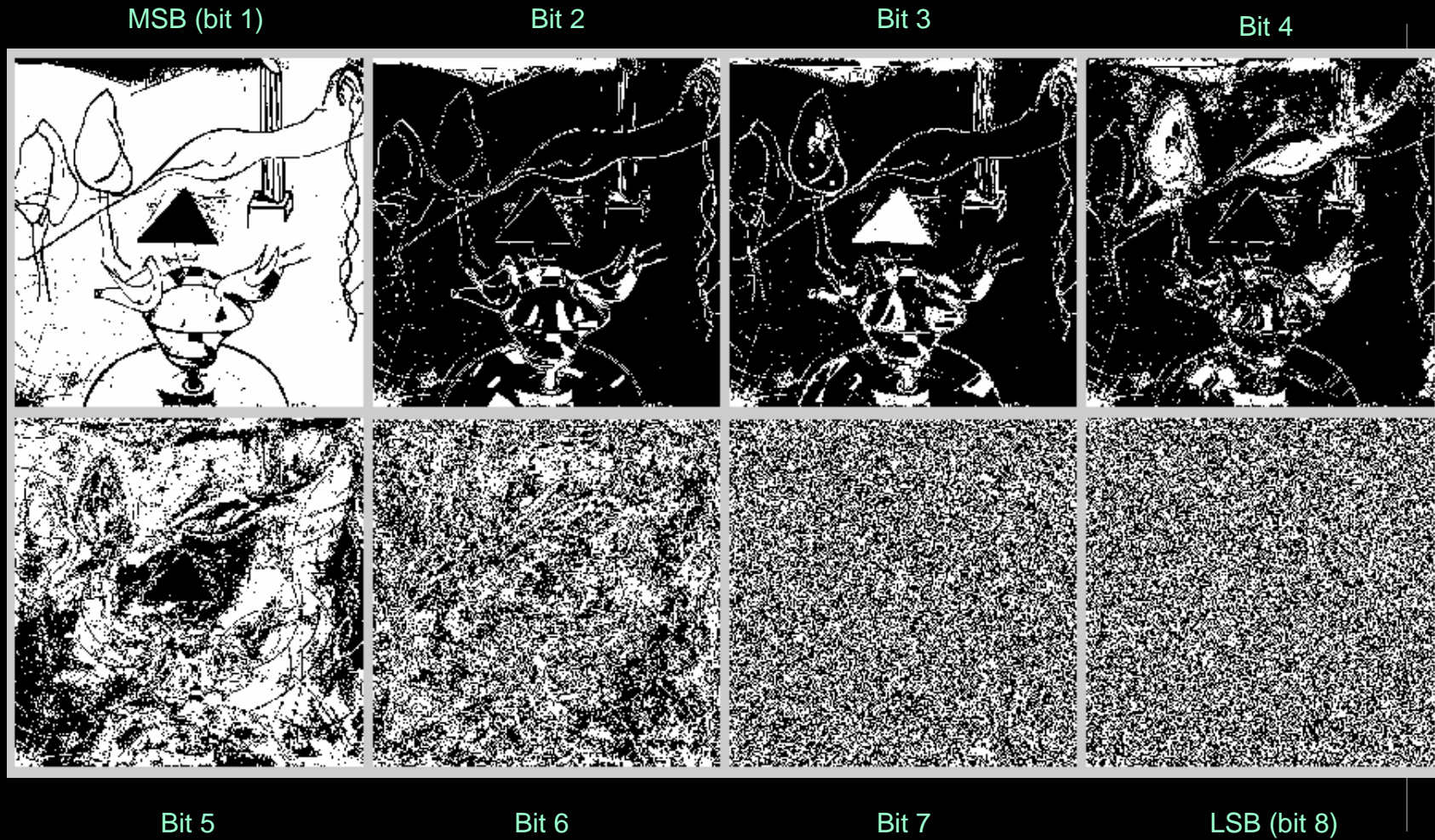
- Si cada píxel está cuantificado con B bits, de manera uniforme:

$$\psi [n_i, m_j] = r_k = q_{1k} 2^{B-1} + q_{2k} 2^{B-2} + \dots + q_{(B-1)k} 2 + q_{Bk}$$

, es posible extraer la 'imagen' correspondiente al bit n -simo aplicando:

$$s = \begin{cases} s_b & , si q_n = 1 \\ s_a & , si q_n = 0 \end{cases}$$

- Útil para discernir cuántos bits son significativos en una imagen



- *Útil para situaciones en que el rango dinámico de la imagen es enorme, por ejemplo para visualizar transformadas*

- Introducción
- Modelado de histograma
- Modificaciones de niveles
- Aspectos operativos
 - Manejo de la VLT
- Operaciones binarias

- ✿ Redondeos y truncamientos.
- ✿ Las técnicas de modelado de histograma exigen su cálculo: $M \cdot N$ sumas y direccionamientos.
- ✿ Modificación de la imagen. Manejo de la VLT (*Video Look-up Table*)
 - La modificación directa del valor de cada píxel de la imagen supone $M \cdot N$ operaciones y direccionamientos.
 - En imágenes de luminancia (sin VLT) basta con precalcular la transformación (L operaciones) y luego modificar el valor de cada píxel ($M \cdot N$ direccionamientos).
 - En imágenes con VLT basta con L operaciones.

