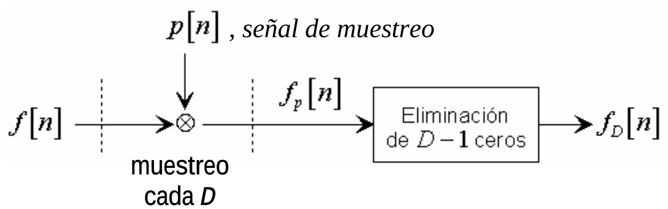
Señales unidimensionales

Diezmado:

Objetivo:

$f_D[n] = f[nD]$, donde D es el factor entero de diezmado.

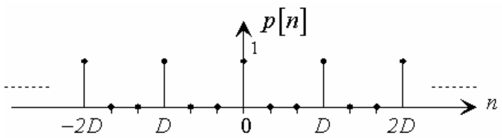
Modelo:



Señal de muestreo:

$$p[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[n-kD]$$

, (ejemplo con $D=3$)



Esta señal puede interpretarse como un tren de deltas desplazadas sobre los puntos de una estructura de muestreo definida por el retículo $\Lambda_D = \{n_D \in \mathbb{Z} / n_D = k \cdot D, \forall k \in \mathbb{Z}\}$, cuya celda de Voronoi, $V(\Lambda_D)$, es precisamente el periodo fundamental $[-D/2, D/2]$, y cuya densidad es precisamente la frecuencia de muestreo: $d(\Lambda_D) = \frac{1}{D} = f_D$.

Señal muestreada: $f_p[n] = f[n] \cdot p[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f[n] \cdot \delta[n-k \cdot D] = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f[n] \cdot \delta[n-k \cdot D]$

Señal diezmada: $f_D[n] = f_p[n \cdot D] = f[n \cdot D]$

Esta señal puede interpretarse como una normalización del eje temporal de $f_p[n]$ por el

Señales multidimensionales

Diezmado:

Objetivo:

Una señal discreta $\psi[\vec{n}]$ toma valores en $\vec{n} \in \mathbb{Z}^m$. El objetivo es generar una nueva señal discreta $\psi_D[\vec{n}] = \psi[\vec{n}_D]$, donde $\vec{n}_D$ son los puntos de un retículo de diezmado, Λ_D, definido en $\mathbb{Z}^m$.

Modelo:

Sea una estructura de muestreo entera definida por el retículo:

$$\Lambda_D = \left\{ \vec{n}_D \in \mathbb{Z}^m / \vec{n}_D = \sum_{i=1}^{m} k_i \cdot \vec{v}_i, \forall k_i \in \mathbb{Z} \right\}$$, donde $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_k\}$ forman una base de $\mathbb{Z}^m$.

Expresado en forma matricial, $\Lambda_D = \{\mathbf{n}_D \in \mathbb{Z}^m / \mathbf{n}_D = \mathbf{V} \cdot \mathbf{k}, \forall \mathbf{k} \in \mathbb{Z}^m\}$, donde $\mathbf{V} = [\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, ..., \mathbf{v_k}]$ es una matriz generatriz del retículo.

Señal de muestreo:

$$p[\vec{n}] = \sum_{\vec{n}_D \in \Lambda_D} \delta[\vec{n} - \vec{n}_D]$$, o en forma matricial, $$p[\mathbf{n}] = \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^m} \delta[\mathbf{n} - \mathbf{V} \cdot \mathbf{k}]$$

Esta señal puede interpretarse, de nuevo, como un *tren* de deltas desplazadas sobre los puntos de una estructura de muestreo definida por el retículo Λ_D. Por analogía con el caso 1D, puede interpretarse que $p[\mathbf{n}]$ es periódica de *periodo* fundamental $V(\Lambda_D)$ y *densidad de muestreo* $d(\Lambda_D)$.

Señal muestreada: $\psi_p[\mathbf{n}] = \psi[\mathbf{n}] \cdot p[\mathbf{n}] = \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^m} \psi[\mathbf{n}] \cdot \delta[\mathbf{n} - \mathbf{V} \cdot \mathbf{k}]$

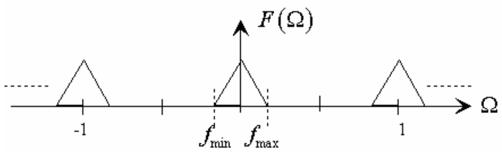
Señal diezmada: $\psi_d[\mathbf{n}] = \psi_p[\mathbf{n}_D] = \psi_p[\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}] = \psi[\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}]$

Esta señal resulta de normalizar la señal $\psi_p[\mathbf{n}]$ en las direcciones que indican los valor D, es decir, por la amplitud del vector que genera el retículo Λ_D, de modo que si $f_p[n]$ presenta valores no nulos en $n_D = k \cdot D = nD$, entonces $n = n_D/D$.

