

Temas Avanzados en Procesado de Señales

Tratamiento Digital de Señales Visuales

Tema 2: Señales y Sistemas Multidimensionales

...sistemas lineales, análisis frecuencial, teoría de retículos, teorema de muestreo generalizado, interpolación, cuantificación...

José María Martínez Sánchez



Escuela Politécnica Superior



Universidad Autónoma de Madrid
E28049 Madrid (SPAIN)



Video Processing and Understanding Lab
Grupo de Tratamiento e Interpretación de Vídeo



Índice



- Introducción
- Análisis frecuencial de señales multidimensionales
- Muestreo de señales multidimensionales
- Interpolación de señales discretas multidimensionales
- Cuantificación
- La imagen digital

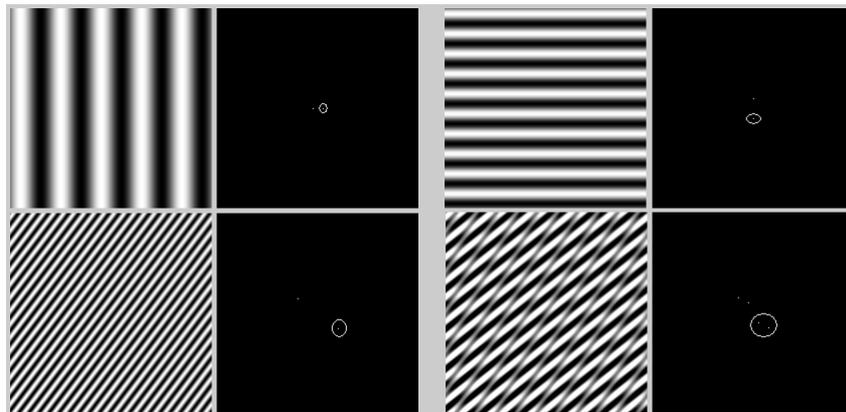
- El objetivo de este capítulo es extender conceptos de TS básicos, conocidos en señales unidimensionales, al terreno de las señales multidimensionales:
 - Señales y sistemas
 - Transformada de Fourier
 - Análisis frecuencial
 - Muestreo y reconstrucción
 - Interpolación y diezclado
 - Cuantificación

- Introducción
- Análisis frecuencial de señales multidimensionales
- Muestreo de señales multidimensionales
- Interpolación de señales discretas multidimensionales
- Cuantificación
- La imagen digital

- Revisión de señales y sistemas 1D
- Señales y sistemas multidimensionales (KD)
 - Señal multidimensional $\psi(\vec{x})$
 - La función $\delta(\vec{x})$
 - Sistemas LSI (*Linear Shift Invariant*).
 - Respuesta de un sistema LSI a una señal cualquiera.
 - Análisis frecuencial en sistemas LSI.
 - Casos prácticos en 2D:
 - Señales sinusoidales, Señales típicas, Señales de casos reales

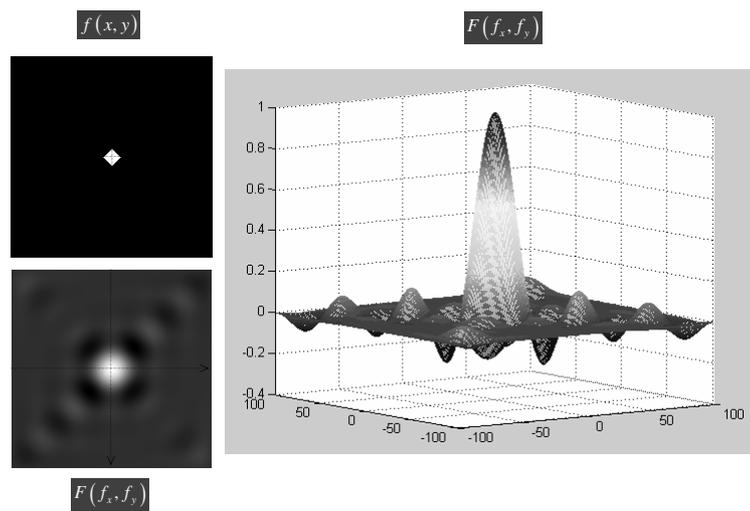
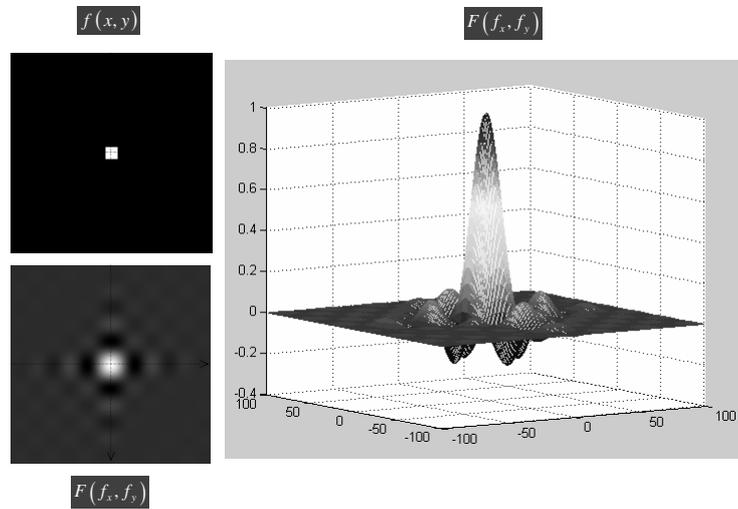
$$f(x, y) = \sin(10 \cdot \pi \cdot x)$$

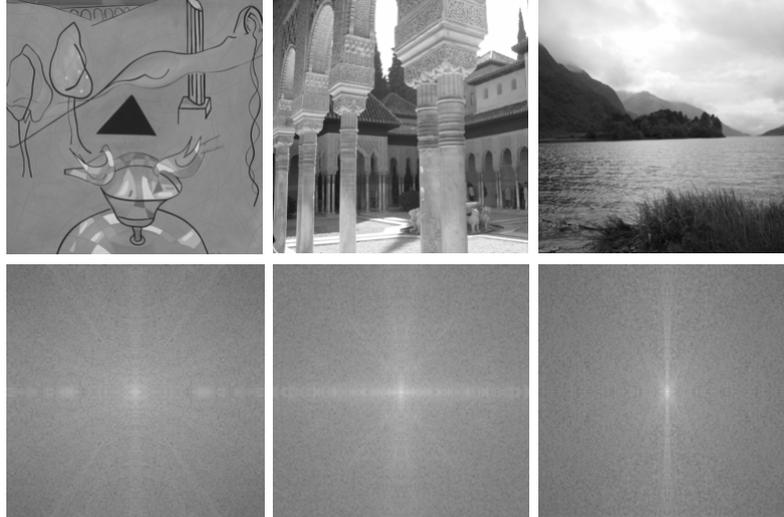
$$f(x, y) = \sin(20 \cdot \pi \cdot y)$$



$$f(x, y) = \sin(40 \cdot \pi \cdot x + 30 \cdot \pi \cdot y)$$

$$f(x, y) = \sin(10 \cdot \pi \cdot x + 20 \cdot \pi \cdot y) + \sin(30 \cdot \pi \cdot x + 30 \cdot \pi \cdot y)$$



