

Geometría proyectiva y visión artificial

José Ignacio Ronda Prieto

Grupo de Tratamiento de Imágenes, ETSIT, UPM

http://www.gti.ssr.upm.es/~jir/comp_vis

jir@gti.ssr.upm.es



Geometría proyectiva y visión artificial

● title1

● Geometría proyectiva y visión artificial

Introducción

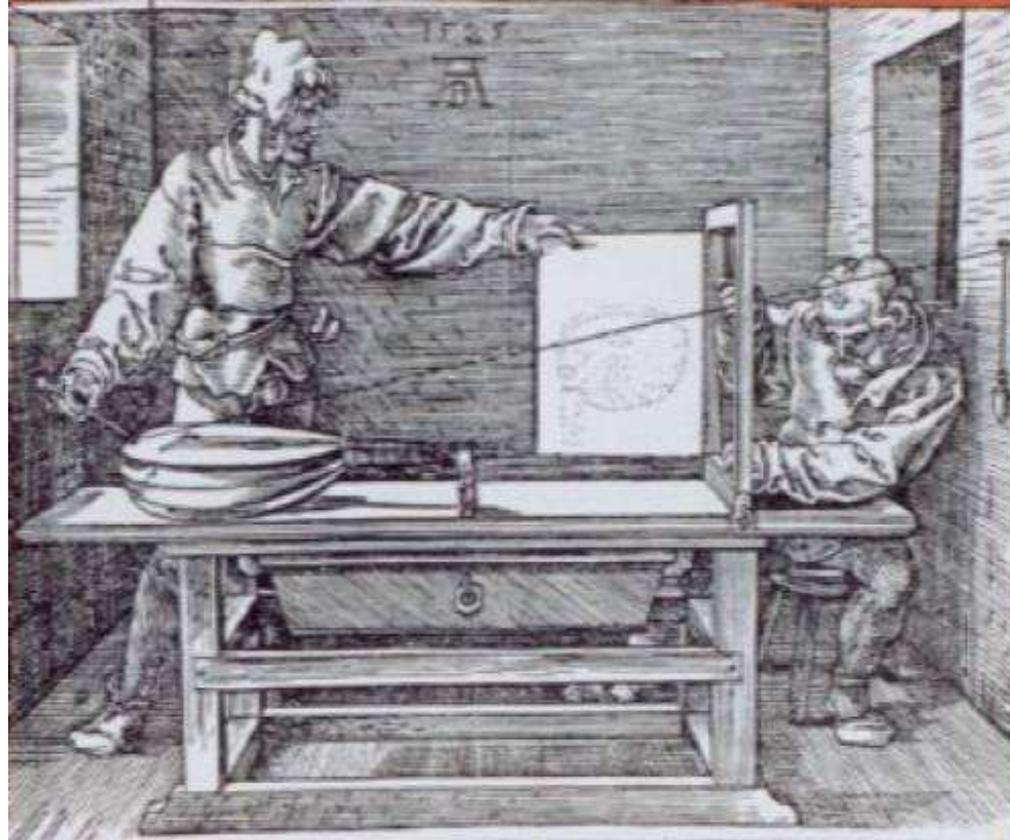
Elementos de geometría proyectiva

Reconstrucción proyectiva

Geometrías: euclídea, afin, proyectiva

Reconstrucción euclídea

Bibliografía



■ Una introducción a la Geometría Proyectiva



Geometría proyectiva y visión artificial

● title1

● Geometría proyectiva y visión artificial

Introducción

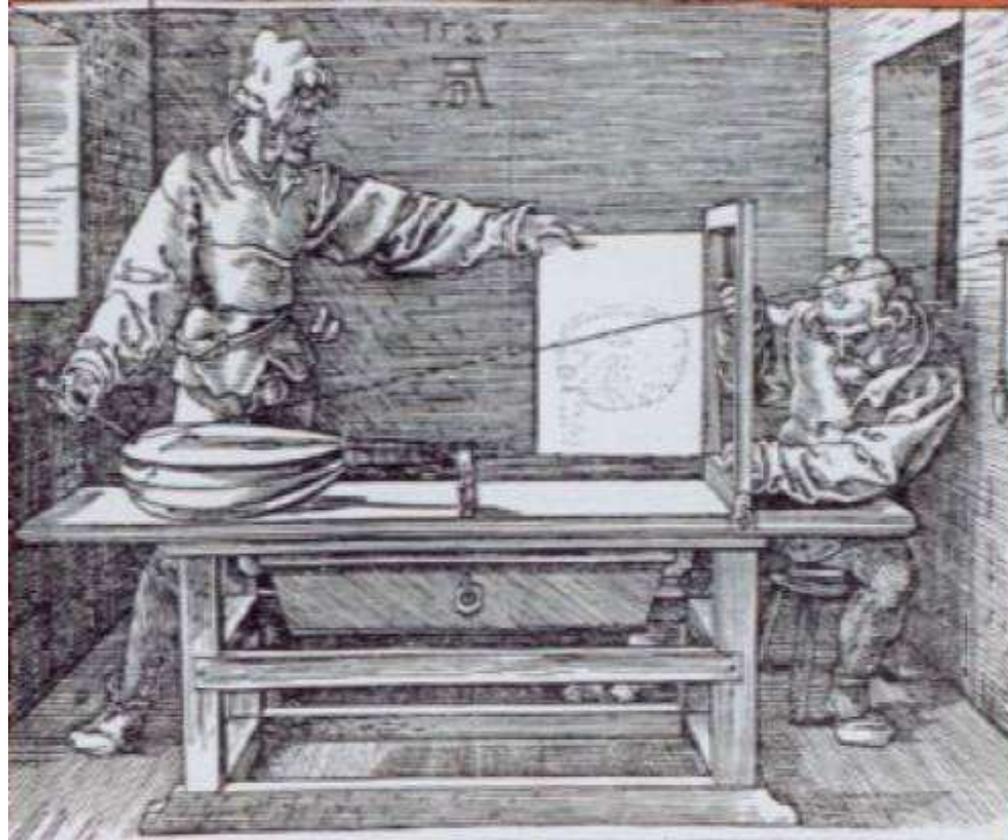
Elementos de geometría proyectiva

Reconstrucción proyectiva

Geometrías: euclídea, afin, proyectiva

Reconstrucción euclídea

Bibliografía



- Una introducción a la Geometría Proyectiva
- para la reconstrucción 3D a partir de imágenes.



Una larga historia hecha breve

- title1
- Geometría proyectiva y visión artificial

Introducción

- Una larga historia hecha breve
- Un objetivo concreto

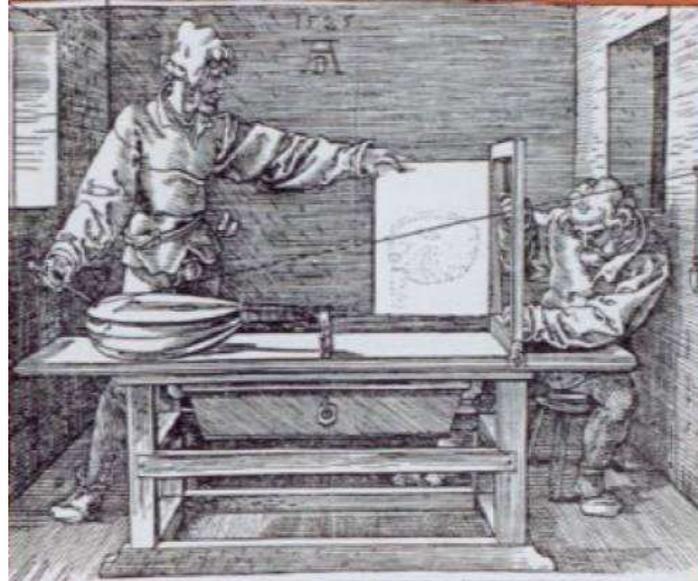
Elementos de geometría proyectiva

Reconstrucción proyectiva

Geometrías: euclídea, afín, proyectiva

Reconstrucción euclídea

Bibliografía



- Estudio de las propiedades geométricas preservadas por proyecciones: Euclides (325-265 AC), Apolonio (226-190 AC), Pappus (290-350), Desargues (1591-1661), Pascal (1623-1662),
- Hacia la Geometría Proyectiva: Poncelet (1788-1867), Von Staudt (1798-1867), Plücker (1801-1868).



Una larga historia hecha breve

- title1
- Geometría proyectiva y visión artificial

Introducción

- Una larga historia hecha breve
- Un objetivo concreto

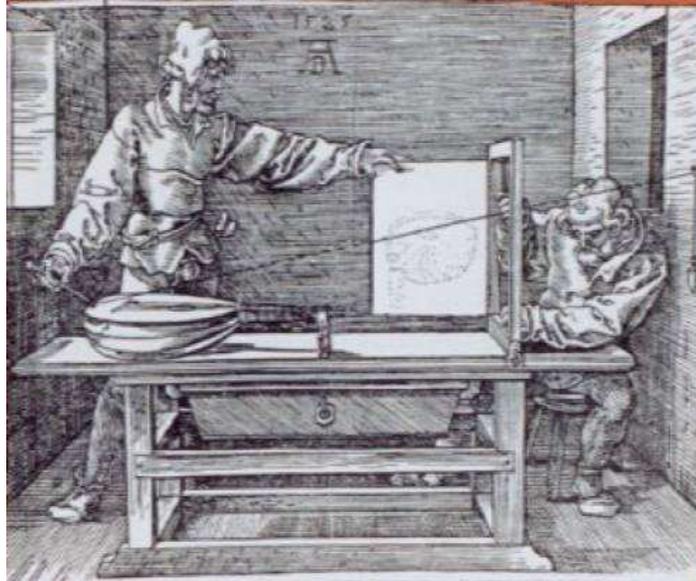
Elementos de geometría proyectiva

Reconstrucción proyectiva

Geometrías: euclídea, afín, proyectiva

Reconstrucción euclídea

Bibliografía



- Tratados sobre la perspectiva en la pintura: Piero de la Francesca (1420-1492).
- Invención de la fotografía (1827) → Aplicación al problema de la *reconstrucción* de elementos tridimensionales a partir de imágenes (*fotogrametría*).
- Técnicas actuales de reconstrucción con cámaras no calibradas (1992-).



Un objetivo concreto

Reconstrucción 3D con cámaras no calibradas

Datos de partida: Correspondencia entre puntos en varias imágenes.



Objetivo: Obtener

- Posiciones 3D de los puntos
- Parámetros intrínsecos de las cámaras
- Posiciones relativas de las cámaras

Reconstrucción 3D (VRML)

(Pulsar botón derecho del ratón y seleccionar “Abrir vínculo web en el explorador”).

Se necesita tener instalado un plug-in de VRML.))

- title1
- Geometría proyectiva y visión artificial

Introducción

- Una larga historia hecha breve
- Un objetivo concreto

Elementos de geometría proyectiva

Reconstrucción proyectiva

Geometrías: euclídea, afín, proyectiva

Reconstrucción euclídea

Bibliografía



Proyecciones

- title1
- Geometría proyectiva y visión artificial

Introducción

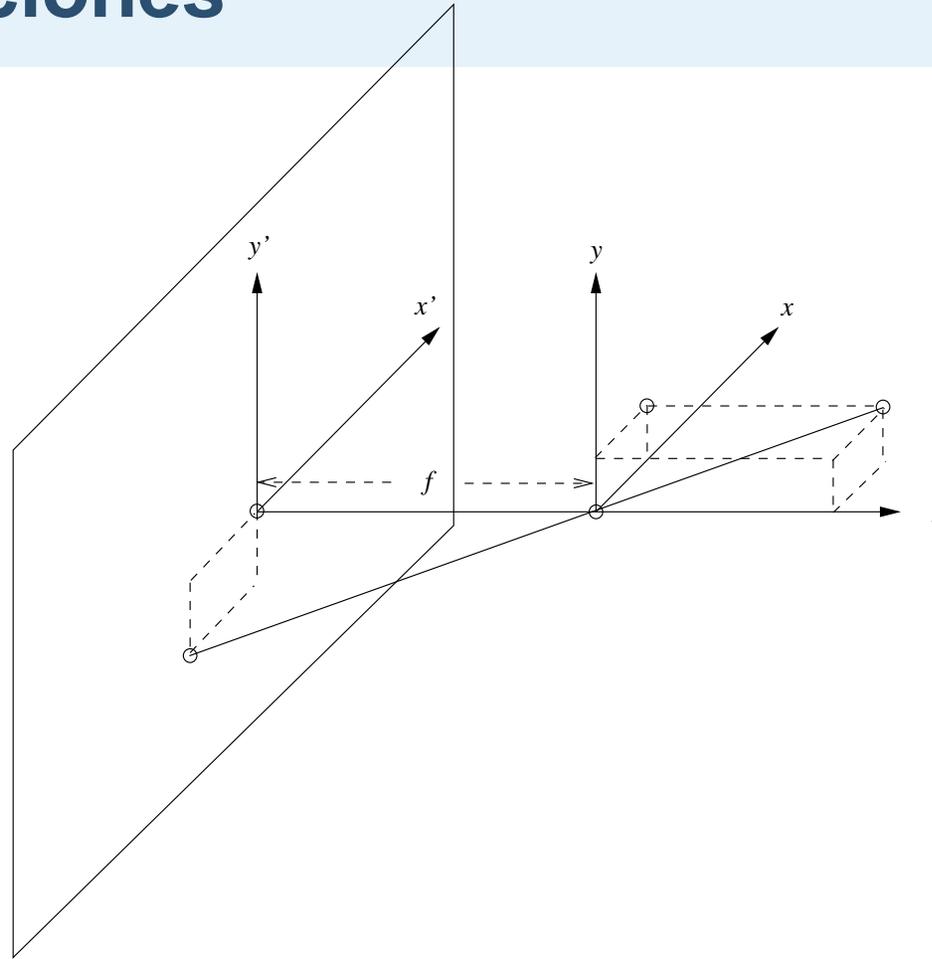
Elementos de geometría proyectiva

● Proyecciones

- Coordenadas homogéneas en el plano
- Coordenadas homogéneas en el plano
- Dualidad
- Espacio afín y espacio proyectivo
- Homografías
- Visualizando la recta del infinito
- El espacio proyectivo n -dimensional
- Respetan algo las homografías?
- El espacio proyectivo 1D
- Razón doble
- Razón doble
- El espacio proyectivo 1D: razón doble
- Proyecciones

Reconstrucción proyectiva

Geometrías: euclídea, afín, proyectiva





Proyecciones

- title1
- Geometría proyectiva y visión artificial

Introducción

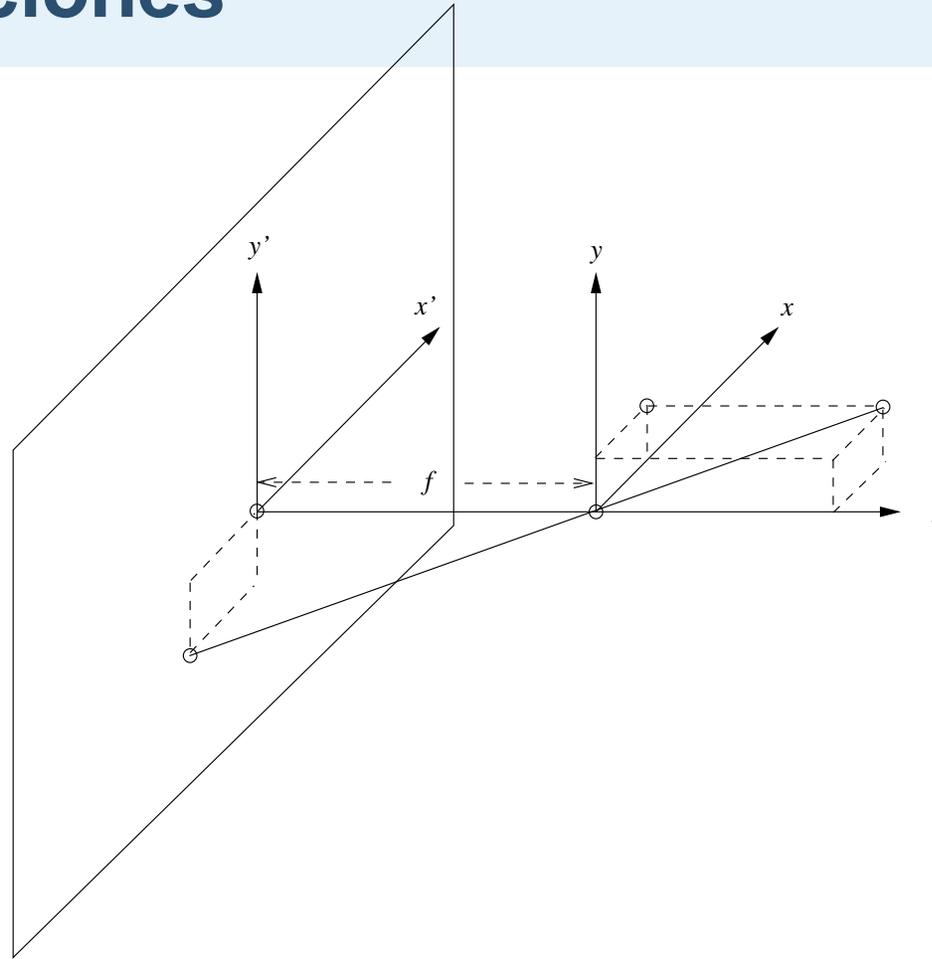
Elementos de geometría proyectiva

● Proyecciones

- Coordenadas homogéneas en el plano
- Coordenadas homogéneas en el plano
- Dualidad
- Espacio afín y espacio proyectivo
- Homografías
- Visualizando la recta del infinito
- El espacio proyectivo n -dimensional
- Respetan algo las homografías?
- El espacio proyectivo 1D
- Razón doble
- Razón doble
- El espacio proyectivo 1D: razón doble
- Proyecciones

Reconstrucción proyectiva

Geometrías: euclídea, afín, proyectiva



$$x' = -f \frac{x}{z}, \quad y' = -f \frac{y}{z}$$



Proyecciones

- title1
- Geometría proyectiva y visión artificial

Introducción

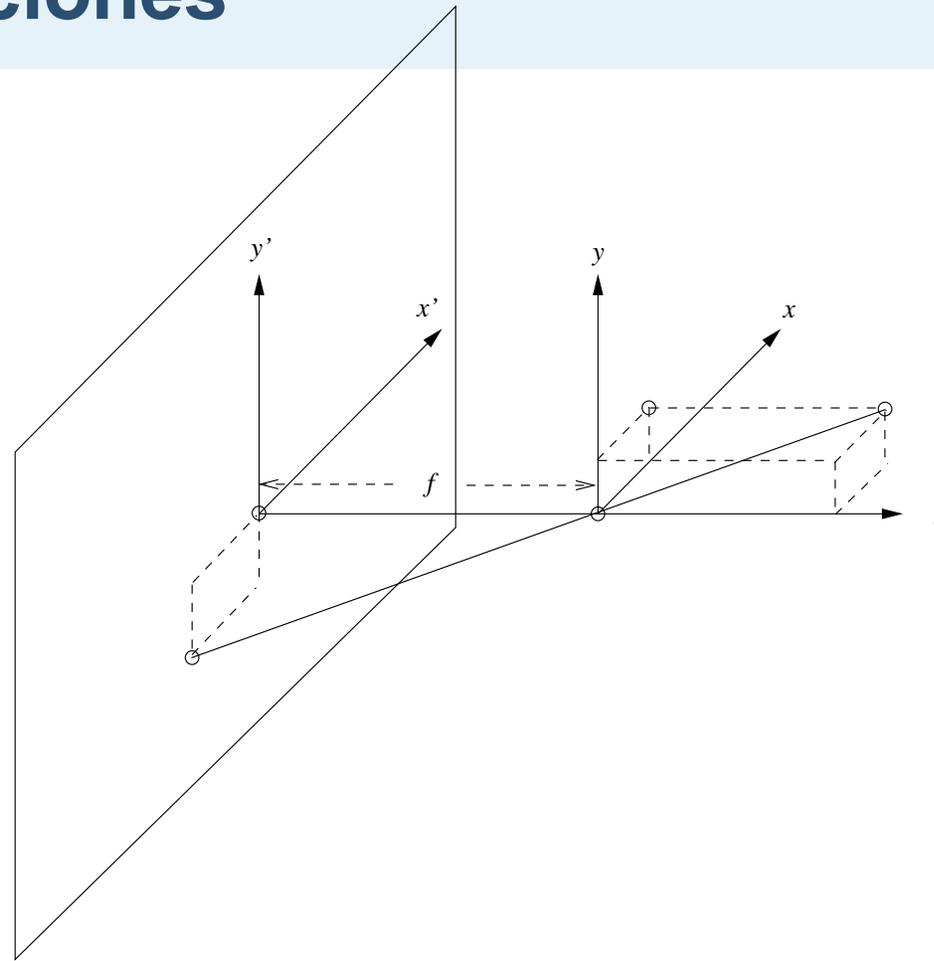
Elementos de geometría proyectiva

● Proyecciones

- Coordenadas homogéneas en el plano
- Coordenadas homogéneas en el plano
- Dualidad
- Espacio afín y espacio proyectivo
- Homografías
- Visualizando la recta del infinito
- El espacio proyectivo n -dimensional
- Respetan algo las homografías?
- El espacio proyectivo 1D
- Razón doble
- Razón doble
- El espacio proyectivo 1D: razón doble
- Proyecciones

Reconstrucción proyectiva

Geometrías: euclídea, afín, proyectiva



$$x' = -f \frac{x}{z}, \quad y' = -f \frac{y}{z}$$

Vamos a convertir estas ecuaciones en **ecuaciones lineales**.