- Introducción
- Modelado de histograma
- Modificaciones de niveles
- Aspectos operativos
- Operaciones binarias
 - Aritméticas
 - Lógicas

- El resultado depende del valor de dos píxeles *homólogos* que actúan como operandos:

$$\begin{aligned}
 \psi_1[n, m] / \psi_1[n_i, m_j] = r_k &\xrightarrow{T} \theta[n, m] / \theta[n_i, m_j] = s_p = T(r_k, r_l), \\
 \psi_2[n, m] / \psi_2[n_i, m_j] = r_l & \\
 j \in [0, M - 1], i \in [0, N - 1], & \\
 k \in [0, L_1 - 1], l \in [0, L_2 - 1], p \in [0, L - 1] &
 \end{aligned}$$

- Resta de imágenes: visualización de errores, eliminación de ruido, obtención de máscaras de movimiento, localización de nuevos objetos o de objetos ausentes (robo / abandono), etc.
- Suma: gestión de transparencias, adición de ruido, promediado de imágenes, etc.
- Multiplicación: selección de regiones, filtrado, etc.



$\psi_t[x, y]$



$\psi_{t-T}[x, y]$



$$\theta[x, y] = \psi_{t-T}[x, y] - \psi_t[x, y]$$



$T = 3$

$T = 30$

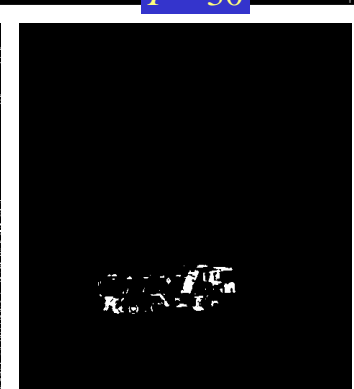
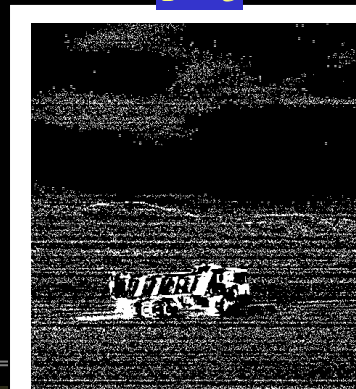


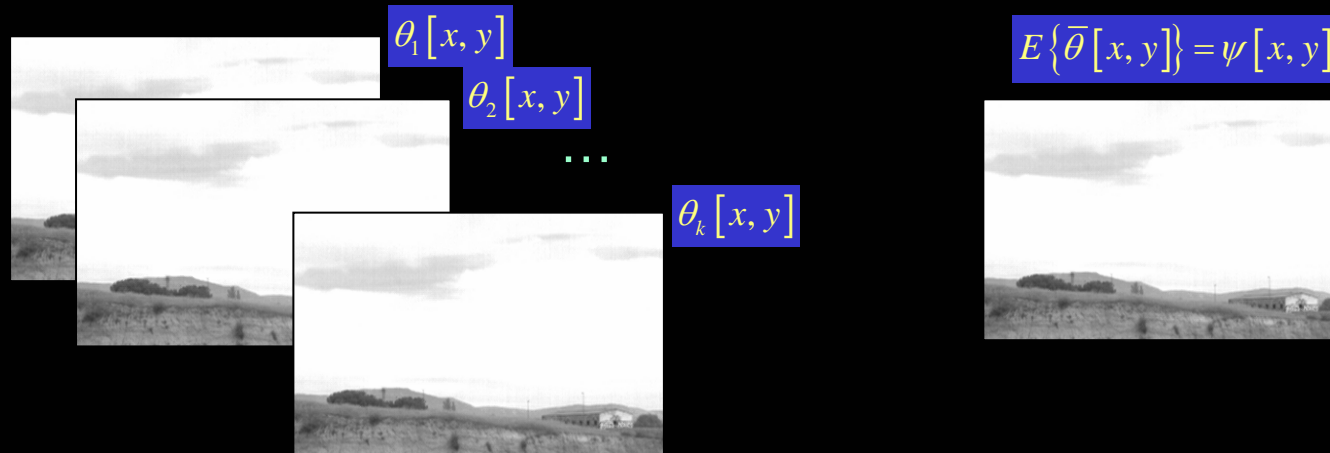
Imagen ruidosa:

$$\theta[x, y] = \psi[x, y] + \eta[x, y] \text{ con } \eta[x, y] \text{ incorrelado y de media nula.}$$