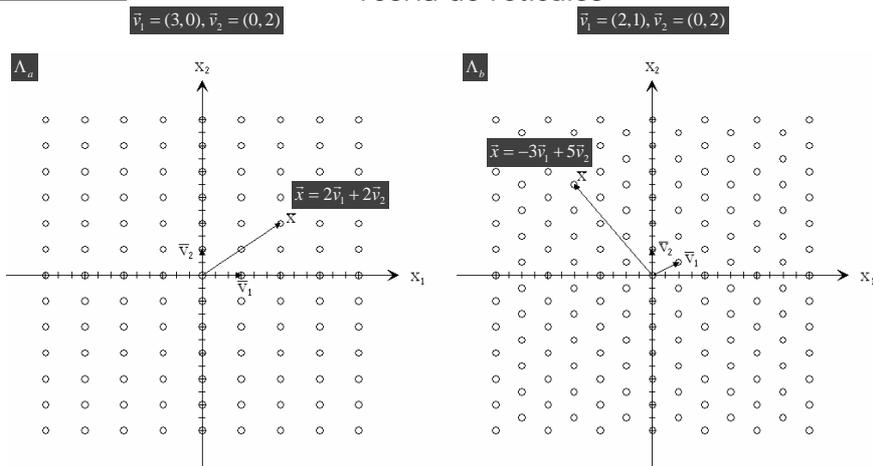


- Introducción
- Análisis frecuencial de señales multidimensionales
- Muestreo de señales multidimensionales
 - Teoría de retículos
 - Teoría de muestreo 1D -KD
 - Muestreo de imágenes
- Interpolación de señales discretas multidimensionales
- Cuantificación
- La imagen digital

• **Retículo (lattice):** conjunto de vectores que puede generarse como combinación lineal entera de un conjunto de vectores base linealmente independientes.

- Dado un conjunto de k vectores $\vec{v}_i \in \mathbb{R}^k$, que forman una base de \mathbb{R}^k , se define el retículo:

$$\Lambda = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^k / \vec{x} = \sum_{i=1}^k n_i \cdot \vec{v}_i, \forall n_i \in \mathbb{Z} \right\}$$

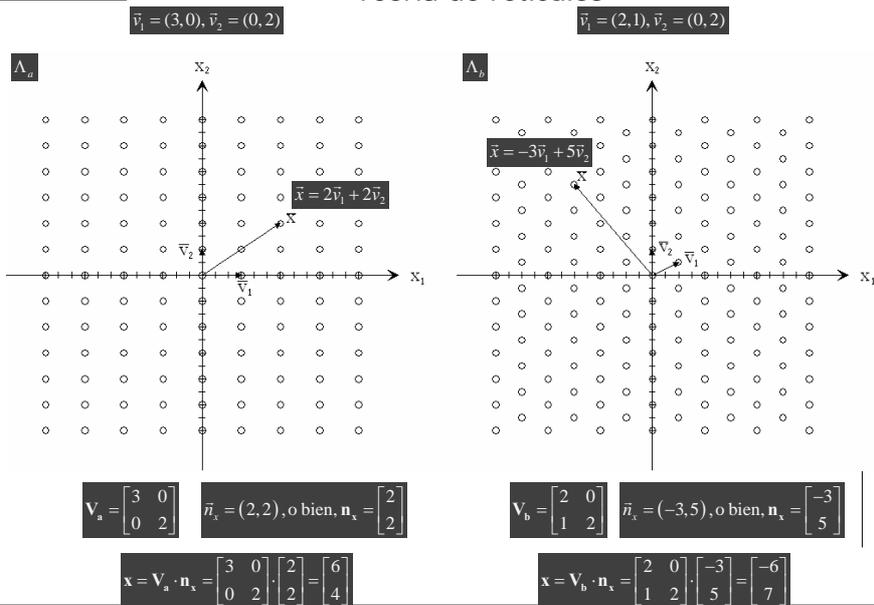


• *Matriz generatriz del retículo:*

$$\mathbf{V} = [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k]$$

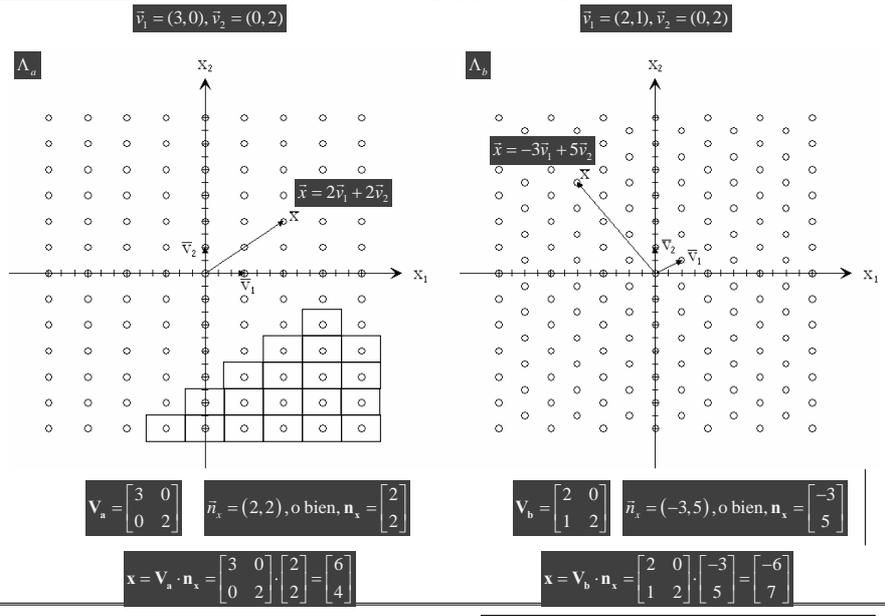
• El vector de coeficientes, $\vec{n} = (n_1, n_2, \dots, n_k)$, $n_i \in \mathbb{Z}$,
expresa \vec{x} en función de $\vec{v}_i \in \mathbb{Z}^k$, de modo que:

$$\mathbf{x} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{n}$$



• Conceptos y definiciones:

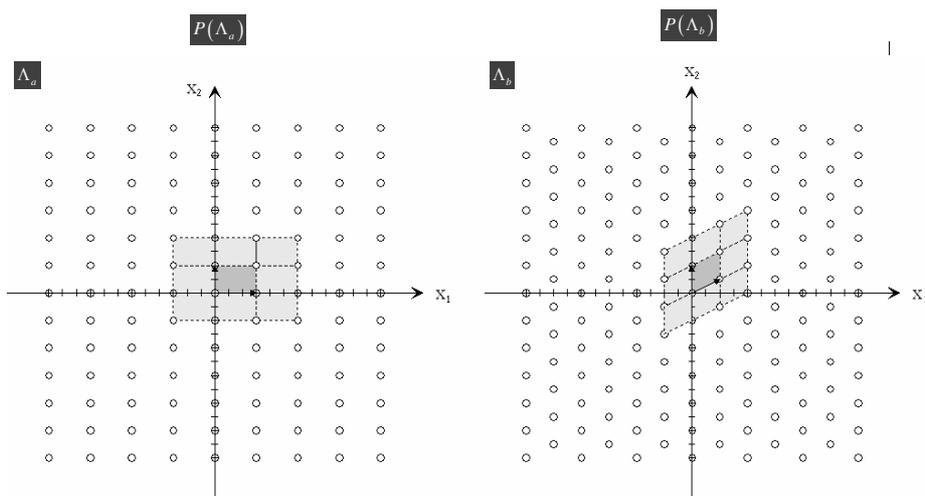
- Celda unidad: región, $C(\Lambda)$, que trasladada a todos los puntos del retículo crea una partición del espacio \mathbb{R}^k .