Coordenadas homogéneas en el plano

Ecuación *afín* de una recta:

$$ax + by + c = 0$$

- title1
- Geometría proyectiva y visión artificial

Introducción

Elementos de geometría proyectiva

- Proyecciones
- **Coordenadas homogéneas en el plano**
- Coordenadas homogéneas en el plano
- Dualidad
- Espacio afín y espacio proyectivo
- Homografías
- Visualizando la recta del infinito
- El espacio proyectivo n -dimensional
- Respetan algo las homografías?
- El espacio proyectivo 1D
- Razón doble
- Razón doble
- El espacio proyectivo 1D: razón doble
- Proyecciones

Reconstrucción proyectiva

Geometrías: euclídea, afín, proyectiva



Coordenadas homogéneas en el plano

Ecuación *afín* de una recta:

$$ax + by + c = 0$$

Coordenadas homogéneas de la recta:

$$\mathbf{r} \sim (a, b, c)$$

- title1
- Geometría proyectiva y visión artificial

Introducción

Elementos de geometría proyectiva

- Proyecciones
- **Coordenadas homogéneas en el plano**

- Coordenadas homogéneas en el plano
- Dualidad
- Espacio afín y espacio proyectivo
- Homografías
- Visualizando la recta del infinito
- El espacio proyectivo n -dimensional
- Respetan algo las homografías?
- El espacio proyectivo 1D
- Razón doble
- Razón doble
- El espacio proyectivo 1D: razón doble
- Proyecciones

Reconstrucción proyectiva

Geometrías: euclídea, afín, proyectiva



Coordenadas homogéneas en el plano

Ecuación *afín* de una recta:

$$ax + by + c = 0$$

Coordenadas homogéneas de la recta:

$$\mathbf{r} \sim (a, b, c)$$

Punto de la recta

$$(x, y), (x, y, 1)(a, b, c)^T = 0$$

- title1
- Geometría proyectiva y visión artificial

Introducción

Elementos de geometría proyectiva

- Proyecciones
- **Coordenadas homogéneas en el plano**

- Coordenadas homogéneas en el plano
- Dualidad
- Espacio afín y espacio proyectivo
- Homografías
- Visualizando la recta del infinito
- El espacio proyectivo n -dimensional
- Respetan algo las homografías?
- El espacio proyectivo 1D
- Razón doble
- Razón doble
- El espacio proyectivo 1D: razón doble
- Proyecciones

Reconstrucción proyectiva

Geometrías: euclídea, afín, proyectiva



Coordenadas homogéneas en el plano

Ecuación *afín* de una recta:

$$ax + by + c = 0$$

Coordenadas homogéneas de la recta:

$$\mathbf{r} \sim (a, b, c)$$

Punto de la recta

$$(x, y), (x, y, 1)(a, b, c)^\top = 0$$

Coordenadas homogéneas del punto:

$$(X, Y, T) \sim (x, y, 1), \quad \frac{X}{T} = x, \quad \frac{Y}{T} = y$$

- title1
- Geometría proyectiva y visión artificial

Introducción

Elementos de geometría proyectiva

- Proyecciones
- **Coordenadas homogéneas en el plano**

● Coordenadas homogéneas en el plano

● Dualidad

● Espacio afín y espacio proyectivo

● Homografías

● Visualizando la recta del infinito

● El espacio proyectivo n -dimensional

● Respetan algo las homografías?

● El espacio proyectivo 1D

● Razón doble

● Razón doble

● El espacio proyectivo 1D: razón doble

● Proyecciones

Reconstrucción proyectiva

Geometrías: euclídea, afín, proyectiva



Coordenadas homogéneas en el plano

Ecuación *afín* de una recta:

$$ax + by + c = 0$$

Coordenadas homogéneas de la recta:

$$\mathbf{r} \sim (a, b, c)$$

Punto de la recta

$$(x, y), (x, y, 1)(a, b, c)^\top = 0$$

Coordenadas homogéneas del punto:

$$(X, Y, T) \sim (x, y, 1), \quad \frac{X}{T} = x, \quad \frac{Y}{T} = y$$

Ecuación de la recta en coordenadas homogéneas

$$ax + by + c = 0 \Leftrightarrow a\frac{X}{T} + b\frac{Y}{T} + c = 0 \Leftrightarrow aX + bY + cT = 0$$

- title1
- Geometría proyectiva y visión artificial

Introducción

Elementos de geometría proyectiva

- Proyecciones
- **Coordenadas homogéneas en el plano**

● Coordenadas homogéneas en el plano

● Dualidad

● Espacio afín y espacio proyectivo

● Homografías

● Visualizando la recta del infinito

● El espacio proyectivo n -dimensional

● Respetan algo las homografías?

● El espacio proyectivo 1D

● Razón doble

● Razón doble

● El espacio proyectivo 1D: razón doble

● Proyecciones

Reconstrucción proyectiva

Geometrías: euclídea, afín, proyectiva



Coordenadas homogéneas en el plano

?Qué representa el punto $(X, Y, 0)$?

- title1
- Geometría proyectiva y visión artificial

Introducción

Elementos de geometría proyectiva

- Proyecciones
- Coordenadas homogéneas en el plano
- **Coordenadas homogéneas en el plano**
- Dualidad
- Espacio afín y espacio proyectivo
- Homografías
- Visualizando la recta del infinito
- El espacio proyectivo n -dimensional
- Respetan algo las homografías?
- El espacio proyectivo 1D
- Razón doble
- Razón doble
- El espacio proyectivo 1D: razón doble
- Proyecciones

Reconstrucción proyectiva

Geometrías: euclídea, afín, proyectiva



Coordenadas homogéneas en el plano

?Qué representa el punto $(X, Y, 0)$?

Punto de corte de dos rectas

$$aX + bY + cT = 0, \quad a'X + b'Y + c'T = 0$$

$$\Rightarrow (X, Y, T) \sim (a, b, c) \times (a', b', c').$$

- title1
- Geometría proyectiva y visión artificial

Introducción

Elementos de geometría proyectiva

- Proyecciones
- Coordenadas homogéneas en el plano
- **Coordenadas homogéneas en el plano**
- Dualidad
- Espacio afín y espacio proyectivo
- Homografías
- Visualizando la recta del infinito
- El espacio proyectivo n -dimensional
- Respetan algo las homografías?
- El espacio proyectivo 1D
- Razón doble
- Razón doble
- El espacio proyectivo 1D: razón doble
- Proyecciones

Reconstrucción proyectiva

Geometrías: euclídea, afín, proyectiva



Coordenadas homogéneas en el plano

?Qué representa el punto $(X, Y, 0)$?

Punto de corte de dos rectas

$$aX + bY + cT = 0, \quad a'X + b'Y + c'T = 0$$

$$\Rightarrow (X, Y, T) \sim (a, b, c) \times (a', b', c').$$

Cortamos dos rectas paralelas

$$aX + bY + c = 0, \quad aX + bY + c' = 0$$

$$\Rightarrow (X, Y, T) \sim (a, b, c) \times (a, b, c') \sim (b, -a, 0)$$

Obtenemos el *vector director* de la recta.

- title1
- Geometría proyectiva y visión artificial

Introducción

Elementos de geometría proyectiva

- Proyecciones
- Coordenadas homogéneas en el plano
- **Coordenadas homogéneas en el plano**

- Dualidad
- Espacio afín y espacio proyectivo
- Homografías
- Visualizando la recta del infinito
- El espacio proyectivo n -dimensional
- Respetan algo las homografías?
- El espacio proyectivo 1D
- Razón doble
- Razón doble
- El espacio proyectivo 1D: razón doble
- Proyecciones

Reconstrucción proyectiva

Geometrías: euclídea, afín, proyectiva



Coordenadas homogéneas en el plano

?Qué representa el punto $(X, Y, 0)$?

Punto de corte de dos rectas

$$aX + bY + cT = 0, \quad a'X + b'Y + c'T = 0$$

$$\Rightarrow (X, Y, T) \sim (a, b, c) \times (a', b', c').$$

Cortamos dos rectas paralelas

$$aX + bY + c = 0, \quad aX + bY + c' = 0$$

$$\Rightarrow (X, Y, T) \sim (a, b, c) \times (a, b, c') \sim (b, -a, 0)$$

Obtenemos el *vector director* de la recta.

$(X, Y, 0)$ es el “punto” en el que se cortan todas las rectas con vector director $\mathbf{v} = (X, Y)$

\Rightarrow *punto del infinito* de la recta.

- title1
- Geometría proyectiva y visión artificial

Introducción

Elementos de geometría proyectiva

- Proyecciones
- Coordenadas homogéneas en el plano
- **Coordenadas homogéneas en el plano**

- Dualidad
- Espacio afín y espacio proyectivo
- Homografías
- Visualizando la recta del infinito
- El espacio proyectivo n -dimensional
- Respetan algo las homografías?
- El espacio proyectivo 1D
- Razón doble
- Razón doble
- El espacio proyectivo 1D: razón doble
- Proyecciones

Reconstrucción proyectiva

Geometrías: euclídea, afín, proyectiva



Coordenadas homogéneas en el plano

?Qué representa el punto $(X, Y, 0)$?

Punto de corte de dos rectas

$$aX + bY + cT = 0, \quad a'X + b'Y + c'T = 0$$

$$\Rightarrow (X, Y, T) \sim (a, b, c) \times (a', b', c').$$

Cortamos dos rectas paralelas

$$aX + bY + c = 0, \quad aX + bY + c' = 0$$

$$\Rightarrow (X, Y, T) \sim (a, b, c) \times (a, b, c') \sim (b, -a, 0)$$

Obtenemos el *vector director* de la recta.

$(X, Y, 0)$ es el “punto” en el que se cortan todas las rectas con **vector director** $\mathbf{v} = (X, Y)$

\Rightarrow *punto del infinito* de la recta.

Los puntos del infinito forman la *recta del infinito*, $T = 0$.

- title1
- Geometría proyectiva y visión artificial

Introducción

Elementos de geometría proyectiva

- Proyecciones
- Coordenadas homogéneas en el plano
- **Coordenadas homogéneas en el plano**

- Dualidad
- Espacio afín y espacio proyectivo
- Homografías
- Visualizando la recta del infinito
- El espacio proyectivo n -dimensional
- Respetan algo las homografías?
- El espacio proyectivo 1D
- Razón doble
- Razón doble
- El espacio proyectivo 1D: razón doble
- Proyecciones

Reconstrucción proyectiva

Geometrías: euclídea, afín, proyectiva



Dualidad

Si en un teorema cambiamos “*recta definida por dos puntos*” por *punto de corte de dos rectas*, obtenemos otro teorema.

Por ejemplo:

- Dos puntos determinan una recta.
- Dos rectas determinan un punto.

- title1
- Geometría proyectiva y visión artificial

Introducción

Elementos de geometría proyectiva

- Proyecciones
- Coordenadas homogéneas en el plano
- Coordenadas homogéneas en el plano

● Dualidad

- Espacio afín y espacio proyectivo
- Homografías
- Visualizando la recta del infinito
- El espacio proyectivo n -dimensional
- Respetan algo las homografías?
- El espacio proyectivo 1D
- Razón doble
- Razón doble
- El espacio proyectivo 1D: razón doble
- Proyecciones

Reconstrucción proyectiva

Geometrías: euclídea, afín, proyectiva



Dualidad

- title1
- Geometría proyectiva y visión artificial

Introducción

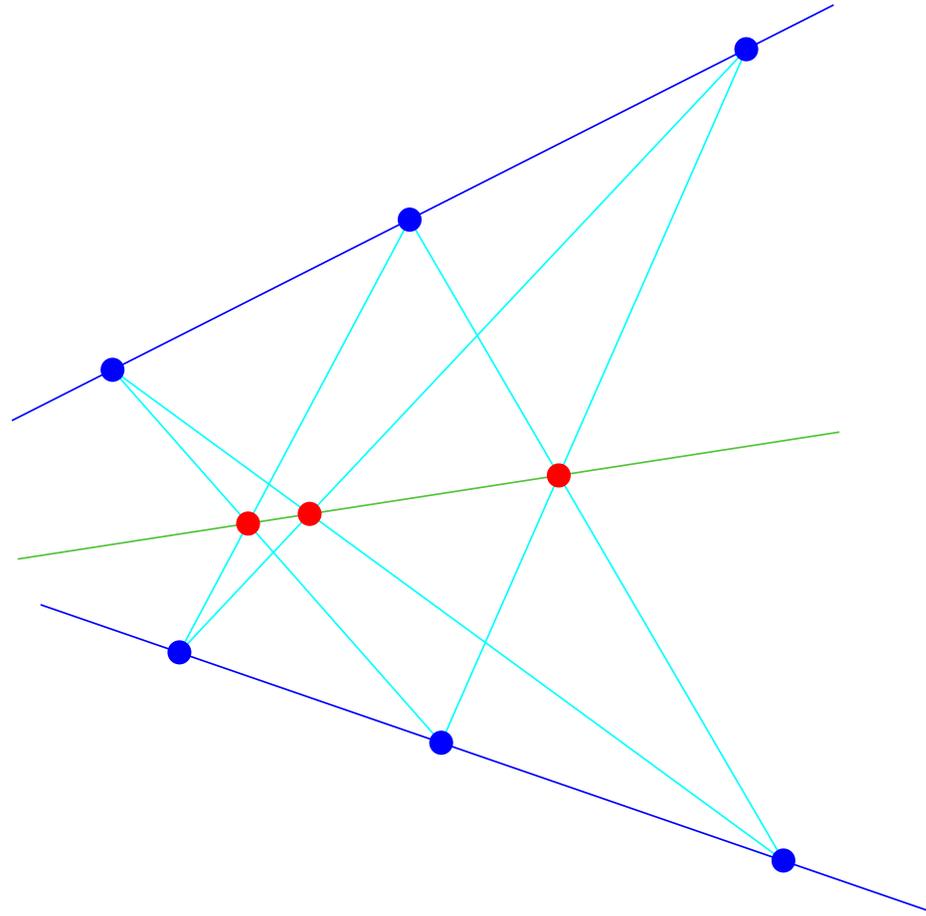
Elementos de geometría proyectiva

- Proyecciones
- Coordenadas homogéneas en el plano
- Coordenadas homogéneas en el plano
- Dualidad
- Espacio afín y espacio proyectivo
- Homografías
- Visualizando la recta del infinito
- El espacio proyectivo n -dimensional
- Respetan algo las homografías?
- El espacio proyectivo 1D
- Razón doble
- Razón doble
- El espacio proyectivo 1D: razón doble
- Proyecciones

Reconstrucción proyectiva

Geometrías: euclídea, afín, proyectiva

Teorema de Pappus





Dualidad

- title1
- Geometría proyectiva y visión artificial

Introducción

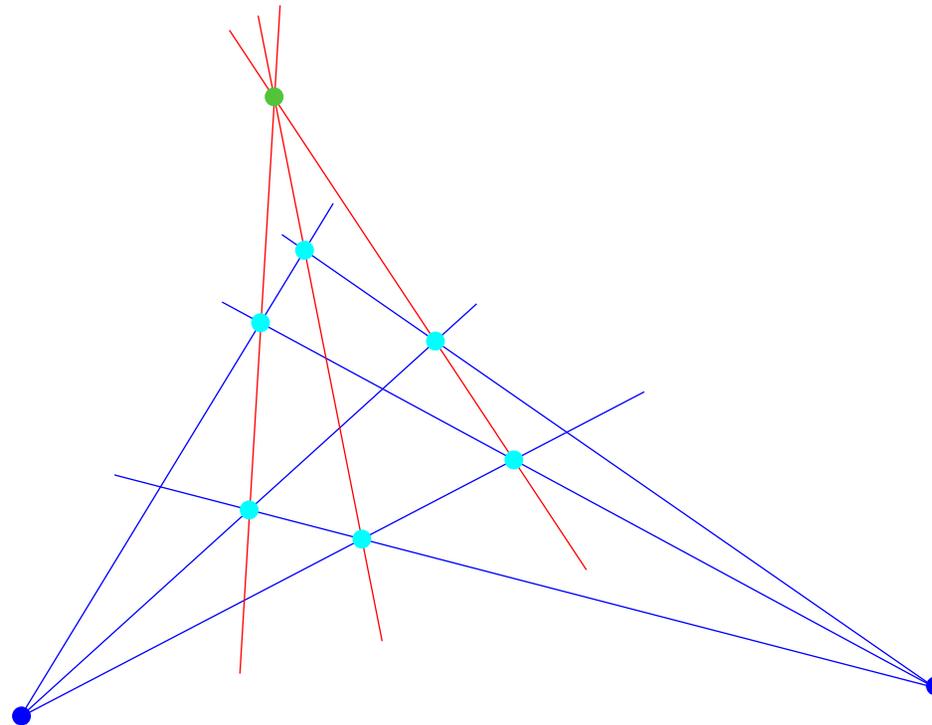
Elementos de geometría proyectiva

- Proyecciones
- Coordenadas homogéneas en el plano
- Coordenadas homogéneas en el plano
- Dualidad
- Espacio afín y espacio proyectivo
- Homografías
- Visualizando la recta del infinito
- El espacio proyectivo n -dimensional
- Respetan algo las homografías?
- El espacio proyectivo 1D
- Razón doble
- Razón doble
- El espacio proyectivo 1D: razón doble
- Proyecciones