Análisis frecuencial:

Señal discreta original:

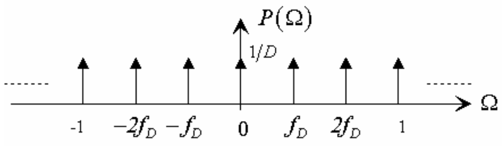
$$f[n] \xrightarrow{DTFT} F(\Omega)$$



Señal de muestreo:

$$p[n] \xrightarrow{DTFT} P(\Omega)$$

$$P(\Omega) = \frac{1}{D}\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(\Omega - k \cdot f_D\right)$$

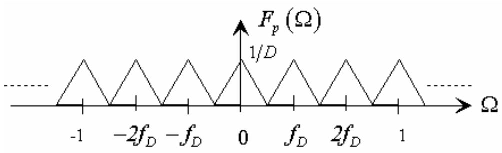


La transformada $P(\Omega)$ puede interpretarse como un tren de deltas ponderadas por $d(\Lambda_D) = 1/D$, y desplazadas sobre los puntos del retículo recíproco $\Lambda_D^* = \{\Omega \in \mathbb{R} / \Omega = k \cdot f_D, \forall k \in \mathbb{Z}\}$, cuya celda de Voronoi y periodo fundamental es el intervalo $[-f_D/2, f_D/2]$, y cuya densidad es la inversa de la del retículo Λ_D : $d(\Lambda_D^*) = D$.

Señal muestreada:

$$f_p[n] \xrightarrow{DTFT} F_p(\Omega) = F(\Omega) * P(\Omega)$$

$$F_p(\Omega) = \frac{1}{D}\sum_{k=0}^{D-1} F\left(\Omega - k \cdot f_D\right)$$



La transformada $F_p(\Omega)$ puede interpretarse como un sumatorio de D versiones de $F(\Omega)$ ponderadas y desplazadas sobre los puntos del retículo recíproco Λ_D^*.

vectores base del retículo, de modo que si $\psi_p[\mathbf{n}]$ presenta valores no nulos en $\mathbf{n}_D = \mathbf{V} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{n}$, entonces $\mathbf{n} = \mathbf{V}^{-1} \cdot \mathbf{n}_D$.

Análisis frecuencial:

Señal discreta original:

$$\psi[\mathbf{n}] \xrightarrow{DSFT} \Psi(\mathbf{\Omega})$$

La región en la cual se verifica $\Psi(\mathbf{\Omega}) \neq 0$, se denomina *región de soporte* de la señal $\psi[\mathbf{n}]$.

Señal de muestreo:

$$p[\mathbf{n}] \xrightarrow{DSFT} P(\mathbf{\Omega}) = d(\Lambda_D) \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^m} \delta(\mathbf{\Omega} - \mathbf{U} \cdot \mathbf{k})$$

, donde $\mathbf{U}$ es la matriz generatriz de Λ_D^*, es decir $\mathbf{U} = \left(\mathbf{V}^T\right)^{-1}$

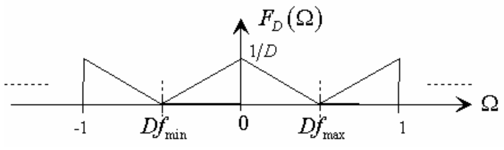
Señal muestreada:

$$\psi_p[\mathbf{n}] \xrightarrow{DSFT} \Psi_p(\mathbf{\Omega}) = \Psi(\mathbf{\Omega}) * P(\mathbf{\Omega}) = d(\Lambda_D) \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^m} \Psi(\mathbf{\Omega} - \mathbf{U} \cdot \mathbf{k})$$

Señal diezmada:

$$F_D(\Omega) = F_p(\Omega/D)$$

$$F_D(\Omega) = \frac{1}{D}\sum_{k=0}^{D-1} F\left((\Omega - k)/D\right)$$



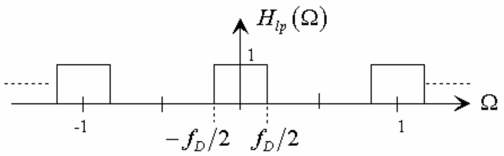
Conclusiones:

Para poder recuperar $f[n]$ limitada en banda a partir de $f_D[n]$, que es una versión diezmada por D de la señal $f[n]$, es necesario que la parte no nula de $F(f)$ encaje en un intervalo $1/D$, de modo que no se produzca solape espectral (*aliasing*).