• Conceptos y definiciones:

- Celda unidad: región, $C(\Lambda)$, que trasladada a todos los puntos del retículo crea una partición del espacio \mathbb{R}^k .
- Paralelepípedo fundamental: celda unidad poligonal que encierran los vectores de la matriz generatriz.

$$P(\Lambda) = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^k / \vec{x} = \sum_{i=1}^k \alpha_i \cdot \vec{v}_i, \forall \alpha_i, 0 \leq \alpha_i \leq 1 \right\}$$

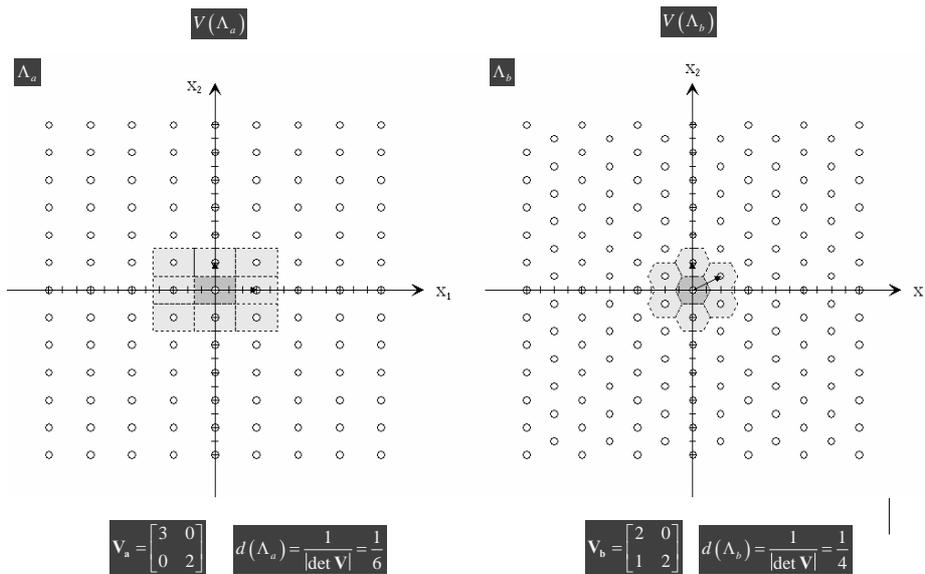


- Celda de Voronoi: *celda unidad que dista del origen menos que de cualquier otro punto del retículo.*

$$V(\Lambda) = \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^k / d(\vec{x}, \vec{0}) < d(\vec{x}, \vec{p}), \forall \vec{p} \in \Lambda \}$$

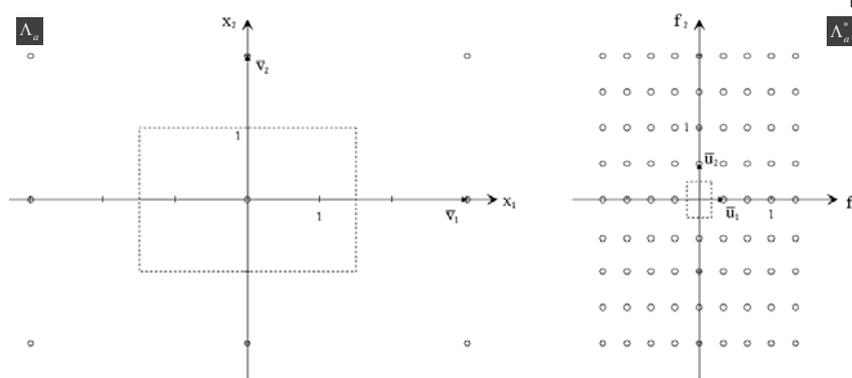
- Densidad: *inverso de la longitud, área, volumen, etc. de la celda unidad.*

$$d(\Lambda) = \frac{1}{|\det \mathbf{V}|}$$



- Retículo recíproco: dado el retículo Λ , definido por la matriz \mathbf{V} , el retículo recíproco, Λ^* , viene dado por una matriz \mathbf{U} tal que:

$$\mathbf{U} = (\mathbf{V}^T)^{-1} \Rightarrow \mathbf{V}^T \cdot \mathbf{U} = \mathbf{V}^T \cdot (\mathbf{V}^T)^{-1} = \mathbf{I} \Rightarrow \begin{cases} \vec{v}_i \cdot \vec{u}_i = 1, & i = j \\ \vec{v}_i \cdot \vec{u}_j = 0, & i \neq j \\ \det \mathbf{V} = 1/\det \mathbf{U} \end{cases}$$



$$\mathbf{V}_a = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$d(\Lambda_a) = \frac{1}{|\det \mathbf{V}|} = \frac{1}{6}$$

$$\mathbf{U}_a = (\mathbf{V}_a^T)^{-1} = \begin{bmatrix} 1/3 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

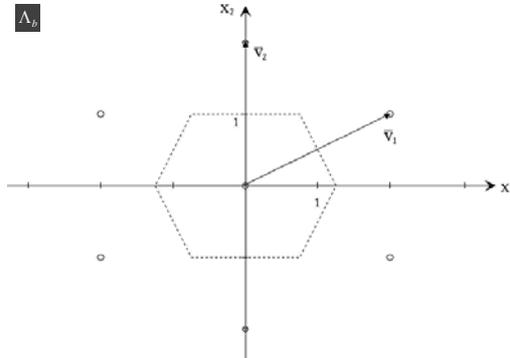
$$d(\Lambda_a^*) = \frac{1}{|\det \mathbf{U}_a|} = 6$$



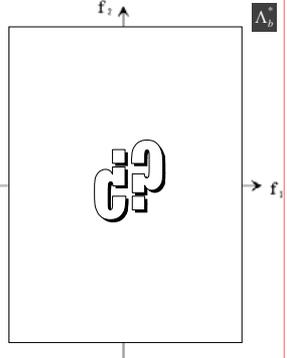
Muestreo de señales multidimensionales:
Teoría de retículos



Λ_b



Λ_b



$$\mathbf{V}_b = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$d(\Lambda_b) = \frac{1}{|\det \mathbf{V}|} = \frac{1}{4}$$

$$\mathbf{U}_b =$$

TAPS: Tratamiento Digital de Señales Visuales (JoseM.Martinez@uam.es) Octubre 2010

Sistemas y Señales Multidimensionales

23



Muestreo de señales multidimensionales:
Teoría de retículos



• Periodicidad en espacios multidimensionales:

- 1D: $f(x)$ periódica $\Rightarrow f(x) = f(x + n \cdot X), \forall n \in \mathbb{Z}$
- Periodo: X
- KD: $\psi(\vec{x})$ periódica $\Rightarrow \psi(\vec{x}) = \psi(\vec{x} + \mathbf{V} \cdot \mathbf{n}), \forall \mathbf{n} \in \mathbb{Z}^k$
- Periodo: $V(\Lambda), \Lambda$ definido por \mathbf{V}

TAPS: Tratamiento Digital de Señales Visuales (JoseM.Martinez@uam.es) Octubre 2010

Sistemas y Señales Multidimensionales

24

• Ejercicios: *hacer un análisis comparativo (representación, celdas, densidad, etc.) de las siguientes parejas de retículos de los que se especifica la base de vectores que los genera.*