Reconstrucción proyectiva

Geometrías: euclídea, afín, proyectiva

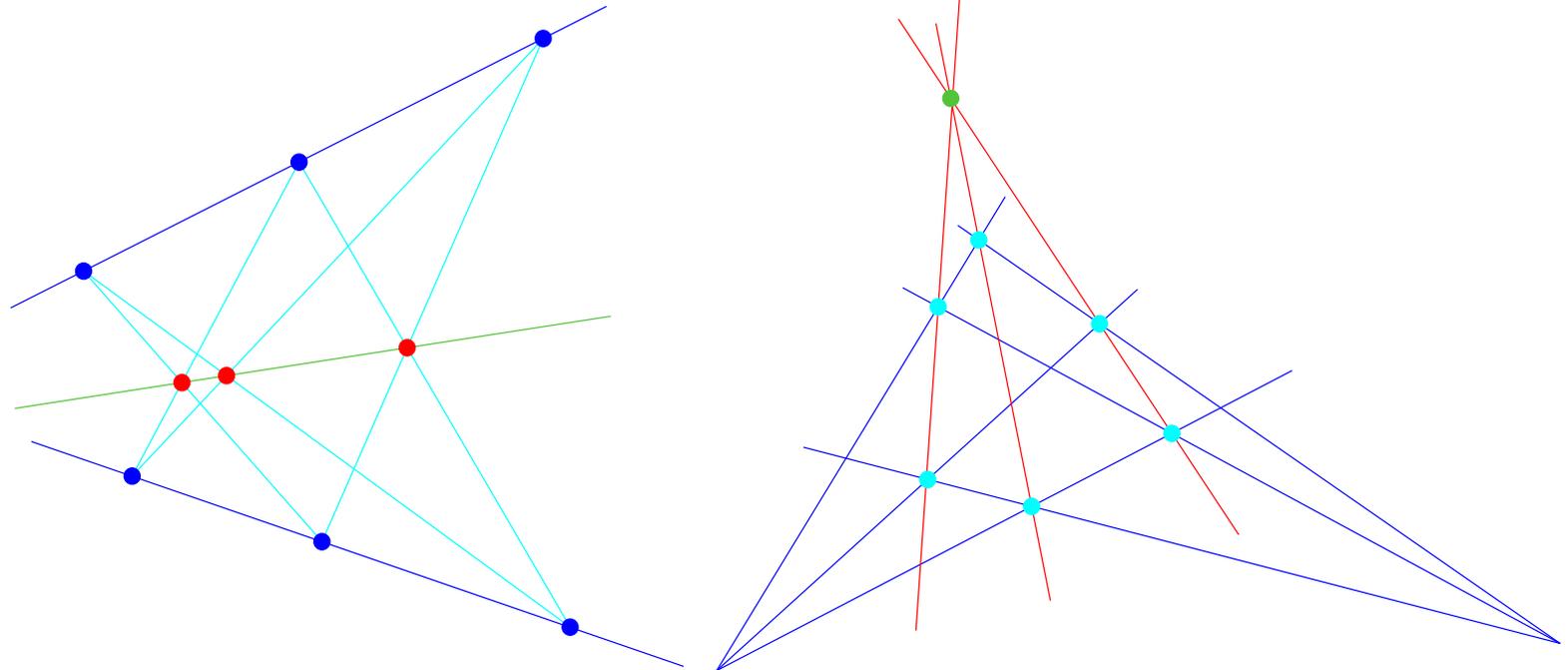
Dual del teorema de Pappus





Dualidad

Teorema de Pappus y su dual



- title1
- Geometría proyectiva y visión artificial

Introducción

Elementos de geometría proyectiva

- Proyecciones
- Coordenadas homogéneas en el plano
- Coordenadas homogéneas en el plano

● Dualidad

- Espacio afín y espacio proyectivo
- Homografías
- Visualizando la recta del infinito
- El espacio proyectivo n -dimensional
- Respetan algo las homografías?
- El espacio proyectivo 1D
- Razón doble
- Razón doble
- El espacio proyectivo 1D: razón doble
- Proyecciones

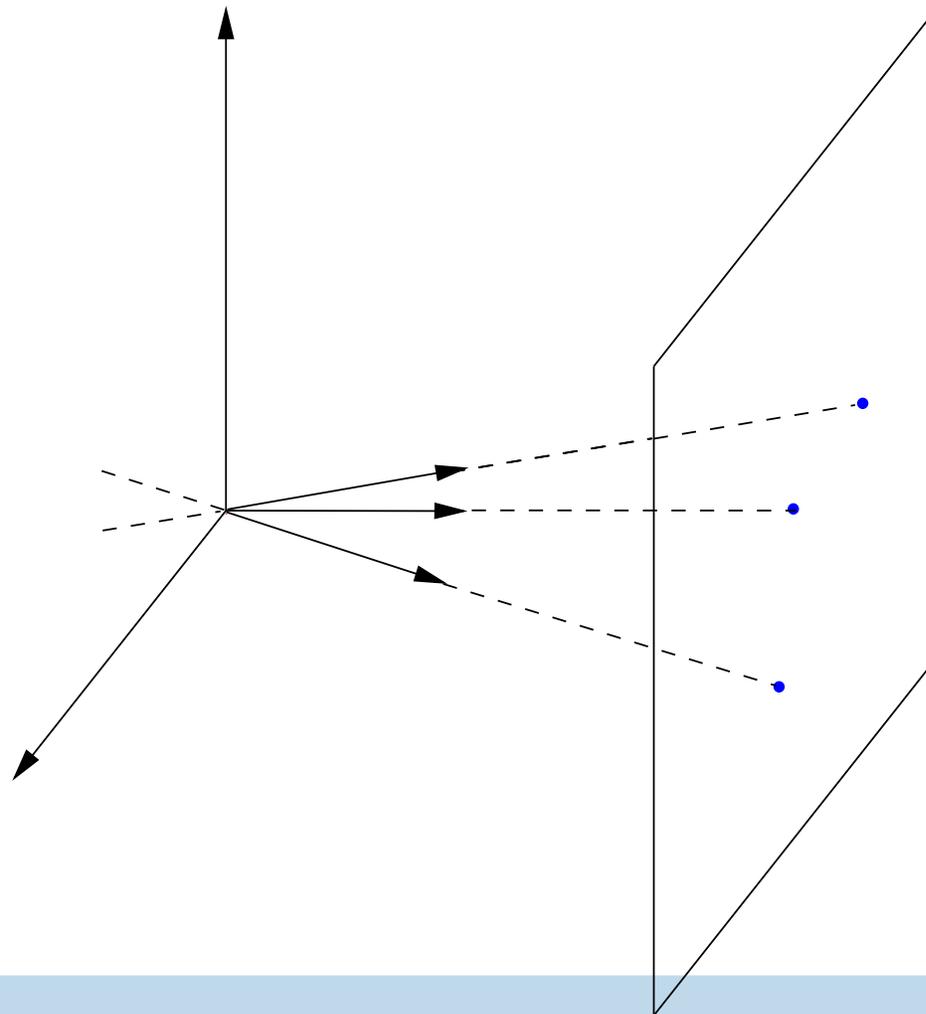
Reconstrucción proyectiva

Geometrías: euclídea, afín, proyectiva



Espacio afín y espacio proyectivo

El *espacio proyectivo* es el espacio de las coordenadas homogéneas.



- title1
- Geometría proyectiva y visión artificial

Introducción

Elementos de geometría proyectiva

- Proyecciones
- Coordenadas homogéneas en el plano
- Coordenadas homogéneas en el plano
- Dualidad
- **Espacio afín y espacio proyectivo**
- Homografías
- Visualizando la recta del infinito
- El espacio proyectivo n -dimensional
- Respetan algo las homografías?
- El espacio proyectivo 1D
- Razón doble
- Razón doble
- El espacio proyectivo 1D: razón doble
- Proyecciones

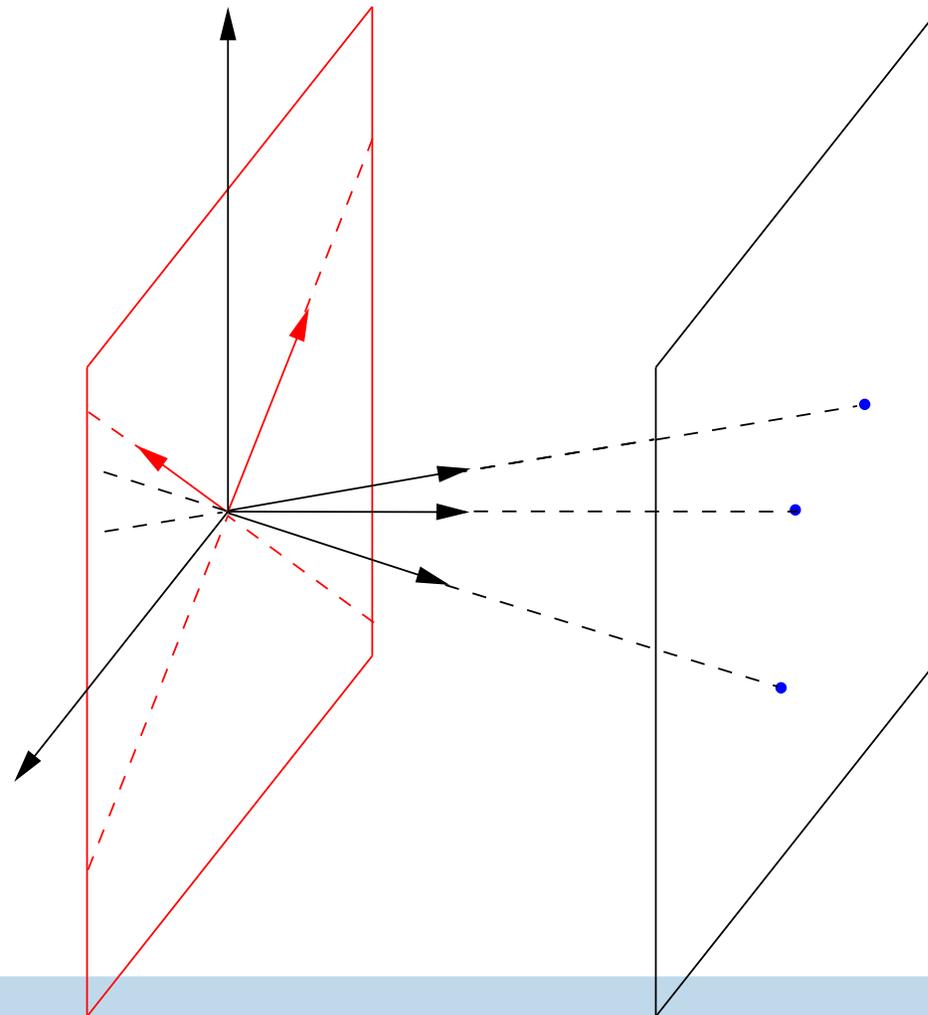
Reconstrucción proyectiva

Geometrías: euclídea, afín, proyectiva



Espacio afín y espacio proyectivo

El *espacio proyectivo* es el espacio de las coordenadas homogéneas.



- title1
- Geometría proyectiva y visión artificial

Introducción

Elementos de geometría proyectiva

- Proyecciones
- Coordenadas homogéneas en el plano
- Coordenadas homogéneas en el plano
- Dualidad
- **Espacio afín y espacio proyectivo**
- Homografías
- Visualizando la recta del infinito
- El espacio proyectivo n -dimensional
- Respetan algo las homografías?
- El espacio proyectivo 1D
- Razón doble
- Razón doble
- El espacio proyectivo 1D: razón doble
- Proyecciones

Reconstrucción proyectiva

Geometrías: euclídea, afín, proyectiva



Homografías

Una *homografía* es una transformación biyectiva del espacio proyectivo de la forma

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ T \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} X' \\ Y' \\ T' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ T \end{pmatrix}$$

Dos matrices proporcionales definen la misma homografía.

- title1
- Geometría proyectiva y visión artificial

Introducción

Elementos de geometría proyectiva

- Proyecciones
- Coordenadas homogéneas en el plano
- Coordenadas homogéneas en el plano
- Dualidad
- Espacio afín y espacio proyectivo

● Homografías

- Visualizando la recta del infinito
- El espacio proyectivo n -dimensional
- Respetan algo las homografías?
- El espacio proyectivo 1D
- Razón doble
- Razón doble
- El espacio proyectivo 1D: razón doble
- Proyecciones

Reconstrucción proyectiva

Geometrías: euclídea, afín, proyectiva



Homografías

Una *homografía* es una transformación biyectiva del espacio proyectivo de la forma

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ T \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} X' \\ Y' \\ T' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ T \end{pmatrix}$$

Dos matrices proporcionales definen la misma homografía.

En el espacio afín no es biyectiva:

- Los puntos $(X, Y, T)(a_{31}, a_{32}, a_{33})^T = 0$ se van al infinito.
- Los puntos de la recta del infinito $T = 0$ *aparecen* en la recta $(a_{11}, a_{21}, a_{31}) \times (a_{12}, a_{22}, a_{32})$.

- title1
- Geometría proyectiva y visión artificial

Introducción

Elementos de geometría proyectiva

- Proyecciones
- Coordenadas homogéneas en el plano
- Coordenadas homogéneas en el plano
- Dualidad
- Espacio afín y espacio proyectivo

● Homografías

- Visualizando la recta del infinito
- El espacio proyectivo n -dimensional
- Respetan algo las homografías?
- El espacio proyectivo 1D
- Razón doble
- Razón doble
- El espacio proyectivo 1D: razón doble
- Proyecciones

Reconstrucción proyectiva

Geometrías: euclídea, afín, proyectiva



Homografías

Una *homografía* es una transformación biyectiva del espacio proyectivo de la forma

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ T \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} X' \\ Y' \\ T' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ T \end{pmatrix}$$

Dos matrices proporcionales definen la misma homografía.

En el espacio afín no es biyectiva:

- Los puntos $(X, Y, T)(a_{31}, a_{32}, a_{33})^\top = 0$ se van al infinito.
- Los puntos de la recta del infinito $T = 0$ *aparecen* en la recta $(a_{11}, a_{21}, a_{31}) \times (a_{12}, a_{22}, a_{32})$.

Geometría proyectiva \equiv Estudio de las propiedades que se preservan por homografías.

- title1
- Geometría proyectiva y visión artificial

Introducción

Elementos de geometría proyectiva

- Proyecciones
- Coordenadas homogéneas en el plano
- Coordenadas homogéneas en el plano
- Dualidad
- Espacio afín y espacio proyectivo

● Homografías

- Visualizando la recta del infinito
- El espacio proyectivo n -dimensional
- Respetan algo las homografías?
- El espacio proyectivo 1D
- Razón doble
- Razón doble
- El espacio proyectivo 1D: razón doble
- Proyecciones

Reconstrucción proyectiva

Geometrías: euclídea, afín, proyectiva



Visualizando la recta del infinito

- title1
- Geometría proyectiva y visión artificial

Introducción

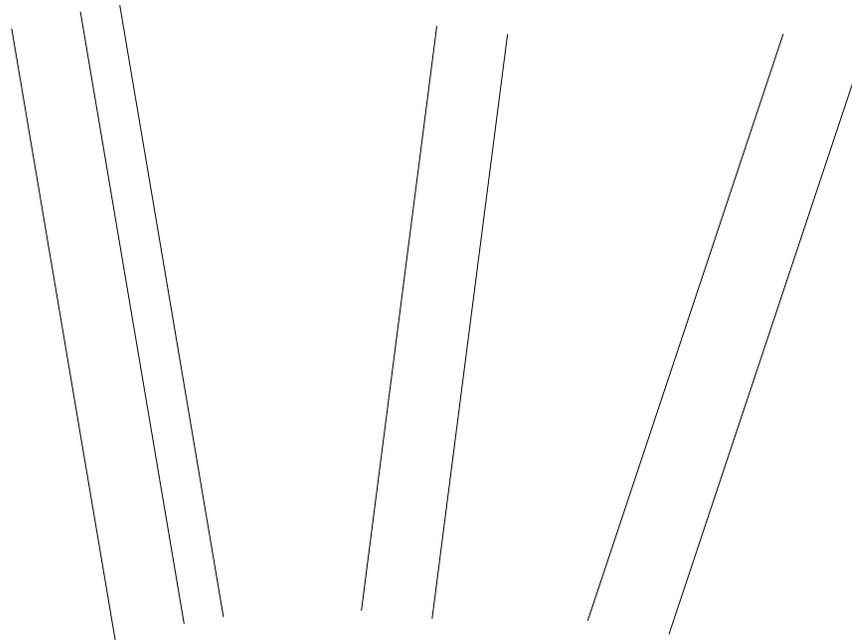
Elementos de geometría proyectiva

- Proyecciones
- Coordenadas homogéneas en el plano
- Coordenadas homogéneas en el plano
- Dualidad
- Espacio afín y espacio proyectivo
- Homografías
- Visualizando la recta del infinito
- El espacio proyectivo n -dimensional
- Respetan algo las homografías?
- El espacio proyectivo 1D
- Razón doble
- Razón doble
- El espacio proyectivo 1D: razón doble
- Proyecciones

Reconstrucción proyectiva

Geometrías: euclídea, afín, proyectiva

Aplicando una homografía:





Visualizando la recta del infinito

- title1
- Geometría proyectiva y visión artificial

Introducción

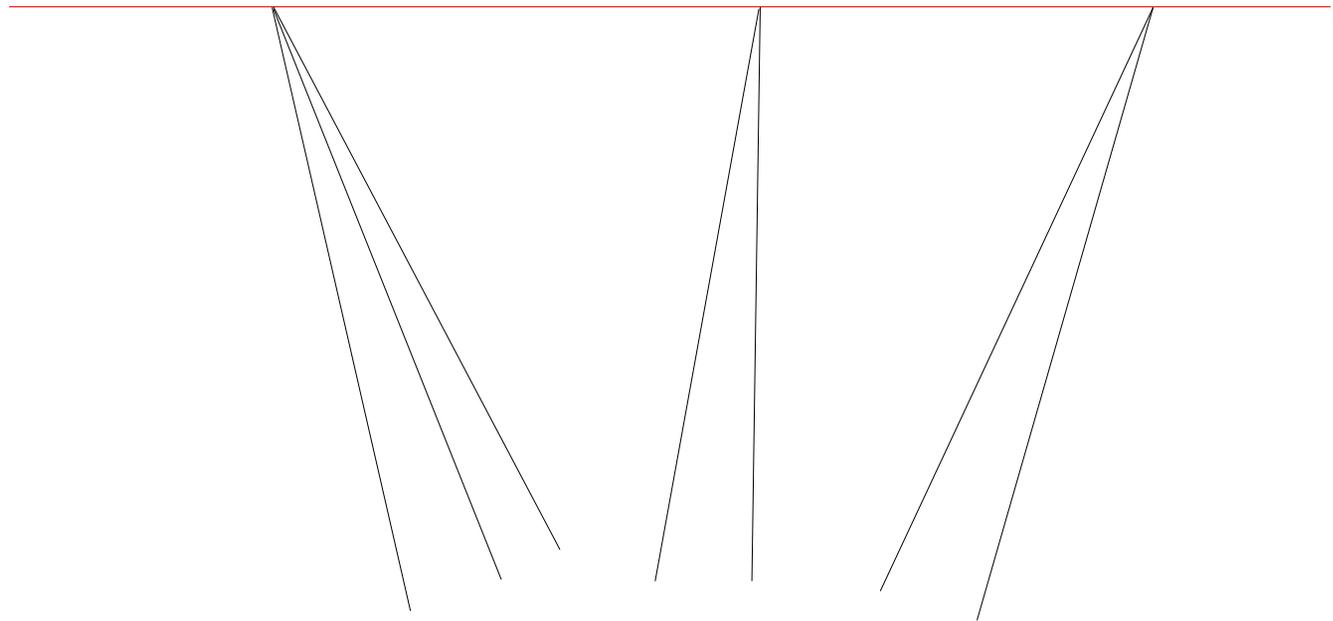
Elementos de geometría proyectiva

- Proyecciones
- Coordenadas homogéneas en el plano
- Coordenadas homogéneas en el plano
- Dualidad
- Espacio afín y espacio proyectivo
- Homografías
- Visualizando la recta del infinito
- El espacio proyectivo n -dimensional
- Respetan algo las homografías?
- El espacio proyectivo 1D
- Razón doble
- Razón doble
- El espacio proyectivo 1D: razón doble
- Proyecciones

Reconstrucción proyectiva

Geometrías: euclídea, afín, proyectiva

Aplicando una homografía:





El espacio proyectivo n -dimensional

Coordenadas: de afines a homogéneas y viceversa:

$$(x_1, \dots, x_n) \rightarrow (x_1, \dots, x_n, 1)$$

$$\left(\frac{X_1}{X_{n+1}}, \dots, \frac{X_n}{X_{n+1}} \right) \leftarrow (X_1, \dots, X_n, X_{n+1})$$

- title1
- Geometría proyectiva y visión artificial

Introducción

Elementos de geometría proyectiva

- Proyecciones
- Coordenadas homogéneas en el plano
- Coordenadas homogéneas en el plano
- Dualidad
- Espacio afín y espacio proyectivo
- Homografías
- Visualizando la recta del infinito
- El espacio proyectivo n -dimensional
- Respetan algo las homografías?
- El espacio proyectivo 1D
- Razón doble
- Razón doble
- El espacio proyectivo 1D: razón doble
- Proyecciones

Reconstrucción proyectiva

Geometrías: euclídea, afín, proyectiva



El espacio proyectivo n -dimensional

Coordenadas: de afines a homogéneas y viceversa:

$$(x_1, \dots, x_n) \rightarrow (x_1, \dots, x_n, 1)$$

$$\left(\frac{X_1}{X_{n+1}}, \dots, \frac{X_n}{X_{n+1}} \right) \leftarrow (X_1, \dots, X_n, X_{n+1})$$

Hiperplano del infinito:

$$X_{n+1} = 0$$

- title1
- Geometría proyectiva y visión artificial

Introducción

Elementos de geometría proyectiva

- Proyecciones
- Coordenadas homogéneas en el plano
- Coordenadas homogéneas en el plano
- Dualidad
- Espacio afín y espacio proyectivo
- Homografías
- Visualizando la recta del infinito
- El espacio proyectivo n -dimensional
- Respetan algo las homografías?
- El espacio proyectivo 1D
- Razón doble
- Razón doble
- El espacio proyectivo 1D: razón doble
- Proyecciones

Reconstrucción proyectiva

Geometrías: euclídea, afín, proyectiva



El espacio proyectivo n -dimensional

Coordenadas: de afines a homogéneas y viceversa:

$$(x_1, \dots, x_n) \rightarrow (x_1, \dots, x_n, 1)$$

$$\left(\frac{X_1}{X_{n+1}}, \dots, \frac{X_n}{X_{n+1}} \right) \leftarrow (X_1, \dots, X_n, X_{n+1})$$

Hiperplano del infinito:

$$X_{n+1} = 0$$

Dualidad:

Punto \leftrightarrow Hiperplano

Variedad definida por m puntos \leftrightarrow Variedad intersección de m hiperplanos.