En el diezmado de una señal discreta puede por tanto producirse el fenómeno de *aliasing* (y la consiguiente perdida de información). Si se quiere evitar es necesario hacer un filtrado paso-bajo ideal previo con una frecuencia de corte $f_c = f_D/2 = 1/2D$. Si este filtro no fuera ideal, se produciría solape.

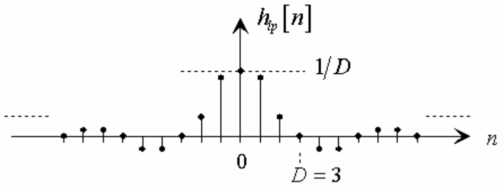
Respuesta en frecuencia del filtro paso-bajo ideal previo:

$$H_{lp}(\Omega) = \begin{cases} 1 & |\Omega| < f_D/2 \\ 0 & resto \end{cases}$$



, y su respuesta al impulso:

$$h_{lp}[n] = \frac{1}{D}\mathrm{sinc}\left(\frac{n}{D}\right)$$



Señal diezmada: $\Psi_D(\mathbf{\Omega}) = \Psi_p(\mathbf{U}\cdot\mathbf{\Omega}) = d(\Lambda_D)\sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^m} \Psi(\mathbf{U}\cdot\mathbf{\Omega} - \mathbf{U}\cdot\mathbf{k})$

Conclusiones:

Para poder recuperar $\psi[\mathbf{n}]$ limitada en banda a partir de $\psi_D[\mathbf{n}]$, que muestrea $\psi[\mathbf{n}]$ en un retículo Λ_D, es necesario que la región de soporte de $\psi[\mathbf{n}]$ encaje en la celda de Voronoi del retículo Λ_D^*, de modo que no se produzca solape espectral (*aliasing*):

$$\Psi(\mathbf{\Omega}) = 0, \forall \mathbf{\Omega} \notin V(\Lambda_D^*)$$

En el diezmado de una señal discreta puede por tanto producirse el fenómeno de *aliasing* (y la consiguiente perdida de información). Si se quiere evitar es necesario hacer un filtrado paso-bajo ideal previo con una región de soporte igual a la celda de Voronoi del retículo Λ_D^*. Si este filtro no fuera ideal, se produciría solape.

Respuesta en frecuencia del filtro paso-bajo ideal previo:

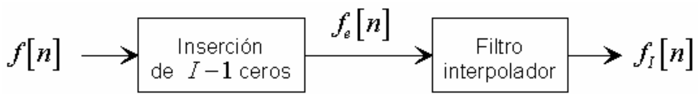
$$H_{lp}(\mathbf{\Omega}) = \begin{cases} 1 & \mathbf{\Omega} \in V(\Lambda_D^*) \\ 0 & resto \end{cases}$$

Interpolación

Objetivo:

Obtener una versión interpolada (con más muestras), $f_I[n]$, de la señal original $f[n]$, donde I es el factor entero de interpolación.

Modelo:

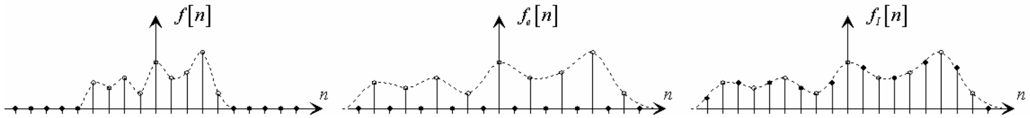


Señal tras la inserción de ceros:

$$f_e[n] = \begin{cases} f[n/I] & , n \text{ múltiplo de } I \\ 0 & , \text{resto} \end{cases}$$

Señal interpolada:

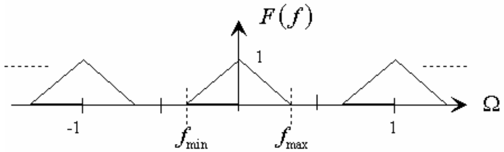
$f_I[n] = f_e[n] * h_i[n]$, de modo que $f_I[kI] = f[k]$



Análisis frecuencial:

Señal discreta original:

$f[n] \xrightarrow{DTFT} F(\Omega)$



Señal tras la inserción de ceros::

$F_e(\Omega) = F(I\Omega)$, (ejemplo con $I = 2$)