▪ 1D: $\Lambda_a = \{x \in \mathbb{Z} / x = n \cdot v, \forall n_i \in \mathbb{Z}\}, v = 3$
 $\Lambda_b = \{x \in \mathbb{Z} / x = n \cdot v, \forall n_i \in \mathbb{Z}\}, v = 5$

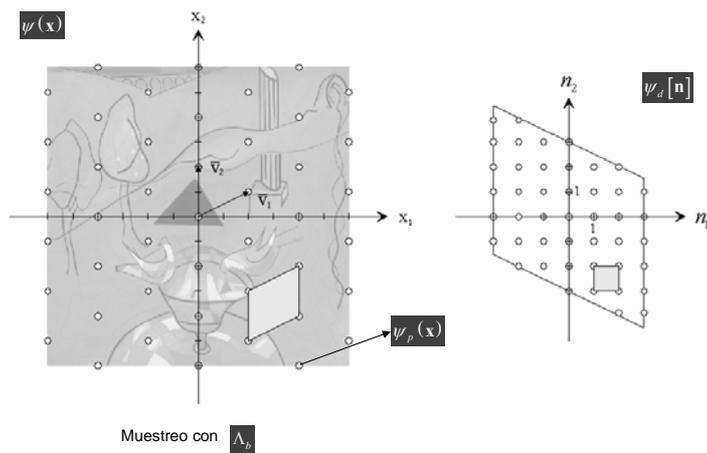
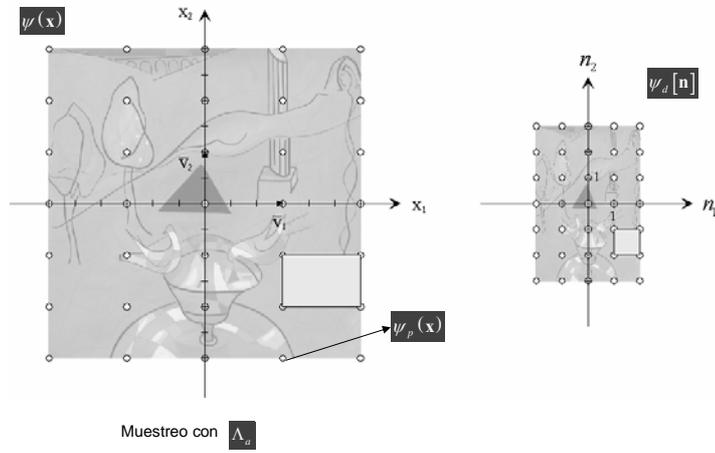
▪ 2D: $\Lambda_a = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{Z}^2 / \vec{x} = \sum_{i=1}^2 n_i \cdot \vec{v}_i, \forall n_i \in \mathbb{Z} \right\}, \vec{v}_1 = (2, 0), \vec{v}_2 = (1, 1)$
 $\Lambda_b = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{Z}^2 / \vec{x} = \sum_{i=1}^2 n_i \cdot \vec{v}_i, \forall n_i \in \mathbb{Z} \right\}, \vec{v}_1 = (2, 1), \vec{v}_2 = (0, 2)$

▪ 3D: $\Lambda_a = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{Z}^3 / \vec{x} = \sum_{i=1}^3 n_i \cdot \vec{v}_i, \forall n_i \in \mathbb{Z} \right\}, \vec{v}_1 = (1, 0, 0), \vec{v}_2 = (0, 1, 0), \vec{v}_3 = (0, 0, 2)$
 $\Lambda_b = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{Z}^3 / \vec{x} = \sum_{i=1}^3 n_i \cdot \vec{v}_i, \forall n_i \in \mathbb{Z} \right\}, \vec{v}_1 = (1, 0, 0), \vec{v}_2 = (0, 2, 0), \vec{v}_3 = (0, 0, 1)$

Revisión y enfoque alternativo de la teoría de muestreo 1D

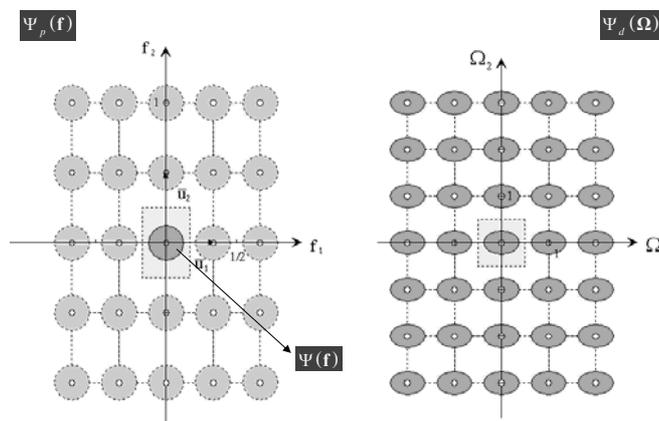
• Modelo de muestreo:

- Señal de muestreo: deltas sobre los puntos de una estructura de muestreo o retículo.
- Producto de la señal a muestrear por la señal de muestreo.
- Señal discreta multidimensional

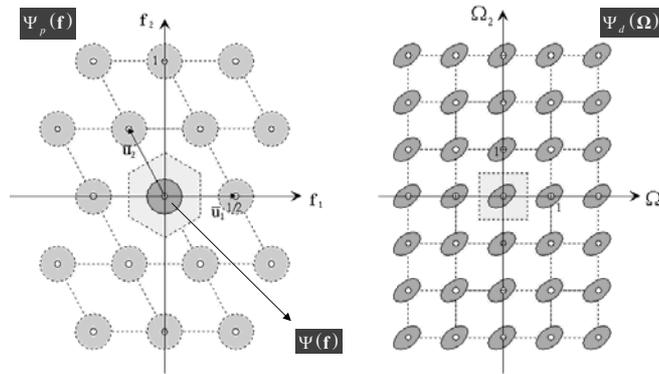


- Análisis frecuencial. El Teorema de *Nyquist* generalizado.

- Análisis frecuencial. El Teorema de *Nyquist* generalizado.



- Análisis frecuencial. El Teorema de *Nyquist* generalizado.



- Recuperación de la señal a partir de sus muestras. Compromiso entre la pérdida de altas frecuencias y el fenómeno de *aliasing*.
- Eficiencia espectral:

$$\rho(\Lambda) = \frac{\text{volumen esfera unidad}}{\text{volumen } V(\Lambda^*)}$$

- Para el caso 2D:

$$\rho(\Lambda) = \frac{\pi}{d(\Lambda)}$$

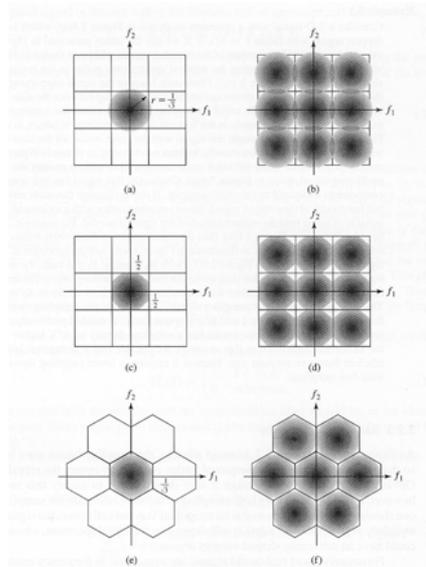


Imagen extraída de "Video processing and communications", Y. Wang, Prentice Hall, 2002

• Limitaciones prácticas

- Aperturas de los sistemas de captación y representación (MTF).
- Sobremuestreo, filtrado digital, submuestreo.
- Reconstrucción por interpolación de orden limitado.