- title1
- Geometría proyectiva y visión artificial

Introducción

Elementos de geometría proyectiva

- Proyecciones
- Coordenadas homogéneas en el plano
- Coordenadas homogéneas en el plano
- Dualidad
- Espacio afín y espacio proyectivo
- Homografías
- Visualizando la recta del infinito
- El espacio proyectivo n -dimensional
- Respetan algo las homografías?
- El espacio proyectivo 1D
- Razón doble
- Razón doble
- El espacio proyectivo 1D: razón doble
- Proyecciones

Reconstrucción proyectiva

Geometrías: euclídea, afín, proyectiva



El espacio proyectivo n -dimensional

- title1
- Geometría proyectiva y visión artificial

Introducción

Elementos de geometría proyectiva

- Proyecciones
- Coordenadas homogéneas en el plano
- Coordenadas homogéneas en el plano
- Dualidad
- Espacio afín y espacio proyectivo
- Homografías
- Visualizando la recta del infinito
- El espacio proyectivo n -dimensional
- Respetan algo las homografías?
- El espacio proyectivo 1D
- Razón doble
- Razón doble
- El espacio proyectivo 1D: razón doble
- Proyecciones

Reconstrucción proyectiva

Geometrías: euclídea, afín, proyectiva

Coordenadas: de afines a homogéneas y viceversa:

$$(x_1, \dots, x_n) \rightarrow (x_1, \dots, x_n, 1)$$
$$\left(\frac{X_1}{X_{n+1}}, \dots, \frac{X_n}{X_{n+1}} \right) \leftarrow (X_1, \dots, X_n, X_{n+1})$$

Hiperplano del infinito:

$$X_{n+1} = 0$$

Dualidad:

Punto \leftrightarrow Hiperplano

Variedad definida por m puntos \leftrightarrow Variedad intersección de m hiperplanos.

Homografías:

Definidas por $n + 1$ puntos en *posición general*.



Respetan algo las homografías?

- title1
- Geometría proyectiva y visión artificial

Introducción

Elementos de geometría proyectiva

- Proyecciones
- Coordenadas homogéneas en el plano
- Coordenadas homogéneas en el plano
- Dualidad
- Espacio afín y espacio proyectivo
- Homografías
- Visualizando la recta del infinito
- El espacio proyectivo n -dimensional
- Respetan algo las homografías?
- El espacio proyectivo 1D
- Razón doble
- Razón doble
- El espacio proyectivo 1D: razón doble
- Proyecciones

Reconstrucción proyectiva

Geometrías: euclídea, afín, proyectiva

■ Colinealidad



Respetan algo las homografías?

- title1
- Geometría proyectiva y visión artificial

Introducción

Elementos de geometría proyectiva

- Proyecciones
- Coordenadas homogéneas en el plano
- Coordenadas homogéneas en el plano
- Dualidad
- Espacio afín y espacio proyectivo
- Homografías
- Visualizando la recta del infinito
- El espacio proyectivo n -dimensional
- Respetan algo las homografías?
- El espacio proyectivo 1D
- Razón doble
- Razón doble
- El espacio proyectivo 1D: razón doble
- Proyecciones

Reconstrucción proyectiva

Geometrías: euclídea, afín, proyectiva

- Colinealidad
- Incidencia



Respetan algo las homografías?

- title1
- Geometría proyectiva y visión artificial

Introducción

Elementos de geometría proyectiva

- Proyecciones
- Coordenadas homogéneas en el plano
- Coordenadas homogéneas en el plano
- Dualidad
- Espacio afín y espacio proyectivo
- Homografías
- Visualizando la recta del infinito
- El espacio proyectivo n -dimensional
- Respetan algo las homografías?
- El espacio proyectivo 1D
- Razón doble
- Razón doble
- El espacio proyectivo 1D: razón doble
- Proyecciones

Reconstrucción proyectiva

Geometrías: euclídea, afín, proyectiva

- Colinealidad
- Incidencia
- Razón doble



El espacio proyectivo 1D

- title1
- Geometría proyectiva y visión artificial

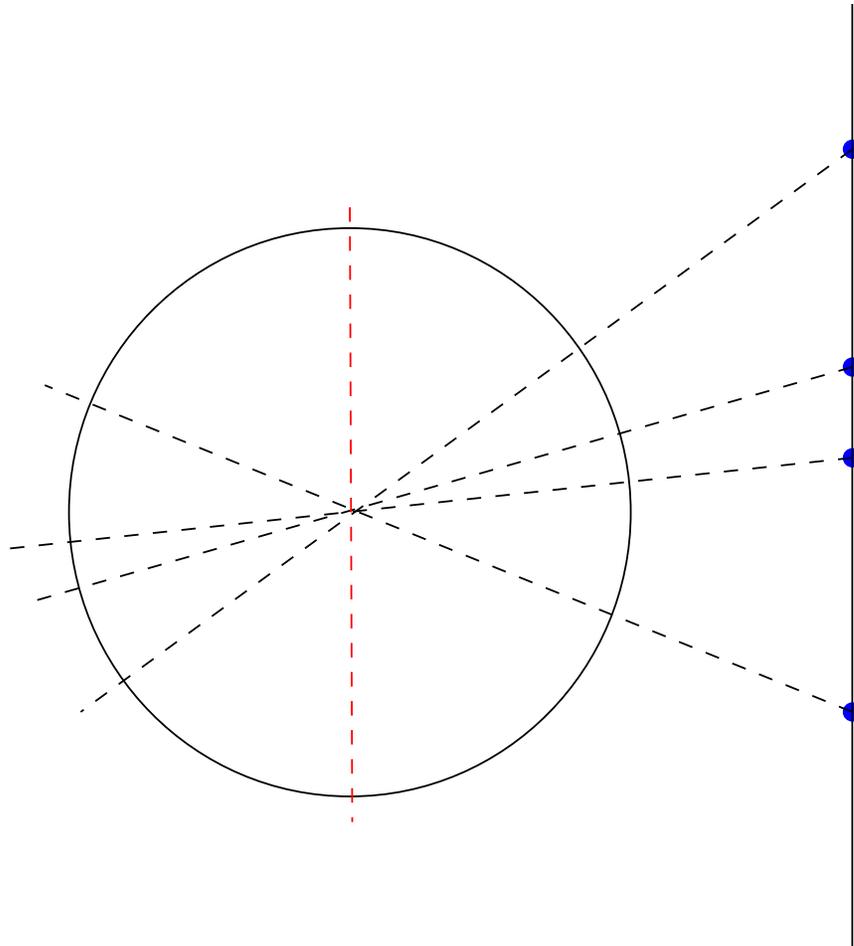
Introducción

Elementos de geometría proyectiva

- Proyecciones
- Coordenadas homogéneas en el plano
- Coordenadas homogéneas en el plano
- Dualidad
- Espacio afín y espacio proyectivo
- Homografías
- Visualizando la recta del infinito
- El espacio proyectivo n -dimensional
- Respetan algo las homografías?
- **El espacio proyectivo 1D**
- Razón doble
- Razón doble
- El espacio proyectivo 1D: razón doble
- Proyecciones

Reconstrucción proyectiva

Geometrías: euclídea, afín, proyectiva





Razón doble

- title1
- Geometría proyectiva y visión artificial

Introducción

Elementos de geometría proyectiva

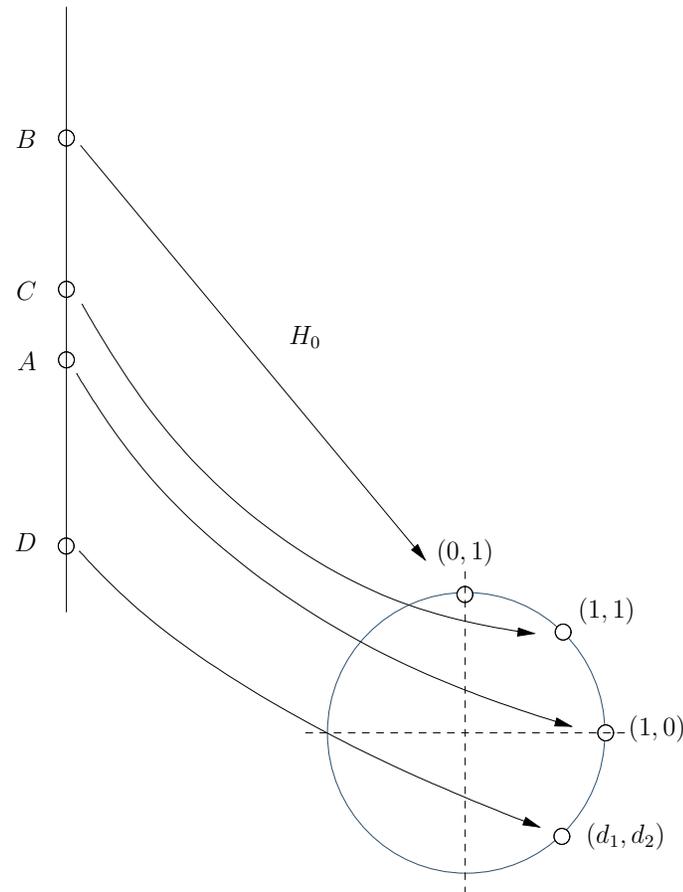
- Proyecciones
- Coordenadas homogéneas en el plano
- Coordenadas homogéneas en el plano
- Dualidad
- Espacio afín y espacio proyectivo
- Homografías
- Visualizando la recta del infinito
- El espacio proyectivo n -dimensional
- Respetan algo las homografías?
- El espacio proyectivo 1D

Razón doble

- Razón doble
- El espacio proyectivo 1D: razón doble
- Proyecciones

Reconstrucción proyectiva

Geometrías: euclídea, afín, proyectiva



$$[A, B, C, D] = \frac{d_1}{d_2}$$



Razón doble

- title1
- Geometría proyectiva y visión artificial

Introducción

Elementos de geometría proyectiva

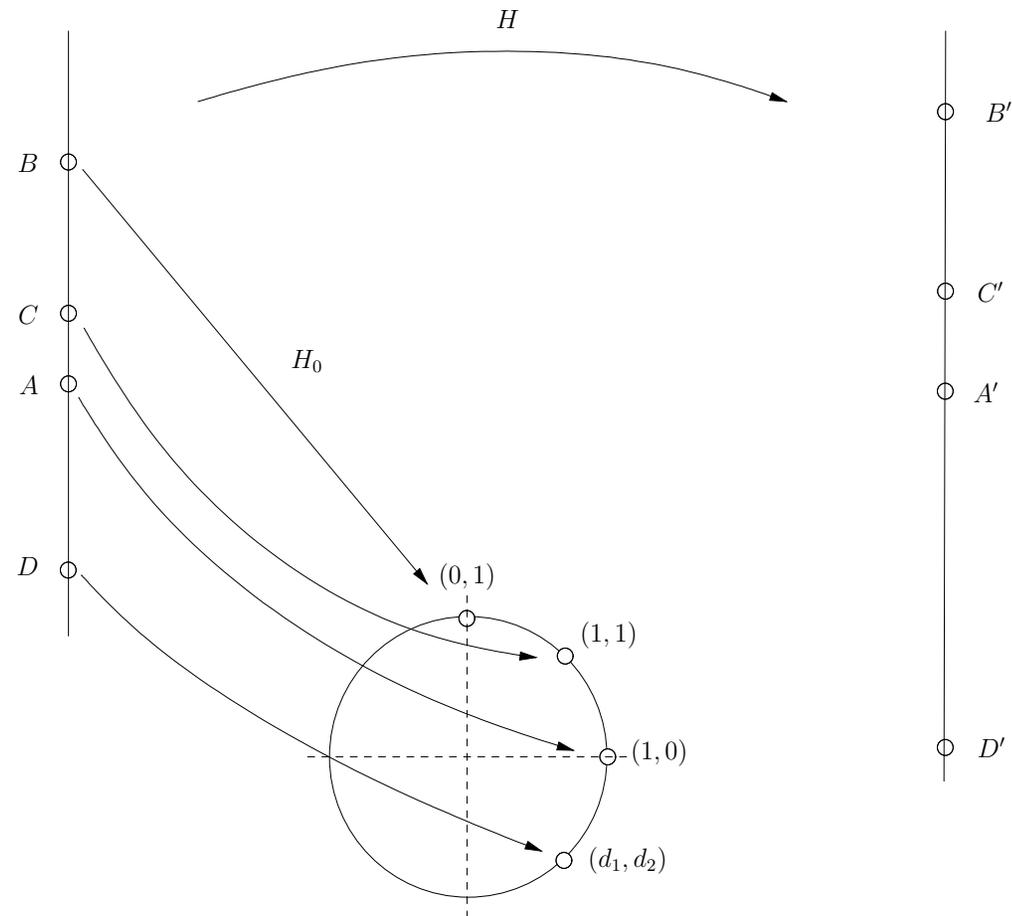
- Proyecciones
- Coordenadas homogéneas en el plano
- Coordenadas homogéneas en el plano
- Dualidad
- Espacio afín y espacio proyectivo
- Homografías
- Visualizando la recta del infinito
- El espacio proyectivo n -dimensional
- Respetan algo las homografías?
- El espacio proyectivo 1D

Razón doble

- Razón doble
- El espacio proyectivo 1D: razón doble
- Proyecciones

Reconstrucción proyectiva

Geometrías: euclídea, afín, proyectiva





Razón doble

- title1
- Geometría proyectiva y visión artificial

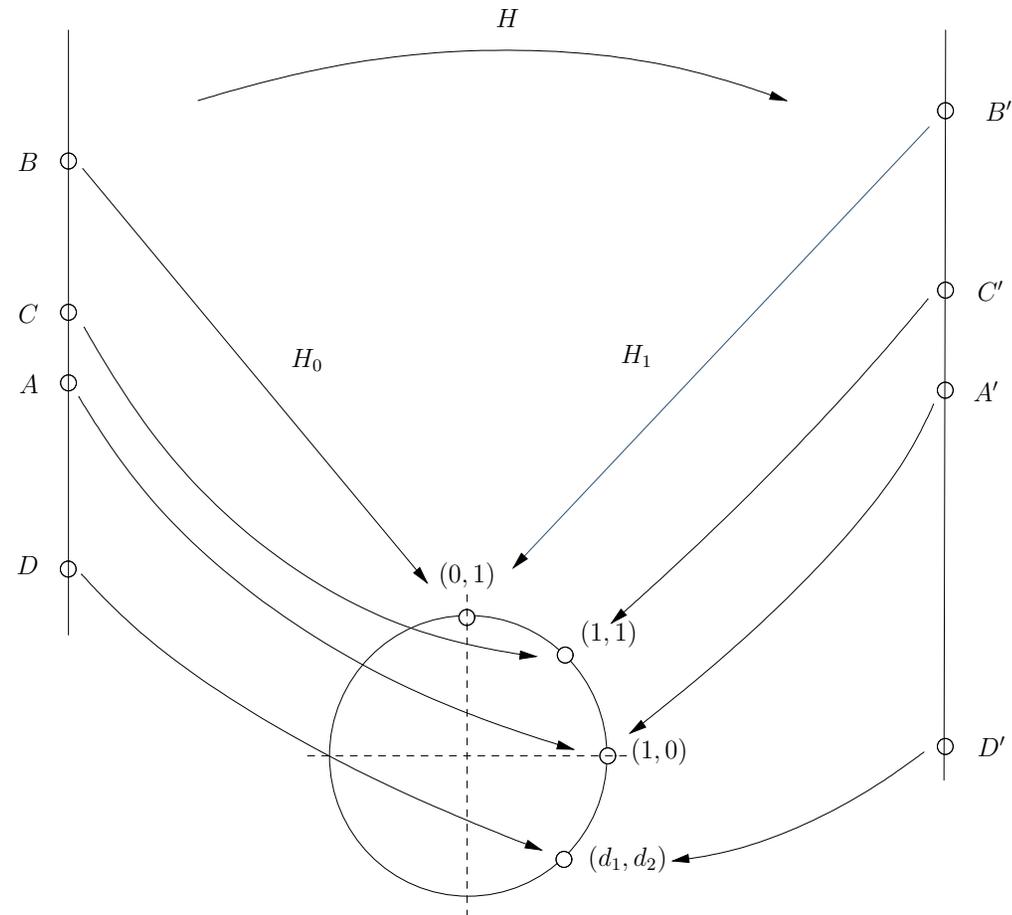
Introducción

Elementos de geometría proyectiva

- Proyecciones
- Coordenadas homogéneas en el plano
- Coordenadas homogéneas en el plano
- Dualidad
- Espacio afín y espacio proyectivo
- Homografías
- Visualizando la recta del infinito
- El espacio proyectivo n -dimensional
- Respetan algo las homografías?
- El espacio proyectivo 1D
- **Razón doble**
- Razón doble
- El espacio proyectivo 1D: razón doble
- Proyecciones