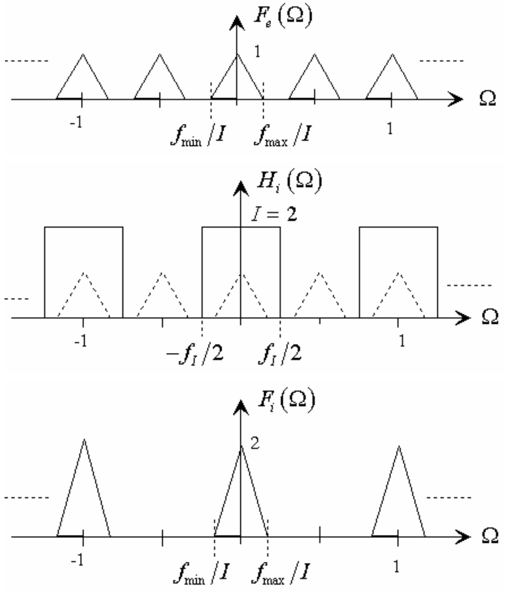
Interpolación

Filtro interpolador ideal::

$$H_i(\Omega) = \begin{cases} I & |\Omega| < f_I/2 \\ 0 & resto \end{cases}, \text{ con } f_I = \frac{1}{I}$$

Señal interpolada::

$$F_I(\Omega) = F_e(\Omega) \cdot H_i(\Omega)$$



Conclusiones:

El proceso de interpolación no produce solape espectral (*aliasing*) ni supone pérdida ni ganancia de información. El proceso garantiza que la señal interpolada toma los mismos valores que la original en los múltiplos del factor de interpolación. El resto de los valores de la señal interpolada dependen del filtro interpolador.

Si el filtro interpolador es ideal, la señal interpolada mantiene la misma distribución espectral relativa que la original. Si no lo es, la señal interpolada $f_I[n]$ presentará distinta distribución frecuencial y en su caso componentes de alta frecuencia de $f_e[n]$, las que queden bajo la pulsación de corte de dicho filtro.

Este efecto será tanto mayor cuanto más ancho sea el espectro de la señal original $f[n]$; en este sentido, si la señal discreta original se muestreó muy por encima de la tasa de Nyquist, presentará una DTFT concentrada en la parte baja del espectro y por tanto será menos sensible a la no idealidad del filtro interpolador.

A continuación se muestran filtros interpoladores de distinto orden, utilizados habitualmente en procesos de interpolación.

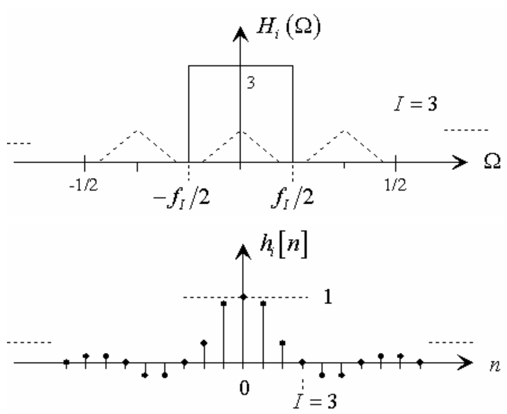
Orden de la interpolación:

Ideal::

$$H_i(\Omega) = \begin{cases} I & |\Omega| < f_I/2 \\ 0 & resto \end{cases}, \text{ con } f_I = \frac{1}{I}$$

, cuya respuesta al impulso es:

$$h_i[n] = \text{sinc}\left(\frac{n}{I}\right)$$



De orden cero (I ***impar):***

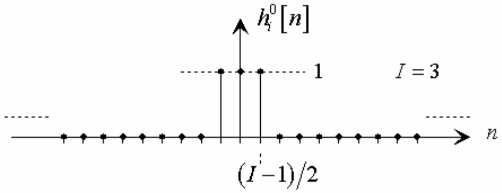
$$h_i^0[n] = \begin{cases} 1 & , |n| \le (I-1)/2 \\ 0 & , \text{resto} \end{cases}$$, con

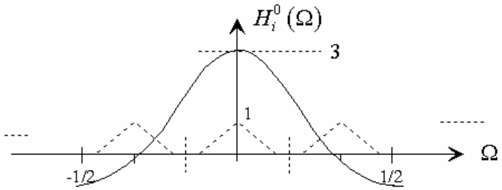
, cuya respuesta en frecuencia es:

$$H_i^0(\Omega) = \frac{\sin(I\pi f)}{\sin(\pi f)}$$

, que es de fase nula, potencia las bajas frecuencias de $F_e(\Omega)$ y no elimina sus componentes de alta frecuencia.

Si I fuera par, al no poder ser $h_i^0[n]$ simétrico, la fase del filtro interpolador resultante no sería nula.





De orden uno:

$$h_i^1[n] = \delta[n] + \sum_{k=1}^{I-1}\left(1-\frac{k}{I}\right)\left(\delta[n-k] + \delta[n\right.$$

, cuya respuesta en frecuencia es:

$$H_i^1(\Omega) = 1 + \sum_{k=1}^{I-1}\left(1-\frac{k}{I}\right)2\cos(k\Omega)$$

, que es de fase nula, potencia las bajas frecuencias de $F_e(\Omega)$ y elimina en gran medida sus componentes de alta frecuencia.