• Efecto *Moiré* y respuesta a una entrada constante (*Flat Field Response*)

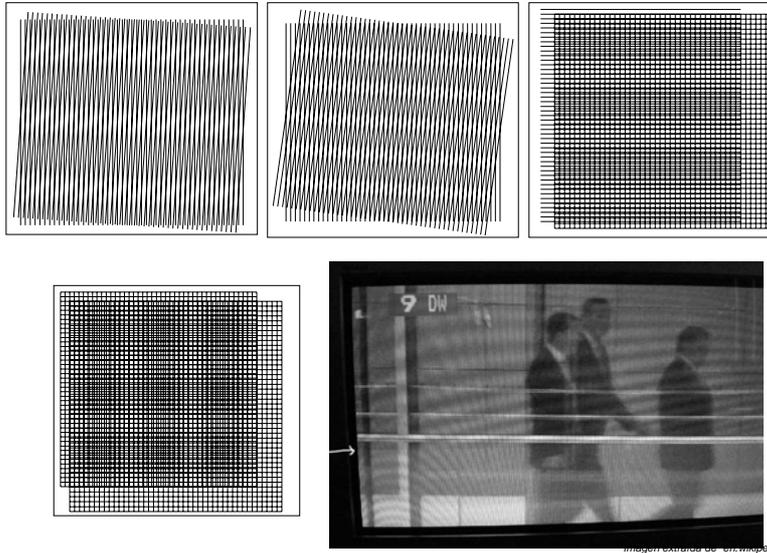


Imagen extraída de "en.wikipedia.org"

- Introducción
- Análisis frecuencial de señales multidimensionales
- Muestreo de señales multidimensionales
- Interpolación de señales discretas multidimensionales
 - Revisión 1D
 - Análisis cualitativo en imágenes
- Cuantificación
- La imagen digital

- En el diezmado de una señal discreta puede producirse el fenómeno de *aliasing*. Si se quiere evitar es necesario llevar a cabo un filtrado paso bajo ideal previo con respuesta en frecuencia:

$$H_p(\Omega) = \begin{cases} 1 & |\Omega| < f_D/2 \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

- , donde f_D es el inverso del factor entero de diezmado D .
- El proceso de interpolación no produce *aliasing*, ni supone pérdida ni ganancia de información. Los valores de la señal interpolada dependen del filtro interpolador. La señal interpolada mantiene la misma distribución espectral relativa que la original, si el filtro es ideal:

$$H_i(\Omega) = \begin{cases} I & |\Omega| < f_i/2 \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

- , donde f_i es el inverso del factor entero de interpolación I .
- En la práctica, el filtro interpolador ideal suele sustituirse por un filtro de primer orden (interpolación lineal).

- La interpolación o diezmado por factores no enteros es posible modelarla mediante una operación conjunta de interpolación + diezmado:
 - Si netamente se reducen muestras, $D > I$, puede producirse *aliasing*, por lo que para evitarlo hay que aplicar un filtrado previo ideal:

$$H_p(\Omega) = \begin{cases} 1 & |\Omega| < I/2D \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

- Si netamente se amplían muestras, $I > D$, el filtro interpolador que evita la aparición de componentes de alta frecuencia, y que idealmente es:

$$H_i(\Omega) = \begin{cases} I & |\Omega| < I/2I \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

- , tiene un corte inferior al requerido para evitar el *aliasing*, que sería:

$$H_i(\Omega) = \begin{cases} I & |\Omega| < D/2I \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

- Operaciones como el desplazamiento de la señal discreta por un número no entero de muestras, también es posible modelarlas como una operación conjunta de interpolación + diezmado.

- Diezmado definido por una estructura de muestreo entera:

$$\Lambda_D = \left\{ \tilde{n}_D \in \mathbb{Z}^m / \tilde{n}_D = \sum_{i=1}^m k_i \tilde{v}_i, \forall k_i \in \mathbb{Z} \right\}$$

- Para evitar el efecto de *aliasing* es necesario hacer un filtrado paso bajo previo:

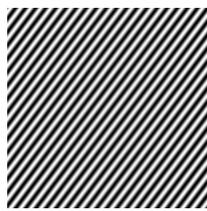
$$H_{lp}(\Omega) = \begin{cases} 1 & \Omega \in V(\Lambda_D^*) \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

- Ejemplos prácticos de situaciones en las que se produce diezmado:

- Reducción del tamaño de la imagen por factores enteros.
- Simulación del efecto de un filtro de Bayer .

$$f(x, y) = \sin(40 \cdot \pi \cdot x + 30 \cdot \pi \cdot y)$$

$\psi[n]$

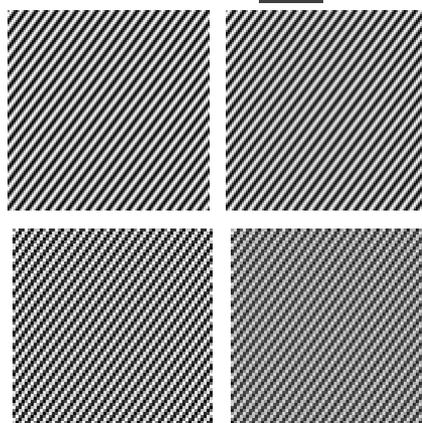


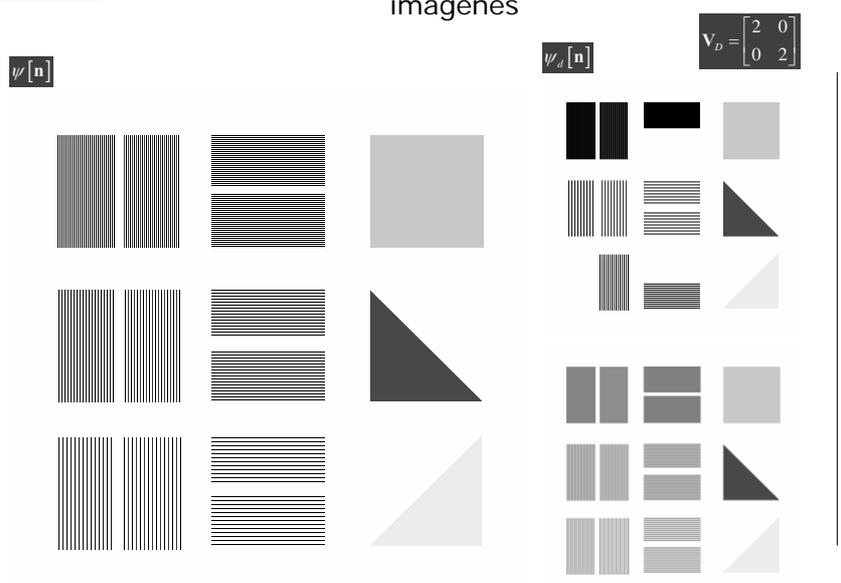
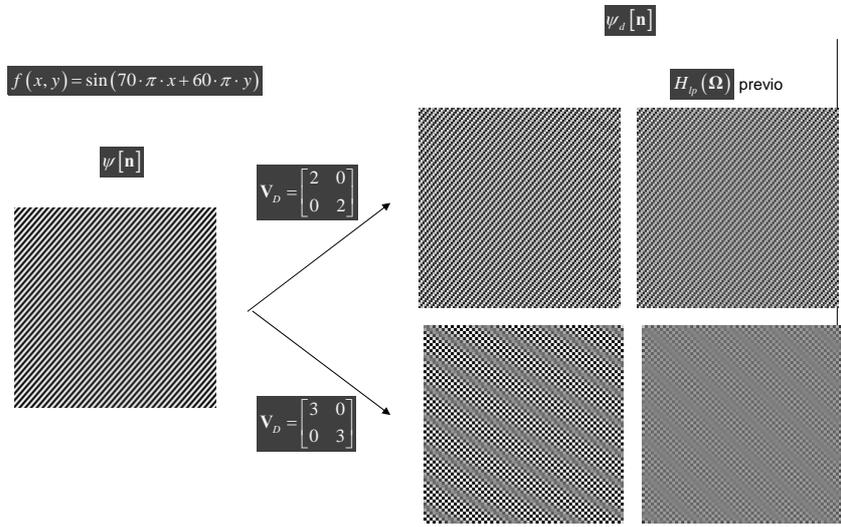
$$\mathbf{V}_D = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{V}_D = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$\psi_d[n]$