Reconstrucción proyectiva

Geometrías: euclídea, afín, proyectiva





Razón doble

- title1
- Geometría proyectiva y visión artificial

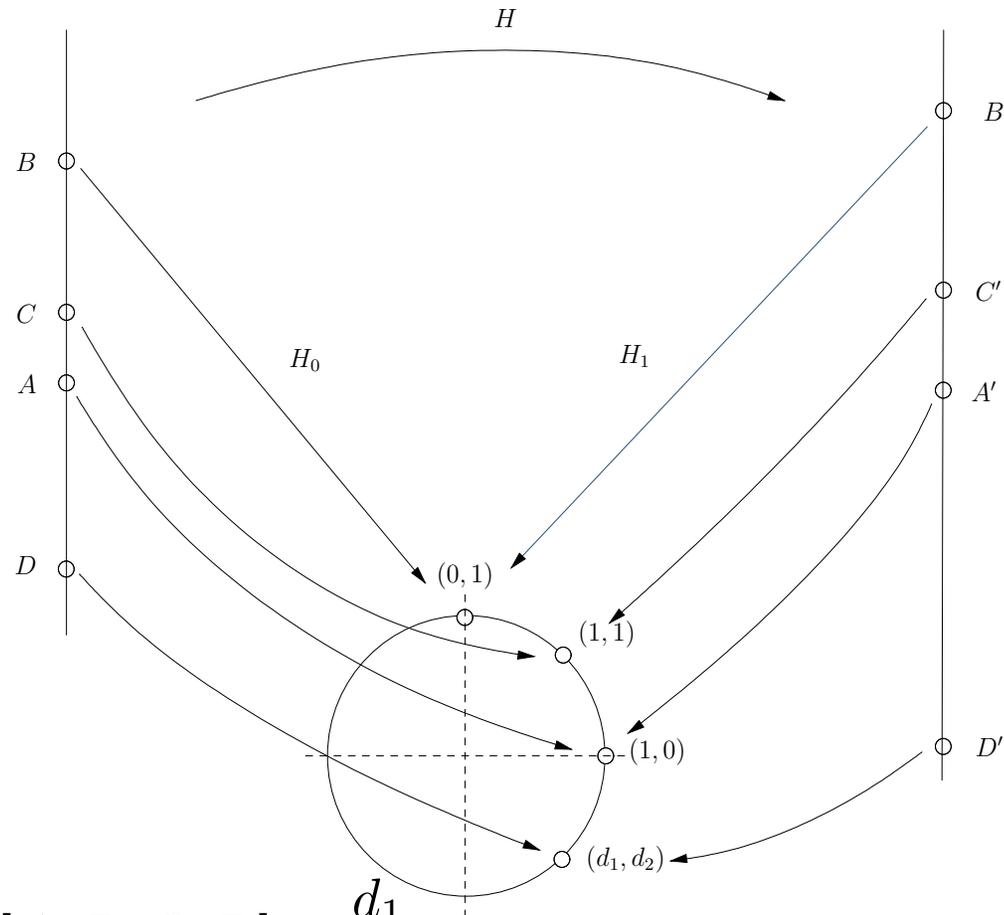
Introducción

Elementos de geometría proyectiva

- Proyecciones
- Coordenadas homogéneas en el plano
- Coordenadas homogéneas en el plano
- Dualidad
- Espacio afín y espacio proyectivo
- Homografías
- Visualizando la recta del infinito
- El espacio proyectivo n -dimensional
- Respetan algo las homografías?
- El espacio proyectivo 1D
- **Razón doble**
- Razón doble
- El espacio proyectivo 1D: razón doble
- Proyecciones

Reconstrucción proyectiva

Geometrías: euclídea, afín, proyectiva



$$[A, B, C, D] = \frac{d_1}{d_2}$$

$$H_1|_{A,B,C} = (H_0 \circ H^{-1})|_{A,B,C} \Rightarrow H_1 = H_0 \circ H^{-1}$$

$$\Rightarrow (d'_1, d'_2) = H_1(D') = H_0((H^{-1}(D'))) = H_0(D) = (d_1, d_2)$$



Razón doble

Fórmula de la razón doble:

$$A \equiv (a_1, a_2), \quad B \equiv (b_1, b_2), \quad C \equiv (c_1, c_2), \quad D \equiv (d_1, d_2),$$

$$[A, B, C, D] = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & c_2 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} c_1 & c_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}} : \frac{\begin{vmatrix} d_1 & d_2 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} d_1 & d_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}}$$

- title1
- Geometría proyectiva y visión artificial

Introducción

Elementos de geometría proyectiva

- Proyecciones
- Coordenadas homogéneas en el plano
- Coordenadas homogéneas en el plano
- Dualidad
- Espacio afín y espacio proyectivo
- Homografías
- Visualizando la recta del infinito
- El espacio proyectivo n -dimensional
- Respetan algo las homografías?
- El espacio proyectivo 1D
- Razón doble
- Razón doble
- El espacio proyectivo 1D: razón doble
- Proyecciones

Reconstrucción proyectiva

Geometrías: euclídea, afín, proyectiva



Razón doble

Fórmula de la razón doble:

$$A \equiv (a_1, a_2), B \equiv (b_1, b_2), C \equiv (c_1, c_2), D \equiv (d_1, d_2),$$

$$[A, B, C, D] = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & c_2 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} c_1 & c_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}} : \frac{\begin{vmatrix} d_1 & d_2 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} d_1 & d_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}}$$

Para cuatro puntos finitos:

$$A \equiv (a, 1), B \equiv (b, 1), C \equiv (c, 1), D \equiv (d, 1),$$

$$[A, B, C, D] = \frac{c - a}{c - b} : \frac{d - a}{d - b}$$

- title1
- Geometría proyectiva y visión artificial

Introducción

Elementos de geometría proyectiva

- Proyecciones
- Coordenadas homogéneas en el plano
- Coordenadas homogéneas en el plano
- Dualidad
- Espacio afín y espacio proyectivo
- Homografías
- Visualizando la recta del infinito
- El espacio proyectivo n -dimensional
- Respetan algo las homografías?
- El espacio proyectivo 1D
- Razón doble
- Razón doble
- El espacio proyectivo 1D: razón doble
- Proyecciones

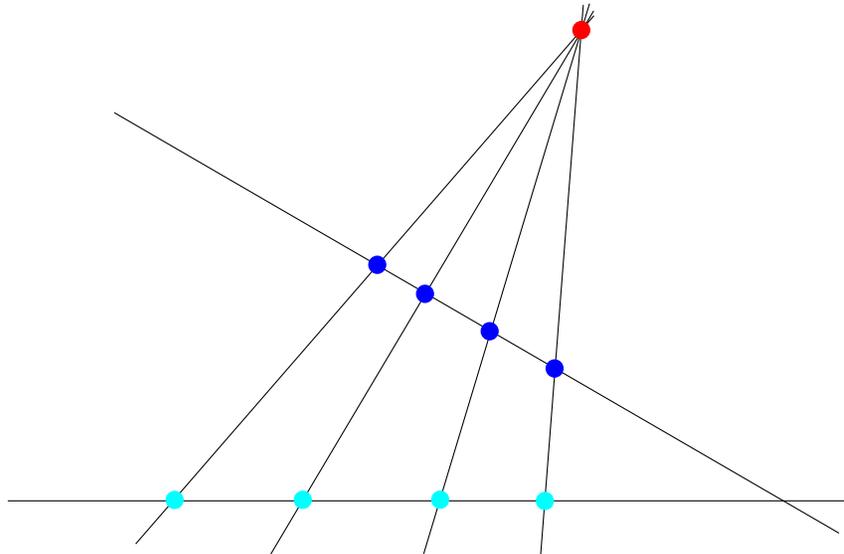
Reconstrucción proyectiva

Geometrías: euclídea, afín, proyectiva



El espacio proyectivo 1D: razón doble

Una *perspectividad* es un caso particular de homografía entre rectas proyectivas.



- title1
- Geometría proyectiva y visión artificial

Introducción

Elementos de geometría proyectiva

- Proyecciones
- Coordenadas homogéneas en el plano
- Coordenadas homogéneas en el plano
- Dualidad
- Espacio afín y espacio proyectivo
- Homografías
- Visualizando la recta del infinito
- El espacio proyectivo n -dimensional
- Respetan algo las homografías?
- El espacio proyectivo 1D
- Razón doble
- Razón doble
- El espacio proyectivo 1D: razón doble
- Proyecciones

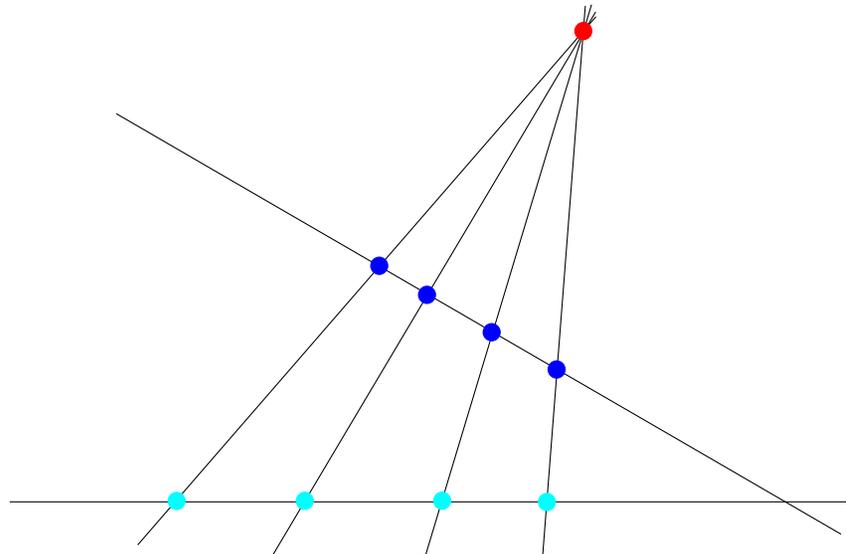
Reconstrucción proyectiva

Geometrías: euclídea, afín, proyectiva



El espacio proyectivo 1D: razón doble

Una *perspectividad* es un caso particular de homografía entre rectas proyectivas.



La *restricción de una homografía N - D* a una recta es también una homografía entre rectas proyectivas.

⇒ Las homografías preservan la razón doble de cuatro puntos alineados.

- title1
- Geometría proyectiva y visión artificial

Introducción

Elementos de geometría proyectiva

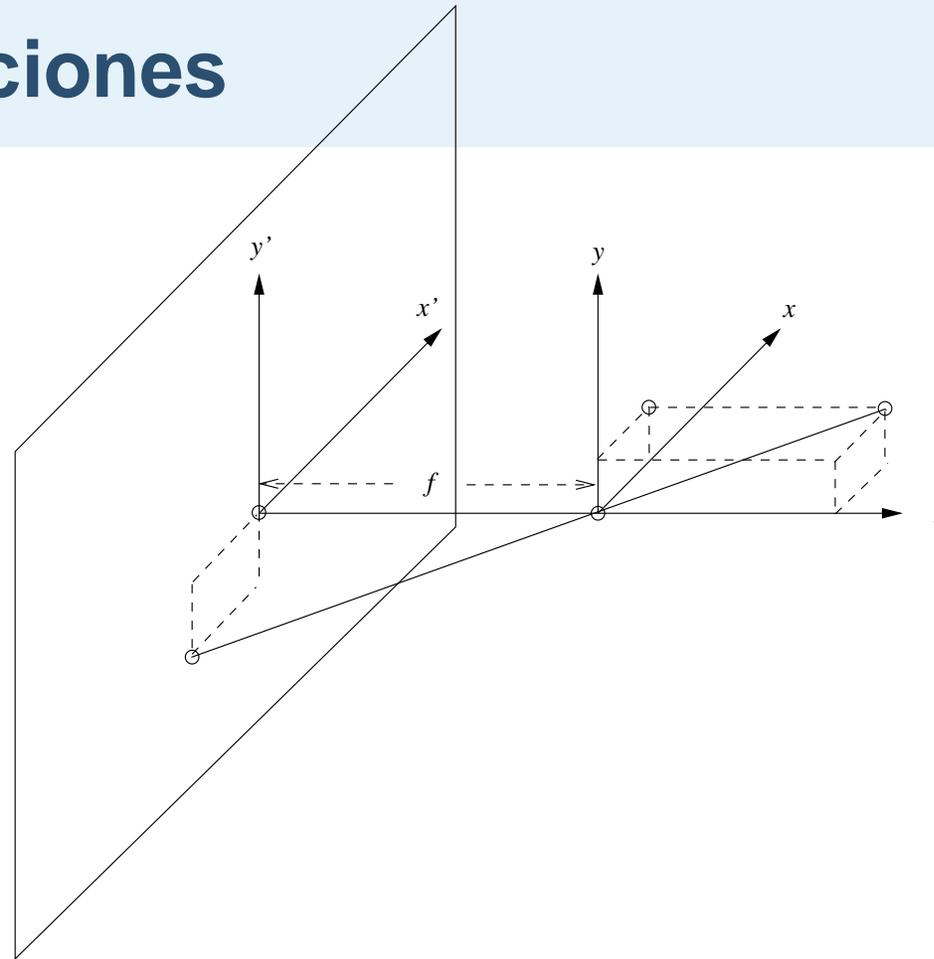
- Proyecciones
- Coordenadas homogéneas en el plano
- Coordenadas homogéneas en el plano
- Dualidad
- Espacio afín y espacio proyectivo
- Homografías
- Visualizando la recta del infinito
- El espacio proyectivo n -dimensional
- Respetan algo las homografías?
- El espacio proyectivo 1D
- Razón doble
- Razón doble
- El espacio proyectivo 1D: razón doble
- Proyecciones

Reconstrucción proyectiva

Geometrías: euclídea, afín, proyectiva



Proyecciones



- title1
- Geometría proyectiva y visión artificial

Introducción

Elementos de geometría proyectiva

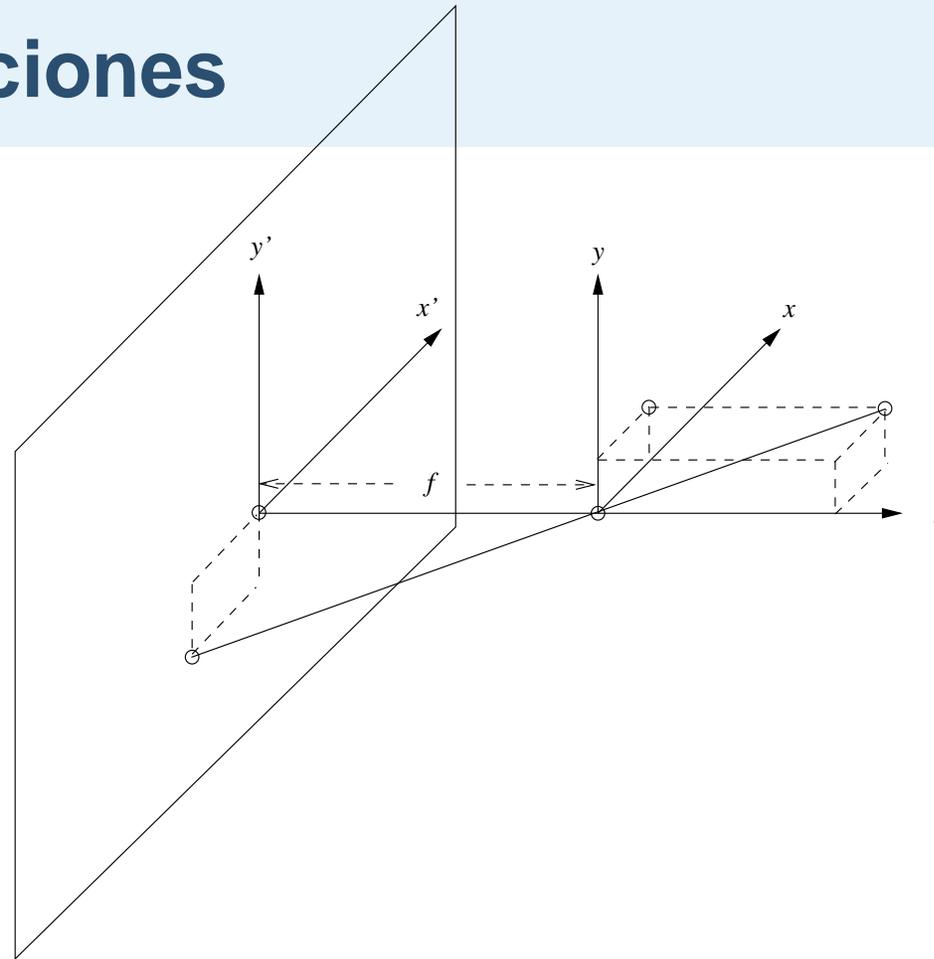
- Proyecciones
- Coordenadas homogéneas en el plano
- Coordenadas homogéneas en el plano
- Dualidad
- Espacio afín y espacio proyectivo
- Homografías
- Visualizando la recta del infinito
- El espacio proyectivo n -dimensional
- Respetan algo las homografías?
- El espacio proyectivo 1D
- Razón doble
- Razón doble
- El espacio proyectivo 1D: razón doble
- **Proyecciones**

Reconstrucción proyectiva

Geometrías: euclídea, afín, proyectiva



Proyecciones



En coordenadas afines

$$x' = -f \frac{x}{z}, \quad y' = -f \frac{y}{z}$$

- title1
- Geometría proyectiva y visión artificial

Introducción

Elementos de geometría proyectiva

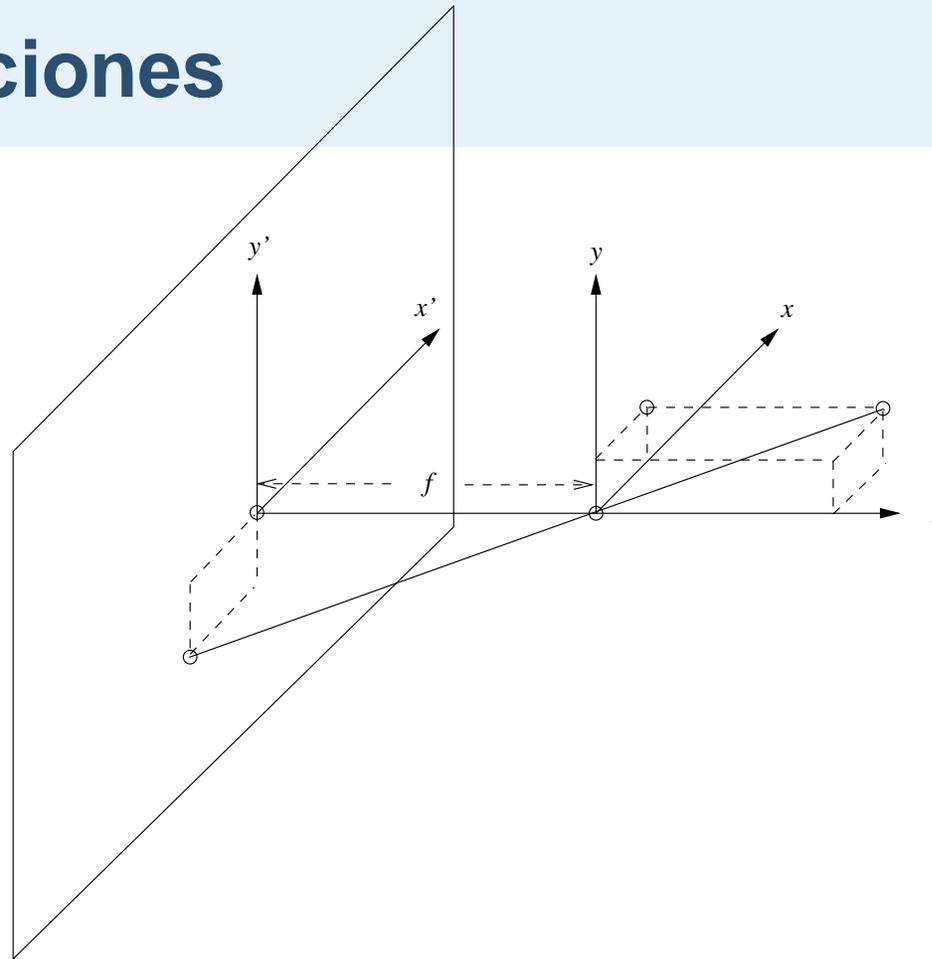
- Proyecciones
- Coordenadas homogéneas en el plano
- Coordenadas homogéneas en el plano
- Dualidad
- Espacio afín y espacio proyectivo
- Homografías
- Visualizando la recta del infinito
- El espacio proyectivo n -dimensional
- Respetan algo las homografías?
- El espacio proyectivo 1D
- Razón doble
- Razón doble
- El espacio proyectivo 1D: razón doble
- **Proyecciones**