Si se promedian K imágenes:

$$\bar{\theta}[x, y] = \frac{1}{K} \sum_{i=1}^K \theta_i[x, y]$$

$$\Rightarrow \begin{cases} E\{\bar{\theta}[x, y]\} = \psi[x, y] \\ \sigma_{\bar{\theta}[x, y]}^2 = \frac{1}{K} \sigma_{\eta[x, y]}^2 \end{cases}$$



$$\bar{\eta}[x, y] = 0.43$$

$$\sigma_{\eta[x, y]}^2 = 8.38$$



$\psi_1[x, y]$



$\psi_2[x, y]$

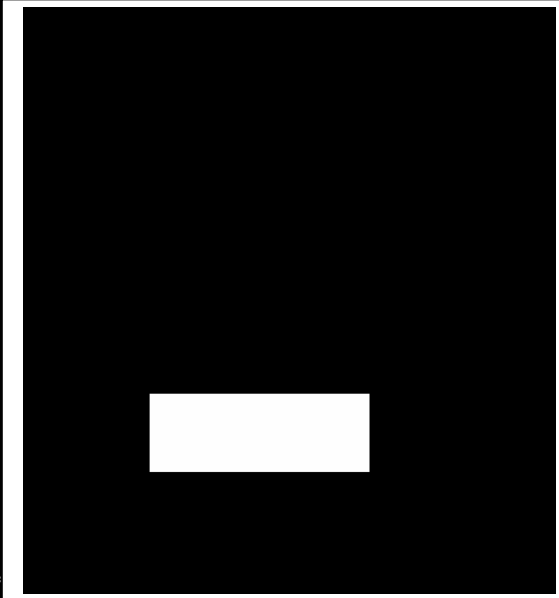
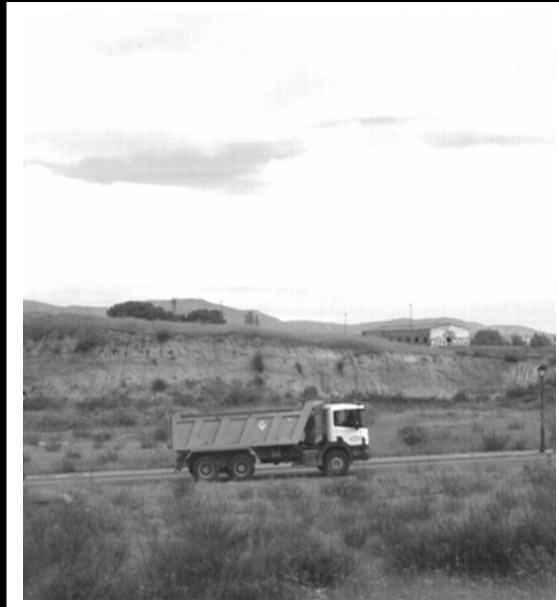
+

$$\theta[x, y] = \psi_1[x, y] + \psi_2[x, y]$$



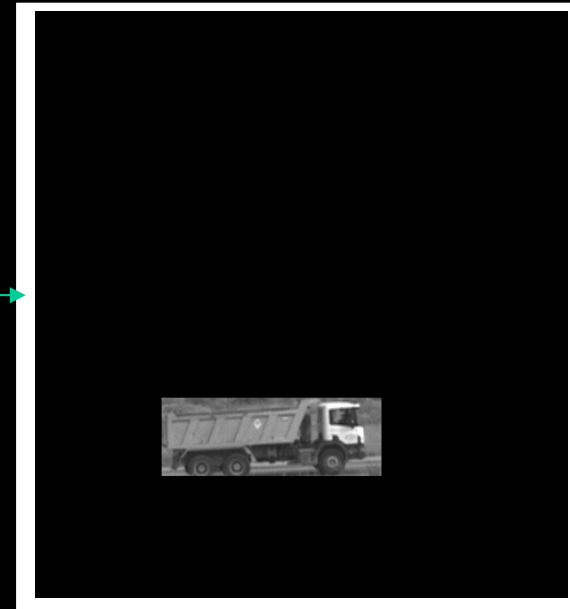
Al menos uno de los operandos es una imagen binaria (**TRUE-1, FALSE-0**) o máscara. Si la otra es binaria, el resultado es binario; si no, se efectúa una operación lógica a nivel de bit.

- AND: selección de regiones de interés, operadores morfológicos.
- OR: selección de regiones de interés, operadores morfológicos.



AND

$$\theta[x, y] = \psi_1[x, y] \cap \psi_2[x, y]$$



- **Introducción**
- **Modelado de histograma**
 - Ajuste de contraste
 - Igualación de histograma
 - Especificación de histograma
- **Modificaciones de niveles**
 - Recorte y umbralización
 - Umbralización de imágenes bimodales
 - Negativo
 - Seccionado de niveles
 - Extracción de bandas a nivel de bit
 - Compresión logarítmica de rango
- **Aspectos operativos**
 - Manejo de la VLT
- **Operaciones binarias**
 - Aritméticas
 - Lógicas

Estas transparencias están editadas a partir de las generadas por el profesor

Jesús Bescós Cano durante sus años de impartición de esta asignatura.