$H_{lp}(\Omega)$ previo





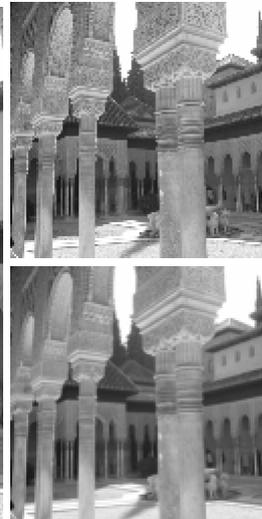
Interpolación de señales discretas
multidimensionales: Análisis cualitativo en
imágenes

$\psi[n]$



$\psi_d[n]$

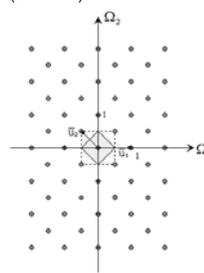
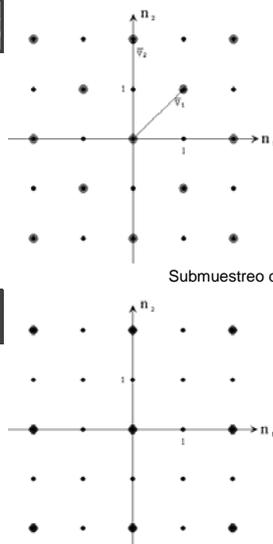
$$V_D = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$



Interpolación de señales discretas
multidimensionales: Análisis cualitativo en
imágenes

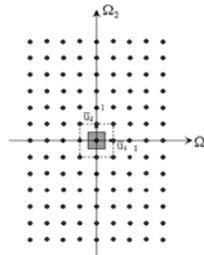
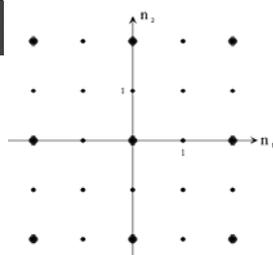
Submuestreo de la luminancia (Banda G)

$$V_Y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$



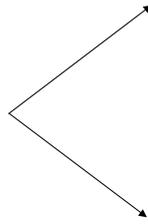
Submuestreo de las bandas R,B

$$V_R = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$





$$\mathbf{V}_D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$



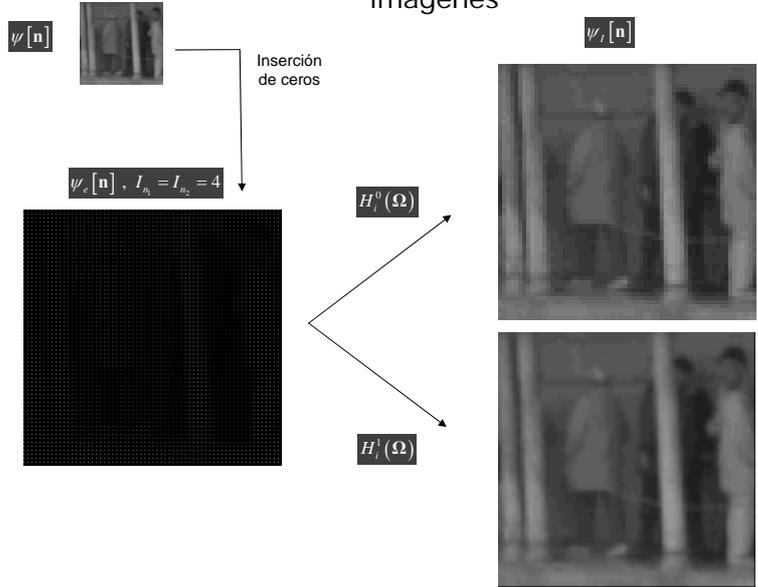
$$\mathbf{V}_D = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$



- Interpolación: en la práctica, el resultado de esta operación ha de ser una imagen definida en $n \times m$ valores.
- Interpolación sobre estructuras regulares sencillas:
 - Aumento del tamaño de la imagen por factores enteros.
 - Interpolación de la luminancia en el filtro de Bayer.

Interpolación de señales discretas
multidimensionales: Análisis cualitativo en
imágenes



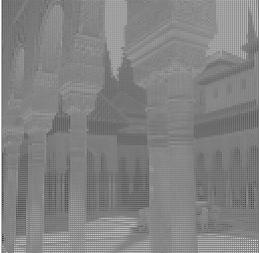
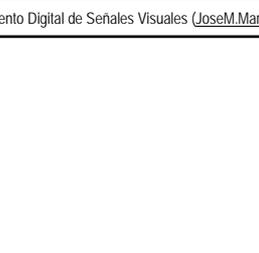
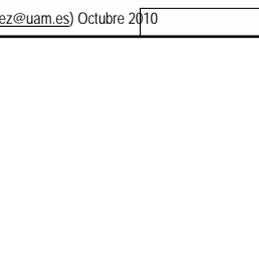
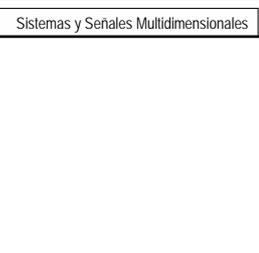



TAPS: Tratamiento Digital de Señales Visuales (JoseM.Martinez@uam.es) Octubre 2010

Sistemas y Señales Multidimensionales 47

Interpolación de señales discretas
multidimensionales: Análisis cualitativo en
imágenes




	Bayer	Interpolada	Original
Y			
R			
B			

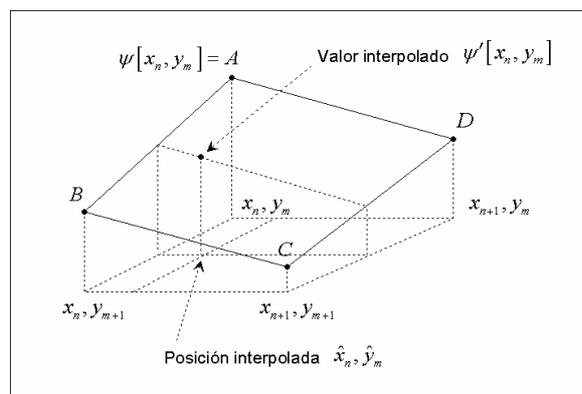
TAPS: Tratamiento Digital de Señales Visuales (JoseM.Martinez@uam.es) Octubre 2010