Reconstrucción proyectiva

Geometrías: euclídea, afín, proyectiva



Proyecciones



En coordenadas homogéneas

$$\begin{pmatrix} X' \\ Y' \\ T' \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -f & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ T \end{pmatrix}$$

- title1
- Geometría proyectiva y visión artificial

Introducción

Elementos de geometría proyectiva

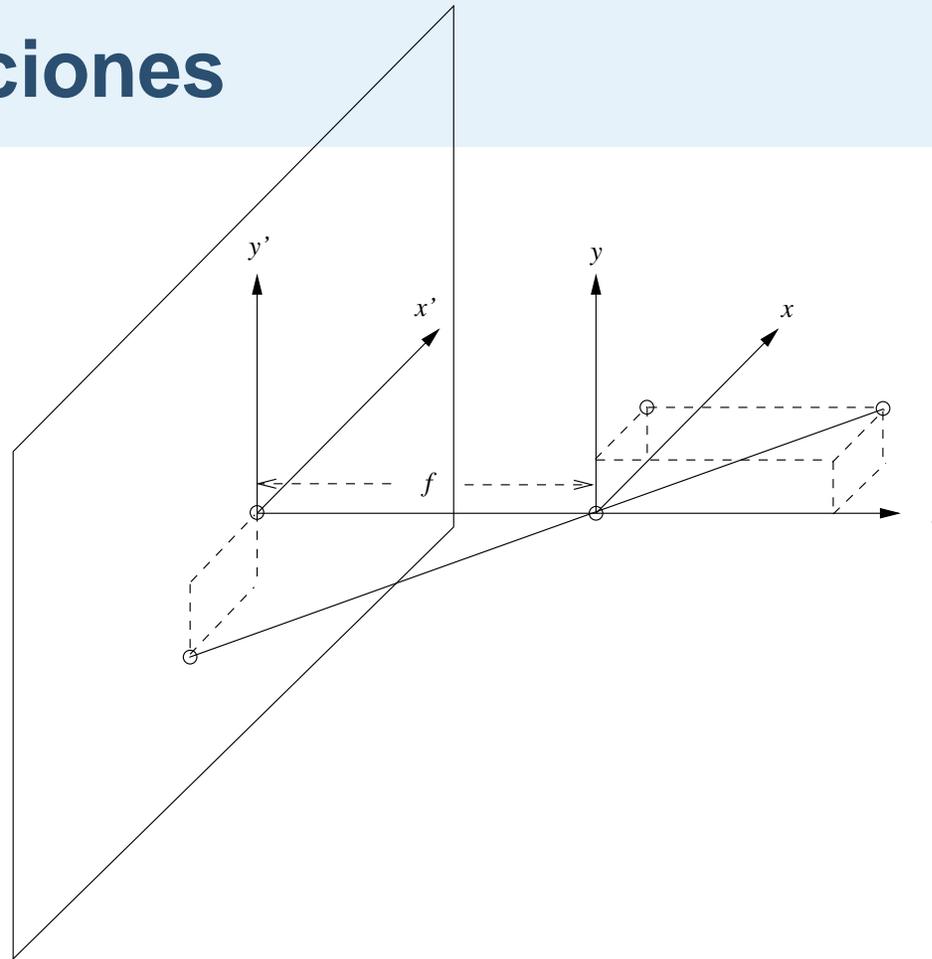
- Proyecciones
- Coordenadas homogéneas en el plano
- Coordenadas homogéneas en el plano
- Dualidad
- Espacio afín y espacio proyectivo
- Homografías
- Visualizando la recta del infinito
- El espacio proyectivo n -dimensional
- Respetan algo las homografías?
- El espacio proyectivo 1D
- Razón doble
- Razón doble
- El espacio proyectivo 1D: razón doble
- **Proyecciones**

Reconstrucción proyectiva

Geometrías: euclídea, afín, proyectiva



Proyecciones



En coordenadas homogéneas, cambiando las coordenadas

$$\begin{pmatrix} X' \\ Y' \\ T' \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & p_{14} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & p_{24} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} & p_{34} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ T \end{pmatrix}$$

- title1
- Geometría proyectiva y visión artificial

Introducción

Elementos de geometría proyectiva

- Proyecciones
- Coordenadas homogéneas en el plano
- Coordenadas homogéneas en el plano
- Dualidad
- Espacio afín y espacio proyectivo
- Homografías
- Visualizando la recta del infinito
- El espacio proyectivo n -dimensional
- Respetan algo las homografías?
- El espacio proyectivo 1D
- Razón doble
- Razón doble
- El espacio proyectivo 1D: razón doble
- **Proyecciones**

Reconstrucción proyectiva

Geometrías: euclídea, afín, proyectiva



Reconstrucción proyectiva

- title1
- Geometría proyectiva y visión artificial

Introducción

Elementos de geometría proyectiva

Reconstrucción proyectiva

● Reconstrucción proyectiva

● Rec. proyectiva para dos imágenes

● Reconstrucción proyectiva

Geometrías: euclídea, afín, proyectiva

Reconstrucción euclídea

Bibliografía

Datos: Puntos \mathbf{q}_{ij} proyectados en varias imágenes:

$$\mathbf{q}_{ij} \sim P_i \mathbf{Q}_j$$

Incógnitas:

- Matrices de proyección P_i
- Puntos 3D \mathbf{Q}_j



Reconstrucción proyectiva

- title1
- Geometría proyectiva y visión artificial

Introducción

Elementos de geometría proyectiva

Reconstrucción proyectiva

● Reconstrucción proyectiva

● Rec. proyectiva para dos imágenes

● Reconstrucción proyectiva

Geometrías: euclídea, afín, proyectiva

Reconstrucción euclídea

Bibliografía

Datos: Puntos \mathbf{q}_{ij} proyectados en varias imágenes:

$$\mathbf{q}_{ij} \sim P_i \mathbf{Q}_j$$

Incógnitas:

- Matrices de proyección P_i
- Puntos 3D \mathbf{Q}_j

Pedimos demasiado:

$$\mathbf{q}_{ij} = P_i \mathbf{Q}_j = (P_i H) (H^{-1} \mathbf{Q}_j)$$



Reconstrucción proyectiva

- title1
- Geometría proyectiva y visión artificial

Introducción

Elementos de geometría proyectiva

Reconstrucción proyectiva

● Reconstrucción proyectiva

● Rec. proyectiva para dos imágenes

● Reconstrucción proyectiva

Geometrías: euclídea, afín, proyectiva

Reconstrucción euclídea

Bibliografía

Datos: Puntos \mathbf{q}_{ij} proyectados en varias imágenes:

$$\mathbf{q}_{ij} \sim P_i \mathbf{Q}_j$$

Incógnitas:

- Matrices de proyección P_i
- Puntos 3D \mathbf{Q}_j

Pedimos demasiado:

$$\mathbf{q}_{ij} = P_i \mathbf{Q}_j = (P_i H) (H^{-1} \mathbf{Q}_j)$$

Incógnitas realistas: Para alguna H ,

- Matrices de proyección $P'_i = P_i H$
- Puntos 3D $\mathbf{Q}'_j = H^{-1} \mathbf{Q}_j$



Rec. proyectiva para dos imágenes

- title1
- Geometría proyectiva y visión artificial

Introducción

Elementos de geometría proyectiva

Reconstrucción proyectiva

- Reconstrucción proyectiva
- **Rec. proyectiva para dos imágenes**
- Reconstrucción proyectiva

Geometrías: euclídea, afín, proyectiva

Reconstrucción euclídea

Bibliografía

Condición para que exista solución:

Que exista una matriz F (*matrix fundamental*) de rango dos tal que

$$\mathbf{q}'_i{}^\top F \mathbf{q}_i = 0.$$



Rec. proyectiva para dos imágenes

- title1
- Geometría proyectiva y visión artificial

Introducción

Elementos de geometría proyectiva

Reconstrucción proyectiva

- Reconstrucción proyectiva
- Rec. proyectiva para dos imágenes
- Reconstrucción proyectiva

Geometrías: euclídea, afín, proyectiva

Reconstrucción euclídea

Bibliografía

Condición para que exista solución:

Que exista una matriz F (*matrix fundamental*) de rango dos tal que

$$\mathbf{q}'_i{}^\top F \mathbf{q}_i = 0.$$

Algoritmo

1. Obtener F a partir de pares de puntos.
2. Obtener un par de matrices de proyección solución a partir de F :

$$P = \begin{pmatrix} I & 0 \end{pmatrix}, \quad P' = \begin{pmatrix} \mathbf{e}'_\times F & \mathbf{e}' \end{pmatrix}.$$

con \mathbf{e}' del núcleo por la izquierda de F .



Rec. proyectiva para dos imágenes

- title1
- Geometría proyectiva y visión artificial

Introducción

Elementos de geometría proyectiva

Reconstrucción proyectiva

- Reconstrucción proyectiva
- Rec. proyectiva para dos imágenes
- Reconstrucción proyectiva

Geometrías: euclídea, afín, proyectiva

Reconstrucción euclídea

Bibliografía

Condición para que exista solución:

Que exista una matriz F (*matrix fundamental*) de rango dos tal que

$$\mathbf{q}'_i{}^\top F \mathbf{q}_i = 0.$$

Algoritmo

1. Obtener F a partir de pares de puntos.
2. Obtener un par de matrices de proyección solución a partir de F :

$$P = \begin{pmatrix} I & 0 \end{pmatrix}, \quad P' = \begin{pmatrix} \mathbf{e}'_\times F & \mathbf{e}' \end{pmatrix}.$$

con \mathbf{e}' del núcleo por la izquierda de F .

3. Obtener los puntos 3D resolviendo el sistema lineal

$$\alpha_j \mathbf{q}_i = P \mathbf{Q}_i, \quad \alpha'_j \mathbf{q}'_i = P' \mathbf{Q}_i$$



Reconstrucción proyectiva

- title1
- Geometría proyectiva y visión artificial

Introducción

Elementos de geometría proyectiva

Reconstrucción proyectiva

- Reconstrucción proyectiva
- Rec. proyectiva para dos imágenes
- Reconstrucción proyectiva

Geometrías: euclídea, afín, proyectiva

Reconstrucción euclídea

Bibliografía

1. La reconstrucción proyectiva de los puntos Q_i , $Q'_i = HQ_i$ es una versión muy distorsionada de la escena.
 - No se respetan ángulos, ni distancias, ni ratios entre distancias, ...
 - El plano del infinito ha cambiado de sitio: rectas paralelas dejan de serlo.



Reconstrucción proyectiva

- title1
- Geometría proyectiva y visión artificial

Introducción

Elementos de geometría proyectiva

Reconstrucción proyectiva

- Reconstrucción proyectiva
- Rec. proyectiva para dos imágenes
- **Reconstrucción proyectiva**

Geometrías: euclídea, afín, proyectiva

Reconstrucción euclídea

Bibliografía

1. La reconstrucción proyectiva de los puntos Q_i , $Q'_i = HQ_i$ es una versión muy distorsionada de la escena.
 - No se respetan ángulos, ni distancias, ni ratios entre distancias, ...
 - El plano del infinito ha cambiado de sitio: rectas paralelas dejan de serlo.
2. Es necesario convertir la reconstrucción proyectiva en una *reconstrucción euclídea*.



Reconstrucción proyectiva

- title1
- Geometría proyectiva y visión artificial

Introducción

Elementos de geometría proyectiva

Reconstrucción proyectiva

- Reconstrucción proyectiva
- Rec. proyectiva para dos imágenes
- **Reconstrucción proyectiva**

Geometrías: euclídea, afín, proyectiva

Reconstrucción euclídea

Bibliografía

1. La reconstrucción proyectiva de los puntos Q_i , $Q'_i = HQ_i$ es una versión muy distorsionada de la escena.
 - No se respetan ángulos, ni distancias, ni ratios entre distancias, ...
 - El plano del infinito ha cambiado de sitio: rectas paralelas dejan de serlo.
2. Es necesario convertir la reconstrucción proyectiva en una *reconstrucción euclídea*.
3. Para ello tenemos que estudiar *cómo se ven las geometrías afín y euclídea dentro de la geometría proyectiva*.



Jerarquía de geometrías

- title1
- Geometría proyectiva y visión artificial

Introducción

Elementos de geometría proyectiva

Reconstrucción proyectiva

Geometrías: euclídea, afin, proyectiva

● Jerarquía de geometrías

- Geometría afin
- Propiedades afines: paralelismo
- Propiedades afines: razón simple
- Geometría euclídea
- Circunferencias
- Ángulos
- La cónica absoluta

Reconstrucción euclídea

Bibliografía

- Felix Klein (1872) propuso clasificar las propiedades geométricas en función de su *invariancia respecto de distintos grupos de transformaciones*.



Jerarquía de geometrías

- Felix Klein (1872) propuso clasificar las propiedades geométricas en función de su *invariancia respecto de distintos grupos de transformaciones*.
- Cada geometría está asociada a un grupo de transformaciones.
 - ◆ Geometría euclídea: movimientos
 - ◆ Geometría conforme (“euclídea”): semejanzas
 - ◆ Geometría afín: afinidades
 - ◆ Geometría proyectiva: Homografías

- title1
- Geometría proyectiva y visión artificial

Introducción

Elementos de geometría proyectiva

Reconstrucción proyectiva

Geometrías: euclídea, afín, proyectiva

● Jerarquía de geometrías

- Geometría afín
- Propiedades afines: paralelismo
- Propiedades afines: razón simple
- Geometría euclídea
- Circunferencias
- Ángulos
- La cónica absoluta

Reconstrucción euclídea

Bibliografía



Jerarquía de geometrías

- title1
- Geometría proyectiva y visión artificial

Introducción

Elementos de geometría proyectiva

Reconstrucción proyectiva

Geometrías: euclídea, afín, proyectiva

● Jerarquía de geometrías

- Geometría afín
- Propiedades afines: paralelismo
- Propiedades afines: razón simple
- Geometría euclídea
- Circunferencias
- Ángulos
- La cónica absoluta

Reconstrucción euclídea

Bibliografía

■ Felix Klein (1872) propuso clasificar las propiedades geométricas en función de su *invariancia respecto de distintos grupos de transformaciones*.

■ Cada geometría está asociada a un grupo de transformaciones.

- ◆ Geometría euclídea: movimientos
- ◆ Geometría conforme (“euclídea”): semejanzas
- ◆ Geometría afín: afinidades
- ◆ Geometría proyectiva: Homografías

■

$$\{\text{movimientos}\} \subset \{\text{semejanzas}\} \subset \{\text{afinidades}\} \subset \{\text{homografías}\}$$



Jerarquía de geometrías

- title1
- Geometría proyectiva y visión artificial

Introducción

Elementos de geometría proyectiva

Reconstrucción proyectiva

Geometrías: euclídea, afin, proyectiva

● Jerarquía de geometrías

- Geometría afín
- Propiedades afines: paralelismo
- Propiedades afines: razón simple
- Geometría euclídea
- Circunferencias
- Ángulos
- La cónica absoluta

Reconstrucción euclídea

Bibliografía

■ Felix Klein (1872) propuso clasificar las propiedades geométricas en función de su *invariancia respecto de distintos grupos de transformaciones*.

■ Cada geometría está asociada a un grupo de transformaciones.

- ◆ Geometría euclídea: movimientos
- ◆ Geometría conforme (“euclídea”): semejanzas
- ◆ Geometría afín: afinidades
- ◆ Geometría proyectiva: Homografías

■

$\{\text{movimientos}\} \subset \{\text{semejanzas}\} \subset \{\text{afinidades}\} \subset \{\text{homografías}\}$

■ \Rightarrow La geometría proyectiva incluye a las otras tres.



Geometría afín

La *geometría afín* estudia las propiedades que se preservan por *afinidades*.

- title1
- Geometría proyectiva y visión artificial

Introducción

Elementos de geometría proyectiva

Reconstrucción proyectiva

Geometrías: euclídea, afín, proyectiva

- Jerarquía de geometrías
- Geometría afín
- Propiedades afines: paralelismo
- Propiedades afines: razón simple
- Geometría euclídea
- Circunferencias
- Ángulos
- La cónica absoluta

Reconstrucción euclídea

Bibliografía



Geometría afín

- title1
- Geometría proyectiva y visión artificial

Introducción

Elementos de geometría proyectiva

Reconstrucción proyectiva

Geometrías: euclídea, afín, proyectiva

- Jerarquía de geometrías
- Geometría afín
- Propiedades afines: paralelismo
- Propiedades afines: razón simple
- Geometría euclídea
- Circunferencias
- Ángulos
- La cónica absoluta

Reconstrucción euclídea

Bibliografía

La *geometría afín* estudia las propiedades que se preservan por *afinidades*.

En coordenadas afines:

$$\mathbf{q}' = A\mathbf{q} + \mathbf{v}.$$



Geometría afín

La *geometría afín* estudia las propiedades que se preservan por *afinidades*.

En coordenadas afines:

$$\mathbf{q}' = A\mathbf{q} + \mathbf{v}.$$

En coordenadas homogéneas:

$$\mathbf{Q}' \sim \begin{pmatrix} A & \mathbf{v} \\ \mathbf{0}^\top & 1 \end{pmatrix} \mathbf{Q}$$

- title1
- Geometría proyectiva y visión artificial

Introducción

Elementos de geometría proyectiva

Reconstrucción proyectiva

Geometrías: euclídea, afín, proyectiva

- Jerarquía de geometrías
- Geometría afín
- Propiedades afines: paralelismo
- Propiedades afines: razón simple
- Geometría euclídea
- Circunferencias
- Ángulos
- La cónica absoluta

Reconstrucción euclídea

Bibliografía



Geometría afín

- title1
- Geometría proyectiva y visión artificial

Introducción

Elementos de geometría proyectiva

Reconstrucción proyectiva

Geometrías: euclídea, afín, proyectiva

- Jerarquía de geometrías
- Geometría afín
- Propiedades afines: paralelismo
- Propiedades afines: razón simple
- Geometría euclídea
- Circunferencias
- Ángulos
- La cónica absoluta

Reconstrucción euclídea

Bibliografía

La *geometría afín* estudia las propiedades que se preservan por *afinidades*.

En coordenadas afines:

$$\mathbf{q}' = A\mathbf{q} + \mathbf{v}.$$

En coordenadas homogéneas:

$$\mathbf{Q}' \sim \begin{pmatrix} A & \mathbf{v} \\ \mathbf{0}^\top & 1 \end{pmatrix} \mathbf{Q}$$

Las afinidades son las homografías que preservan el hiperplano del infinito, $X_n = 0$.



Propiedades afines: paralelismo

- title1
- Geometría proyectiva y visión artificial

Introducción

Elementos de geometría proyectiva

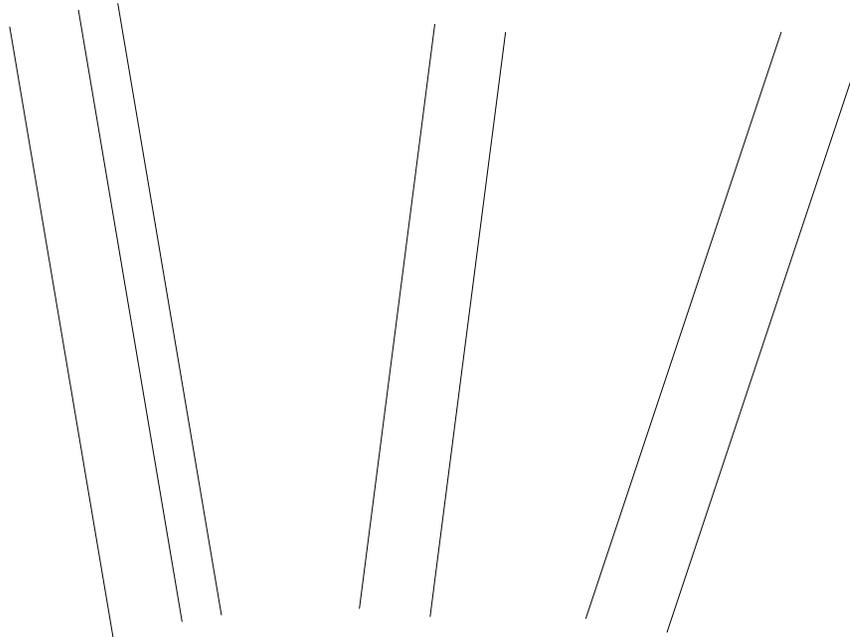
Reconstrucción proyectiva

Geometrías: euclídea, afin, proyectiva

- Jerarquía de geometrías
- Geometría afin
- **Propiedades afines: paralelismo**
- Propiedades afines: razón simple
- Geometría euclídea
- Circunferencias
- Ángulos
- La cónica absoluta

Reconstrucción euclídea

Bibliografía





Propiedades afines: paralelismo

- title1
- Geometría proyectiva y visión artificial

Introducción

Elementos de geometría proyectiva

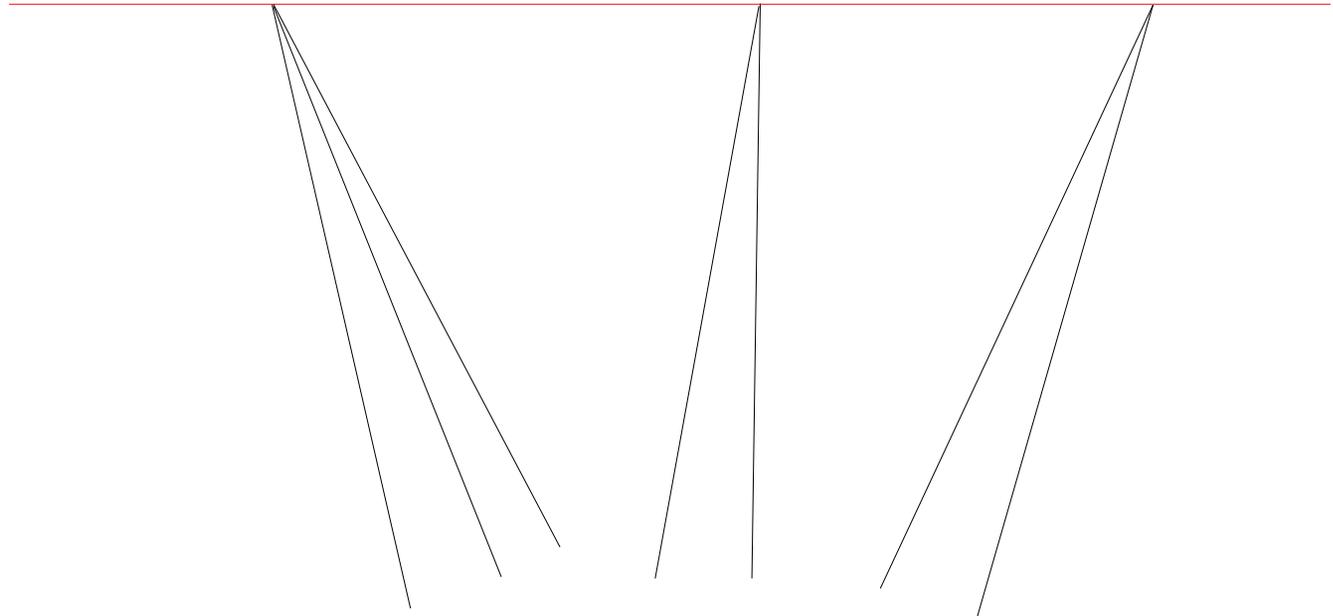
Reconstrucción proyectiva

Geometrías: euclídea, afin, proyectiva

- Jerarquía de geometrías
- Geometría afín
- **Propiedades afines: paralelismo**
- Propiedades afines: razón simple
- Geometría euclídea
- Circunferencias
- Ángulos
- La cónica absoluta

Reconstrucción euclídea

Bibliografía





Propiedades afines: razón simple

- title1
- Geometría proyectiva y visión artificial

Introducción

Elementos de geometría proyectiva

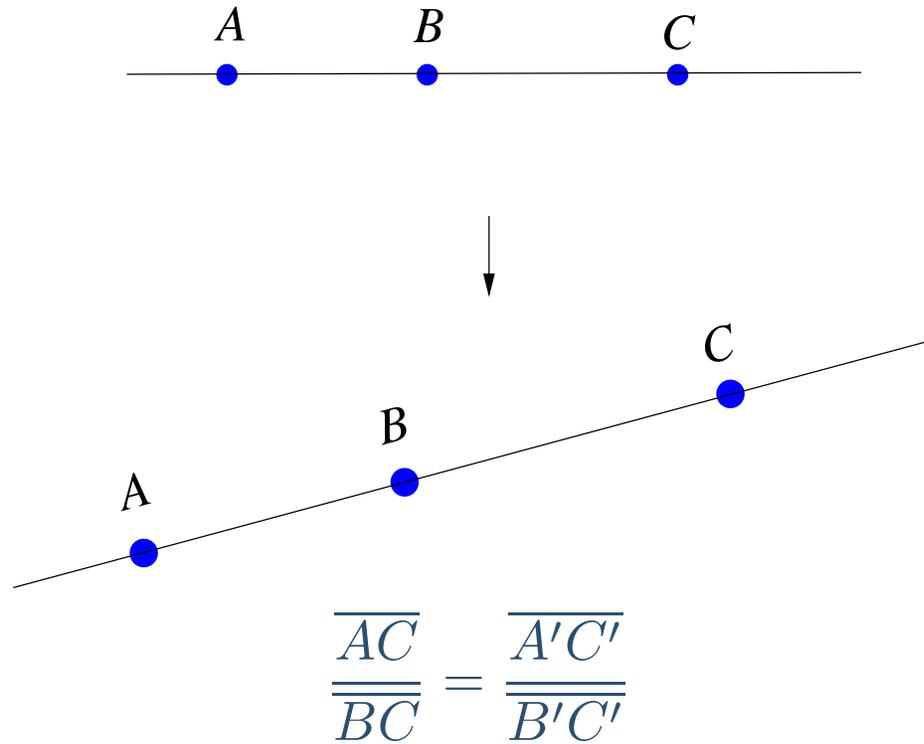
Reconstrucción proyectiva

Geometrías: euclídea, afin, proyectiva

- Jerarquía de geometrías
- Geometría afín
- Propiedades afines: paralelismo
- Propiedades afines: razón simple
- Geometría euclídea
- Circunferencias
- Ángulos
- La cónica absoluta

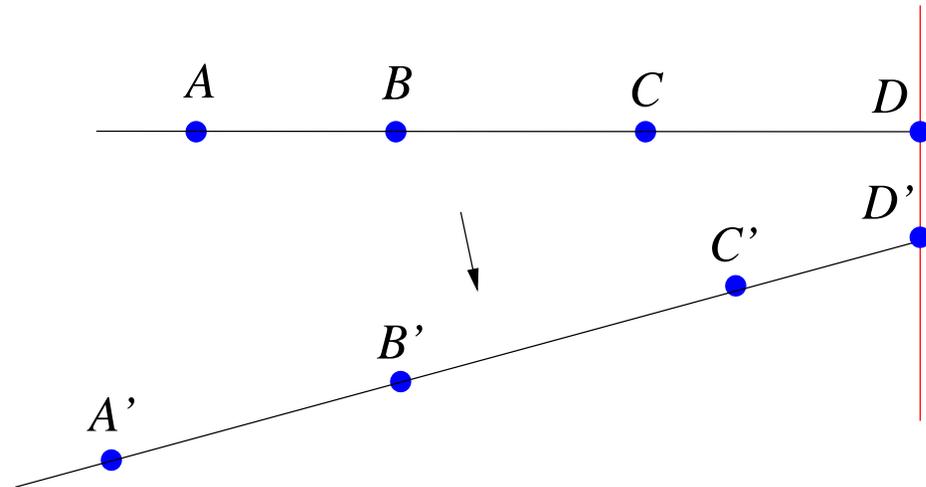
Reconstrucción euclídea

Bibliografía





Propiedades afines: razón simple



- title1
- Geometría proyectiva y visión artificial

Introducción

Elementos de geometría proyectiva

Reconstrucción proyectiva

Geometrías: euclídea, afín, proyectiva

- Jerarquía de geometrías
- Geometría afín
- Propiedades afines: paralelismo
- Propiedades afines: razón simple
- Geometría euclídea
- Circunferencias
- Ángulos
- La cónica absoluta

Reconstrucción euclídea

Bibliografía



Propiedades afines: razón simple

- title1
- Geometría proyectiva y visión artificial

Introducción

Elementos de geometría proyectiva

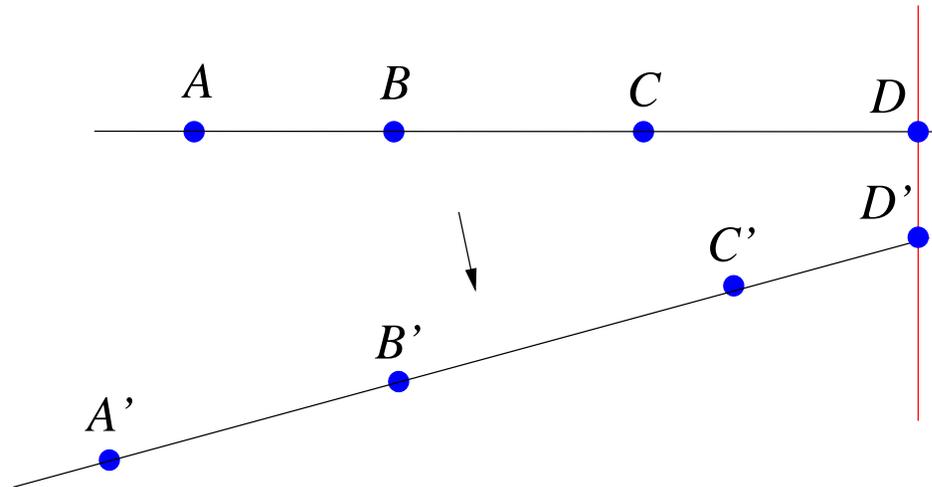
Reconstrucción proyectiva

Geometrías: euclídea, afin, proyectiva

- Jerarquía de geometrías
- Geometría afín
- Propiedades afines: paralelismo
- Propiedades afines: razón simple
- Geometría euclídea
- Circunferencias
- Ángulos
- La cónica absoluta

Reconstrucción euclídea

Bibliografía



$$A \equiv (a, 1), B \equiv (b, 1), C \equiv (c, 1), D \equiv (d, 1), d \rightarrow \infty$$

$$A' \equiv (a', 1), B' \equiv (b', 1), C' \equiv (c', 1), D' \equiv (d', 1), d' \rightarrow \infty$$



Propiedades afines: razón simple

- title1
- Geometría proyectiva y visión artificial

Introducción

Elementos de geometría proyectiva

Reconstrucción proyectiva

Geometrías: euclídea, afin, proyectiva

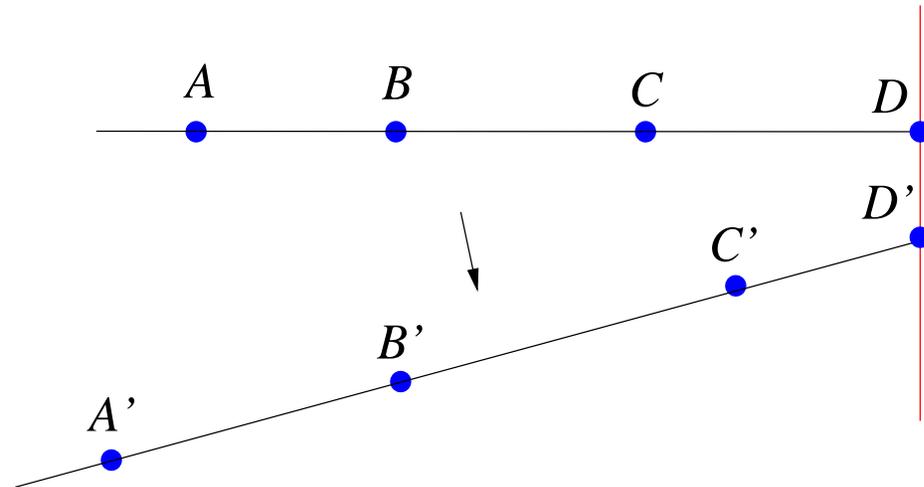
- Jerarquía de geometrías
- Geometría afin
- Propiedades afines: paralelismo

● Propiedades afines: razón simple

- Geometría euclídea
- Circunferencias
- Ángulos
- La cónica absoluta

Reconstrucción euclídea

Bibliografía



$$A \equiv (a, 1), B \equiv (b, 1), C \equiv (c, 1), D \equiv (d, 1), d \rightarrow \infty$$

$$A' \equiv (a', 1), B' \equiv (b', 1), C' \equiv (c', 1), D' \equiv (d', 1), d' \rightarrow \infty$$

$$[A, B, C, D] = [A', B', C', D']$$

$$[A, B, C, D] = \frac{c-a}{c-b} : \frac{d-a}{d-b} \xrightarrow{d \rightarrow \infty} \frac{c-a}{c-b} = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}$$

$$[A', B', C', D'] = \frac{c'-a'}{c'-b'} : \frac{d'-a'}{d'-b'} \xrightarrow{d' \rightarrow \infty} \frac{c'-a'}{c'-b'} = \frac{\overline{A'C'}}{\overline{B'C'}}$$



Geometría euclídea

La *geometría “euclídea”* estudia las propiedades que se preservan por *semejanzas*.

- title1
- Geometría proyectiva y visión artificial

Introducción

Elementos de geometría proyectiva

Reconstrucción proyectiva

Geometrías: euclídea, afin, proyectiva

- Jerarquía de geometrías
- Geometría afin
- Propiedades afines: paralelismo
- Propiedades afines: razón simple
- **Geometría euclídea**
- Circunferencias
- Ángulos
- La cónica absoluta

Reconstrucción euclídea

Bibliografía



Geometría euclídea

La *geometría “euclídea”* estudia las propiedades que se preservan por *semejanzas*.

En coordenadas afines

$$\mathbf{q}' = \alpha R \mathbf{q} + \mathbf{v}, \quad R R^T = I.$$

- title1
- Geometría proyectiva y visión artificial

Introducción

Elementos de geometría proyectiva

Reconstrucción proyectiva

Geometrías: euclídea, afin, proyectiva

- Jerarquía de geometrías
- Geometría afín
- Propiedades afines: paralelismo
- Propiedades afines: razón simple
- **Geometría euclídea**
- Circunferencias
- Ángulos
- La cónica absoluta

Reconstrucción euclídea

Bibliografía



Geometría euclídea

La *geometría “euclídea”* estudia las propiedades que se preservan por *semejanzas*.

En coordenadas afines

$$\mathbf{q}' = \alpha R \mathbf{q} + \mathbf{v}, \quad RR^T = I.$$

En coordenadas homogéneas:

$$\mathbf{Q}' \sim \begin{pmatrix} R & \mathbf{v} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{pmatrix} \mathbf{Q}$$

- title1
- Geometría proyectiva y visión artificial

Introducción

Elementos de geometría proyectiva

Reconstrucción proyectiva

Geometrías: euclídea, afín, proyectiva

- Jerarquía de geometrías
- Geometría afín
- Propiedades afines: paralelismo
- Propiedades afines: razón simple
- Geometría euclídea
- Circunferencias
- Ángulos
- La cónica absoluta

Reconstrucción euclídea

Bibliografía



Geometría euclídea

La *geometría “euclídea”* estudia las propiedades que se preservan por *semejanzas*.

En coordenadas afines

$$\mathbf{q}' = \alpha R \mathbf{q} + \mathbf{v}, \quad RR^T = I.$$

En coordenadas homogéneas:

$$\mathbf{Q}' \sim \begin{pmatrix} R & \mathbf{v} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{pmatrix} \mathbf{Q}$$

Las semejanzas son las homografías que preservan el plano del infinito y *algo más*.

- title1
- Geometría proyectiva y visión artificial

Introducción

Elementos de geometría proyectiva

Reconstrucción proyectiva

Geometrías: euclídea, afin, proyectiva

- Jerarquía de geometrías
- Geometría afín
- Propiedades afines: paralelismo
- Propiedades afines: razón simple
- **Geometría euclídea**
- Circunferencias
- Ángulos
- La cónica absoluta

Reconstrucción euclídea

Bibliografía



Circunferencias

- title1
- Geometría proyectiva y visión artificial

Introducción

Elementos de geometría proyectiva

Reconstrucción proyectiva

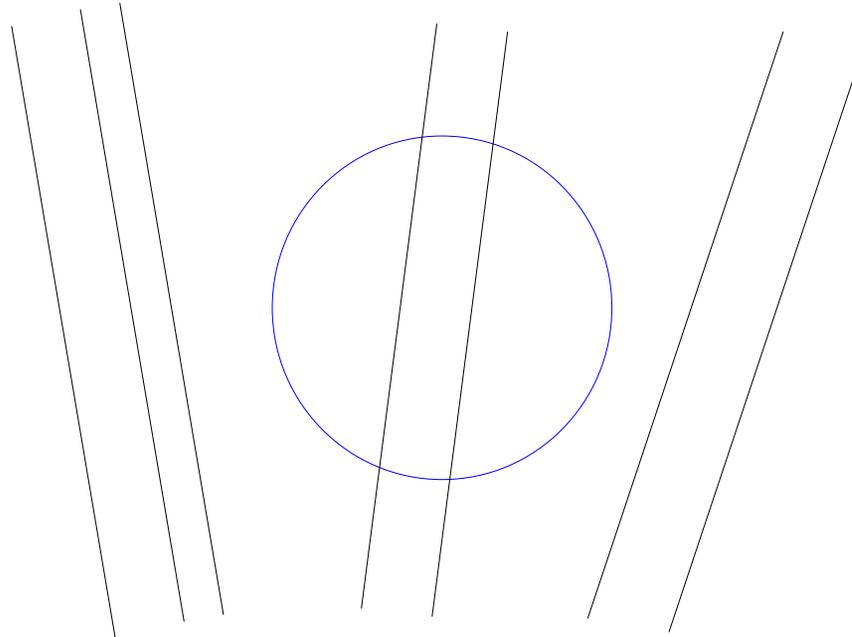
Geometrías: euclídea, afin, proyectiva

- Jerarquía de geometrías
- Geometría afin
- Propiedades afines: paralelismo
- Propiedades afines: razón simple
- Geometría euclídea
- **Circunferencias**
- Ángulos
- La cónica absoluta

Reconstrucción euclídea

Bibliografía

Corte de una circunferencia con la recta del infinito.