Sistemas y Señales Multidimensionales 48

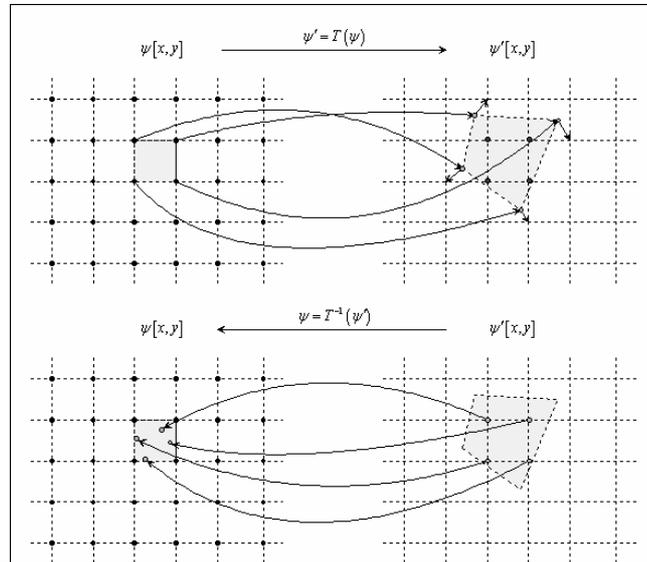
• Interpolación genérica: obtención práctica de valores no presentes en la imagen original:

- Interpolación o diezmado por cualquier valor, desplazamientos no enteros, etc.
- Transformaciones que modifican la posición de los valores de la imagen, super-resolución, etc.

Interpolación bilineal



Ejecución práctica de la interpolación bilineal



- Introducción
- Análisis frecuencial de señales multidimensionales
- Muestreo de señales multidimensionales
- Interpolación de señales discretas multidimensionales
- Cuantificación
 - Introducción
 - Cuantificador MSE óptimo (Max-Lloyd)
 - Cuantificación del contraste
 - Cuantificación visual
 - Cuantificación con ruido aleatorio
 - Halftoning
- La imagen digital

- Mapeo de una variable de rango continuo, ψ , en una de rango discreto, ψ' :

$$\psi' = r_k \Leftrightarrow \psi \in [t_k, t_{k+1})$$

- , donde $\{t_k, k = 0, \dots, L-1\}$ son niveles de decisión crecientes y r_k son los niveles de reconstrucción.
- Operación irreversible: error de cuantificación.

- Minimiza la energía del error (MSE) de cuantificación para un número dado de niveles de decisión, supuesta conocida la f.d.p. de la señal continua, $p_\psi(\psi)$
- Solución iterativa del sistema:

$$t_k = \frac{r_k + r_{k-1}}{2}$$

- r_k es el centro de masas de $p_\psi(\psi)$ en el intervalo $[t_k, t_{k+1})$

Aprovecha el hecho de que el HVS responde de manera uniforme a variaciones de contraste:



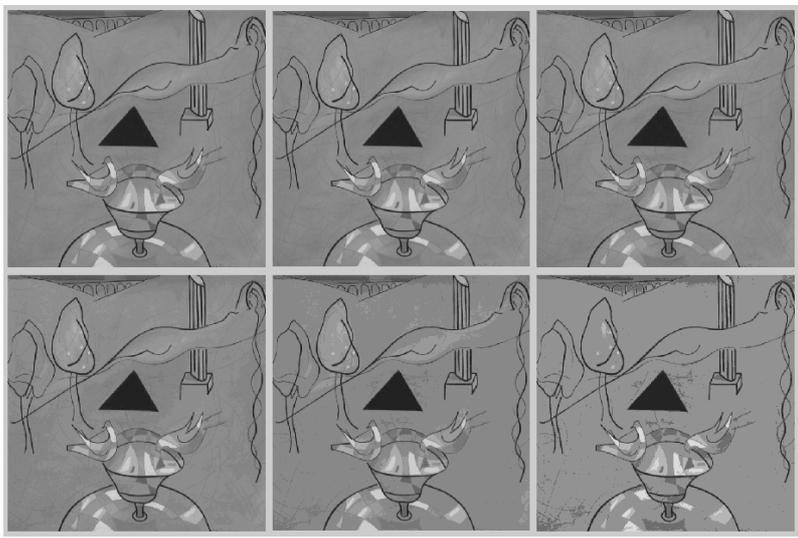
- Un número insuficiente de niveles (<6) da lugar al fenómeno de *contorneo* (*contouring*).
- Cuantificación uniforme: 256 niveles (8 bpp), defectos visibles en 6 bpp.
- El *histograma* de una imagen permite conocer y así implementar el cuantificador de Lloyd-Max con unos 5-6 bpp. Aún así, con este número de bits el *contorneo* es apreciable.
- Técnicas de reducción del fenómeno de *contorneo*.

Cuantificación:
Cuantificación visual

8 bpp

7 bpp

6 bpp



5 bpp

4 bpp

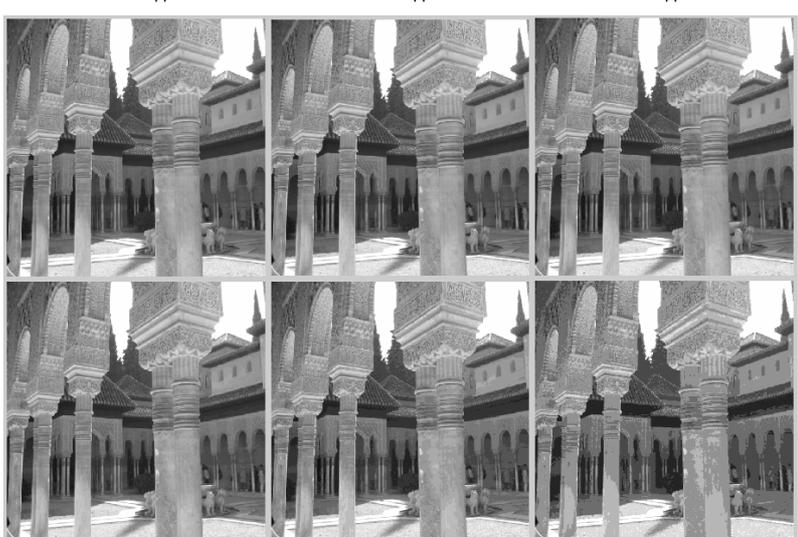
3 bpp

Cuantificación:
Cuantificación visual

8 bpp

7 bpp

6 bpp



5 bpp

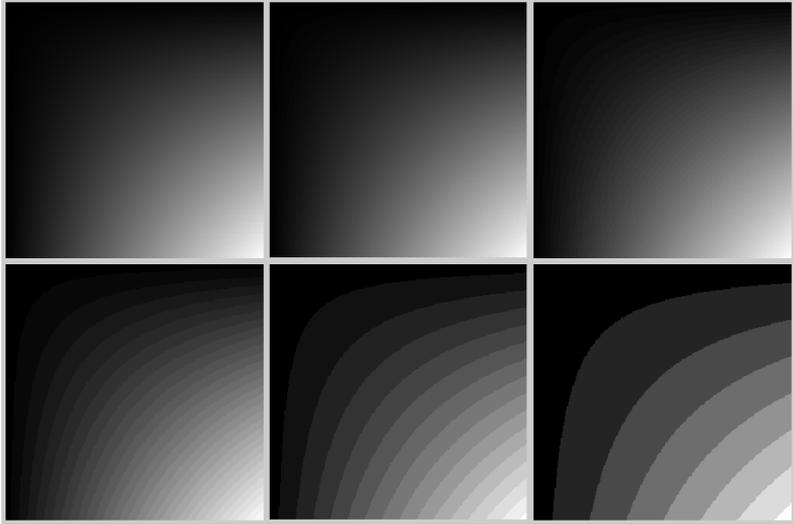
4 bpp

3 bpp


Quantificación:

Quantificación visual

8 bpp
7 bpp
6 bpp



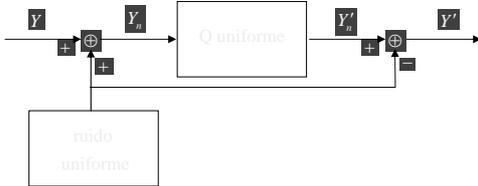
5 bpp
4 bpp
3 bpp

TAPS: Tratamiento Digital de Señales Visuales (JoseM.Martinez@uam.es) Octubre 2010 Sistemas y Señales Multidimensionales 59


Quantificación:

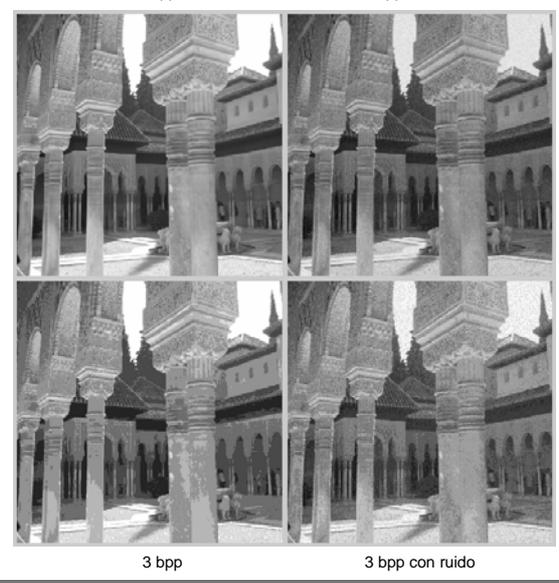
Quantificación con ruido aleatorio

Adición de ruido (*dither*) para *romper* los contornos

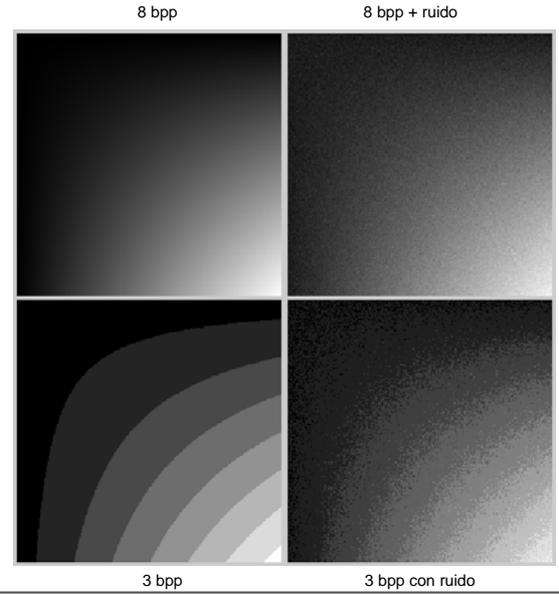


TAPS: Tratamiento Digital de Señales Visuales (JoseM.Martinez@uam.es) Octubre 2010 Sistemas y Señales Multidimensionales 60

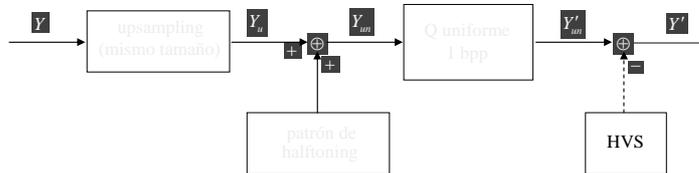
Cuantificación:
Cuantificación con ruido aleatorio



Cuantificación:
Cuantificación con ruido aleatorio

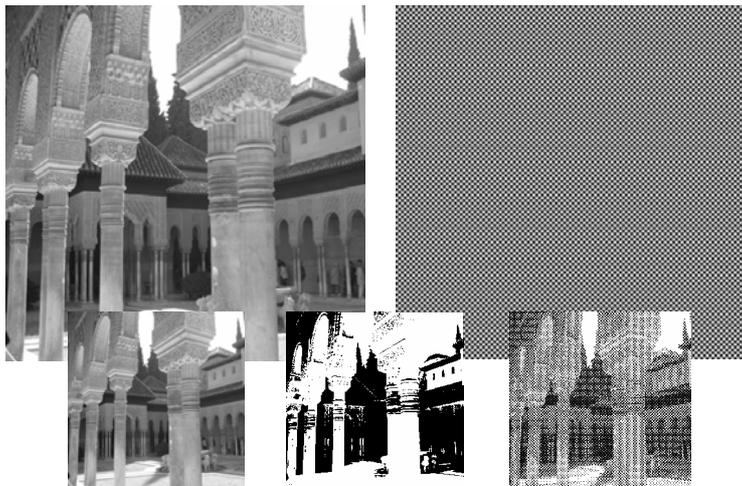


Es un caso particular y extremo del anterior, en el que se cuantifica con 1bpp a costa de incrementar la resolución de la imagen inicial



Original sobremuestreada

Patrón de halftoning



Original

1 bpp

1bpp + halftoning

- Introducción
- Análisis frecuencial de señales multidimensionales
- Muestreo de señales multidimensionales
- Interpolación de señales discretas multidimensionales
- Cuantificación
- La imagen digital

- Señales 2D muestreadas y cuantificadas, definidas en un rango limitado y discreto de posiciones y con un rango limitado y discreto de amplitudes.
- Representación directa de niveles de señal o uso de una VLT.
- Resolución espacial (dpi) y profundidad (bpp). Resolución vs definición.
- Formatos de almacenamiento.

- Operadores puntuales: *cada píxel de la imagen resultante es función del píxel homólogo de la imagen original. Modificación de histograma, modificación de niveles, operaciones aritméticas.*
- Operadores locales: *cada píxel de la imagen resultante es función de un entorno de píxeles del píxel homólogo de la imagen original. Operadores LSI, ajustes geométricos, operadores morfológicos, filtrado por reconstrucción, conjuntos de nivel.*
- Operaciones globales: *cada píxel de la imagen resultante es función de todos los píxeles de la imagen original. Transformadas lineales.*

Los operadores dan lugar a recortes, redondeos y truncamientos.

- Introducción
- Análisis frecuencial de señales multidimensionales
- Muestreo de señales multidimensionales
 - Teoría de retículos
 - Teoría de muestreo 1D -KD
 - Muestreo de imágenes
- Interpolación de señales discretas multidimensionales
 - Revisión 1D
 - Análisis cualitativo en imágenes
- Cuantificación
 - Introducción
 - Cuantificador MSE óptimo (Max-Lloyd)
 - Cuantificación del contraste
 - Cuantificación visual
 - Cuantificación con ruido aleatorio
 - Halftoning
- La imagen digital

Estas transparencias están editadas a partir de las generadas por el profesor

Jesús Bescós Cano durante sus años de impartición de esta asignatura.