Circunferencias

- title1
- Geometría proyectiva y visión artificial

Introducción

Elementos de geometría proyectiva

Reconstrucción proyectiva

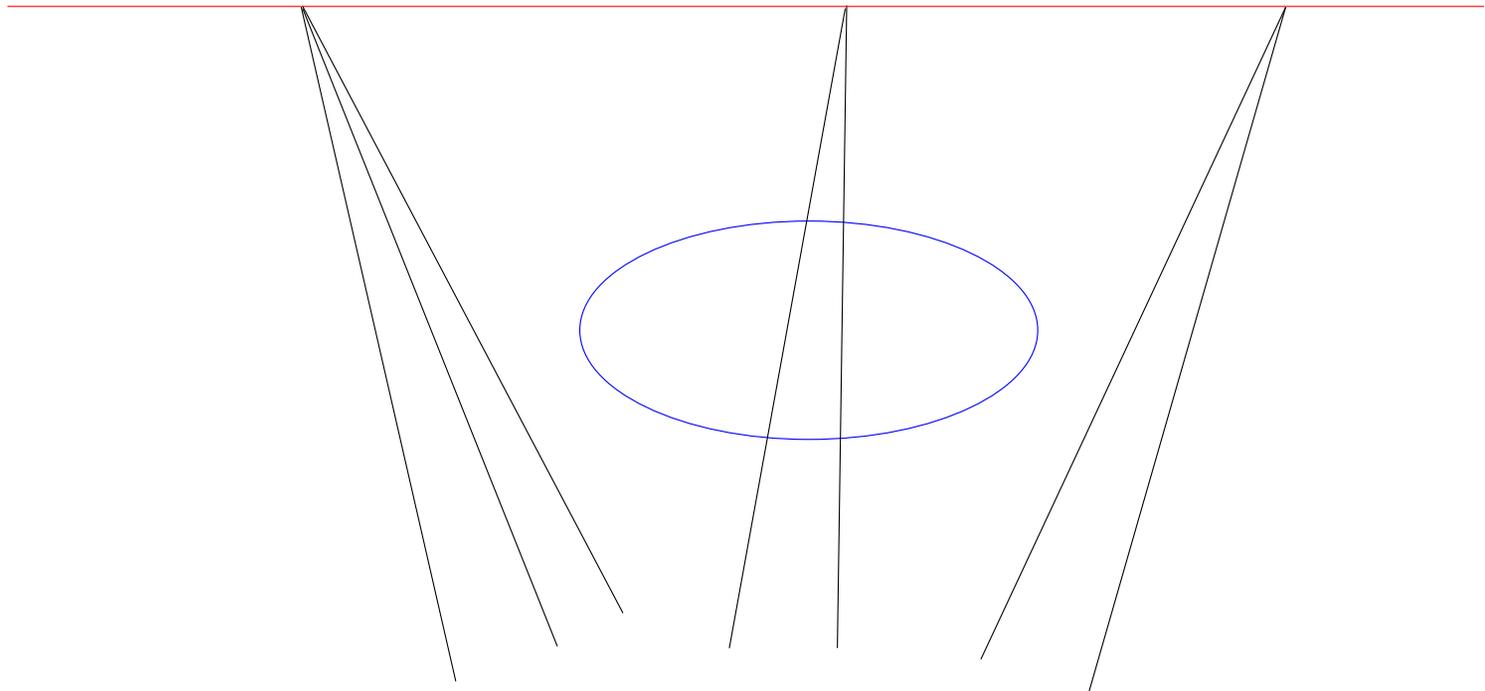
Geometrías: euclídea, afin, proyectiva

- Jerarquía de geometrías
- Geometría afin
- Propiedades afines: paralelismo
- Propiedades afines: razón simple
- Geometría euclídea
- **Circunferencias**
- Ángulos
- La cónica absoluta

Reconstrucción euclídea

Bibliografía

Corte de una circunferencia con la recta del infinito.





Circunferencias

- title1
- Geometría proyectiva y visión artificial

Introducción

Elementos de geometría proyectiva

Reconstrucción proyectiva

Geometrías: euclídea, afin, proyectiva

- Jerarquía de geometrías
- Geometría afin
- Propiedades afines: paralelismo
- Propiedades afines: razón simple
- Geometría euclídea
- **Circunferencias**
- Ángulos
- La cónica absoluta

Reconstrucción euclídea

Bibliografía

Corte de una circunferencia con la recta del infinito.
Algebraicamente:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 - c^2 = 0$$



Circunferencias

Corte de una circunferencia con la recta del infinito.
Algebraicamente:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 - c^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2ax - 2by + (a^2 + b^2 - c^2) = 0$$

- title1
- Geometría proyectiva y visión artificial

Introducción

Elementos de geometría proyectiva

Reconstrucción proyectiva

Geometrías: euclídea, afín, proyectiva

- Jerarquía de geometrías
- Geometría afín
- Propiedades afines: paralelismo
- Propiedades afines: razón simple
- Geometría euclídea
- **Circunferencias**
- Ángulos
- La cónica absoluta

Reconstrucción euclídea

Bibliografía



Circunferencias

Corte de una circunferencia con la recta del infinito.
Algebraicamente:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 - c^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2ax - 2by + (a^2 + b^2 - c^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x = \frac{X}{T}, y = \frac{Y}{T} \right) X^2 + Y^2 - 2aXT - 2bYT + (a^2 + b^2 - c^2)T^2 = 0$$

- title1
- Geometría proyectiva y visión artificial

Introducción

Elementos de geometría proyectiva

Reconstrucción proyectiva

Geometrías: euclídea, afín, proyectiva

- Jerarquía de geometrías
- Geometría afín
- Propiedades afines: paralelismo
- Propiedades afines: razón simple
- Geometría euclídea
- **Circunferencias**
- Ángulos
- La cónica absoluta

Reconstrucción euclídea

Bibliografía



Circunferencias

- title1
- Geometría proyectiva y visión artificial

Introducción

Elementos de geometría proyectiva

Reconstrucción proyectiva

Geometrías: euclídea, afín, proyectiva

- Jerarquía de geometrías
- Geometría afín
- Propiedades afines: paralelismo
- Propiedades afines: razón simple
- Geometría euclídea
- **Circunferencias**
- Ángulos
- La cónica absoluta

Reconstrucción euclídea

Bibliografía

Corte de una circunferencia con la recta del infinito.
Algebraicamente:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 - c^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2ax - 2by + (a^2 + b^2 - c^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x = \frac{X}{T}, y = \frac{Y}{T} \right) X^2 + Y^2 - 2aXT - 2bYT + (a^2 + b^2 - c^2)T^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (T = 0) \quad X^2 + Y^2 = 0 \Leftrightarrow Y = \pm iX$$



Circunferencias

- title1
- Geometría proyectiva y visión artificial

Introducción

Elementos de geometría proyectiva

Reconstrucción proyectiva

Geometrías: euclídea, afin, proyectiva

- Jerarquía de geometrías
- Geometría afin
- Propiedades afines: paralelismo
- Propiedades afines: razón simple
- Geometría euclídea

● **Circunferencias**

- Ángulos
- La cónica absoluta

Reconstrucción euclídea

Bibliografía

Corte de una circunferencia con la recta del infinito.
Algebraicamente:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 - c^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2ax - 2by + (a^2 + b^2 - c^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x = \frac{X}{T}, y = \frac{Y}{T} \right) X^2 + Y^2 - 2aXT - 2bYT + (a^2 + b^2 - c^2)T^2 = 0$$

Puntos de corte:

$$\mathbf{I} \sim (X, iX, 0) \sim (1, i, 0), \quad \mathbf{J} \sim (X, -iX, 0) \sim (1, -i, 0).$$



Ángulos

- title1
- Geometría proyectiva y visión artificial

Introducción

Elementos de geometría proyectiva

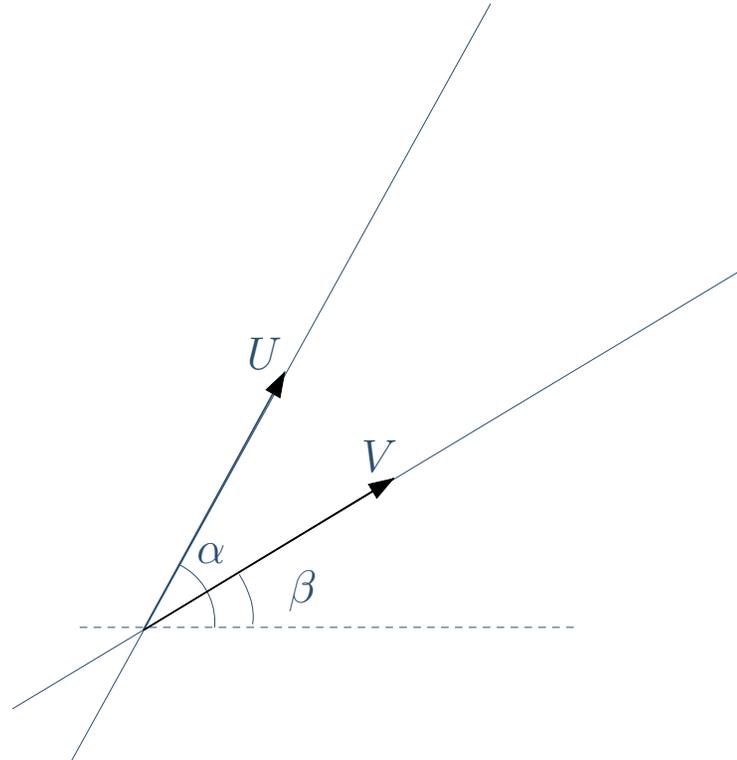
Reconstrucción proyectiva

Geometrías: euclídea, afin, proyectiva

- Jerarquía de geometrías
- Geometría afín
- Propiedades afines: paralelismo
- Propiedades afines: razón simple
- Geometría euclídea
- Circunferencias
- Ángulos
- La cónica absoluta

Reconstrucción euclídea

Bibliografía





Ángulos

- title1
- Geometría proyectiva y visión artificial

Introducción

Elementos de geometría proyectiva

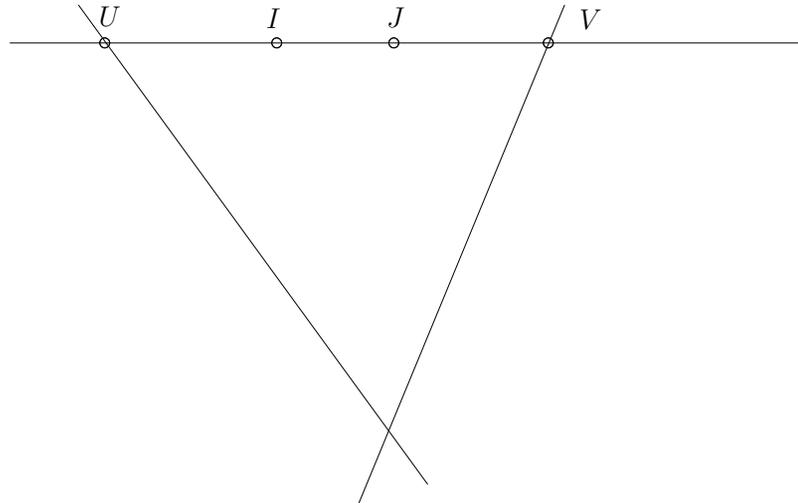
Reconstrucción proyectiva

Geometrías: euclídea, afin, proyectiva

- Jerarquía de geometrías
- Geometría afín
- Propiedades afines: paralelismo
- Propiedades afines: razón simple
- Geometría euclídea
- Circunferencias
- Ángulos
- La cónica absoluta

Reconstrucción euclídea

Bibliografía



$$U \equiv (\cos \alpha, \sin \alpha), \quad V \equiv (\cos \beta, \sin \beta)$$



Ángulos

- title1
- Geometría proyectiva y visión artificial

Introducción

Elementos de geometría proyectiva

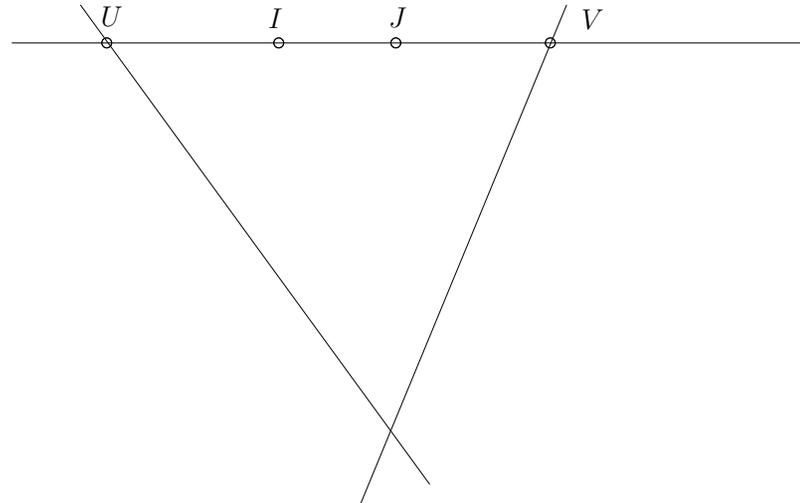
Reconstrucción proyectiva

Geometrías: euclídea, afin, proyectiva

- Jerarquía de geometrías
- Geometría afin
- Propiedades afines: paralelismo
- Propiedades afines: razón simple
- Geometría euclídea
- Circunferencias
- Ángulos
- La cónica absoluta

Reconstrucción euclídea

Bibliografía



$$U \equiv (\cos \alpha, \sin \alpha), \quad V \equiv (\cos \beta, \sin \beta)$$

$$[U, V, I, J] = \frac{\begin{vmatrix} 1 & i \\ \cos \alpha & \sin \alpha \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -i \\ \cos \alpha & \sin \alpha \end{vmatrix}} : \frac{\begin{vmatrix} 1 & i \\ \cos \beta & \sin \beta \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -i \\ \cos \beta & \sin \beta \end{vmatrix}}$$



Ángulos

- title1
- Geometría proyectiva y visión artificial

Introducción

Elementos de geometría proyectiva

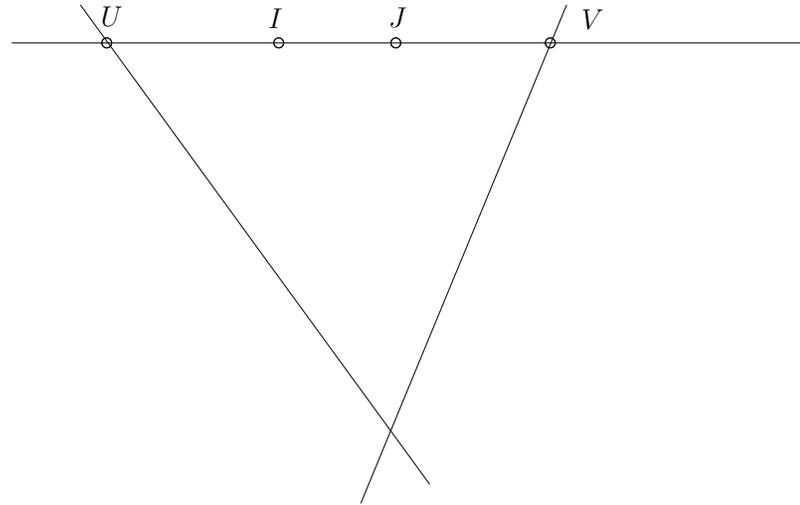
Reconstrucción proyectiva

Geometrías: euclídea, afin, proyectiva

- Jerarquía de geometrías
- Geometría afin
- Propiedades afines: paralelismo
- Propiedades afines: razón simple
- Geometría euclídea
- Circunferencias
- Ángulos
- La cónica absoluta

Reconstrucción euclídea

Bibliografía



$$U \equiv (\cos \alpha, \sin \alpha), \quad V \equiv (\cos \beta, \sin \beta)$$

$$[U, V, I, J] = \frac{(\sin \alpha - i \cos \alpha)(\sin \alpha + i \cos \alpha)}{(\sin \alpha + i \cos \alpha)(\sin \beta - i \cos \beta)}$$



Ángulos

- title1
- Geometría proyectiva y visión artificial

Introducción

Elementos de geometría proyectiva

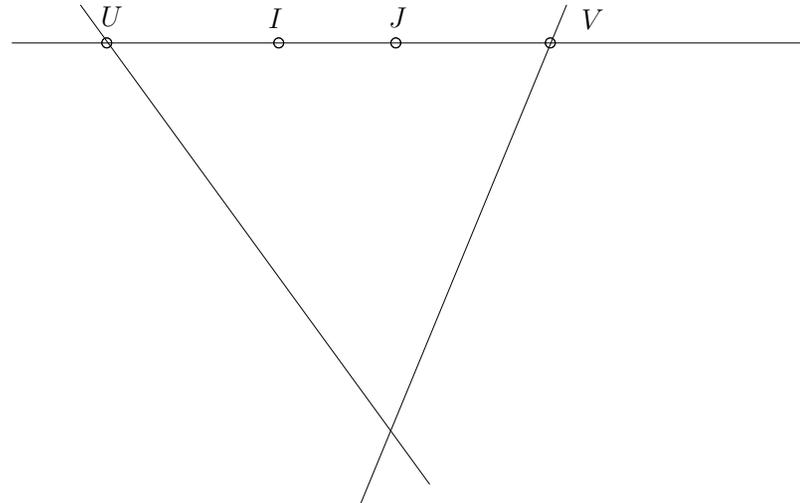
Reconstrucción proyectiva

Geometrías: euclídea, afin, proyectiva

- Jerarquía de geometrías
- Geometría afin
- Propiedades afines: paralelismo
- Propiedades afines: razón simple
- Geometría euclídea
- Circunferencias
- Ángulos
- La cónica absoluta

Reconstrucción euclídea

Bibliografía



$$U \equiv (\cos \alpha, \sin \alpha), \quad V \equiv (\cos \beta, \sin \beta)$$

$$[U, V, I, J] = \frac{e^{i\alpha} e^{-i\beta}}{e^{-i\alpha} e^{i\beta}} = e^{i2(\alpha-\beta)} \Rightarrow \theta = \alpha - \beta = \frac{1}{2i} \log[U, V, I, J]$$



La cónica absoluta

Corte de una esfera con el plano del infinito:

$$T = 0, \quad X^2 + Y^2 + Z^2 = \underbrace{\begin{pmatrix} X & Y & Z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\omega} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = 0$$

- title1
- Geometría proyectiva y visión artificial

Introducción

Elementos de geometría proyectiva

Reconstrucción proyectiva

Geometrías: euclídea, afin, proyectiva

- Jerarquía de geometrías
- Geometría afin
- Propiedades afines: paralelismo
- Propiedades afines: razón simple
- Geometría euclídea
- Circunferencias
- Ángulos
- La cónica absoluta

Reconstrucción euclídea

Bibliografía



La cónica absoluta

Corte de una esfera con el plano del infinito:

$$T = 0, \quad X^2 + Y^2 + Z^2 = \underbrace{\begin{pmatrix} X & Y & Z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\omega} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = 0$$

Las semejanzas son exactamente las homografías que preservan esta cónica.

- title1
- Geometría proyectiva y visión artificial

Introducción

Elementos de geometría proyectiva

Reconstrucción proyectiva

Geometrías: euclídea, afin, proyectiva

- Jerarquía de geometrías
- Geometría afin
- Propiedades afines: paralelismo
- Propiedades afines: razón simple
- Geometría euclídea
- Circunferencias
- Ángulos
- La cónica absoluta

Reconstrucción euclídea

Bibliografía

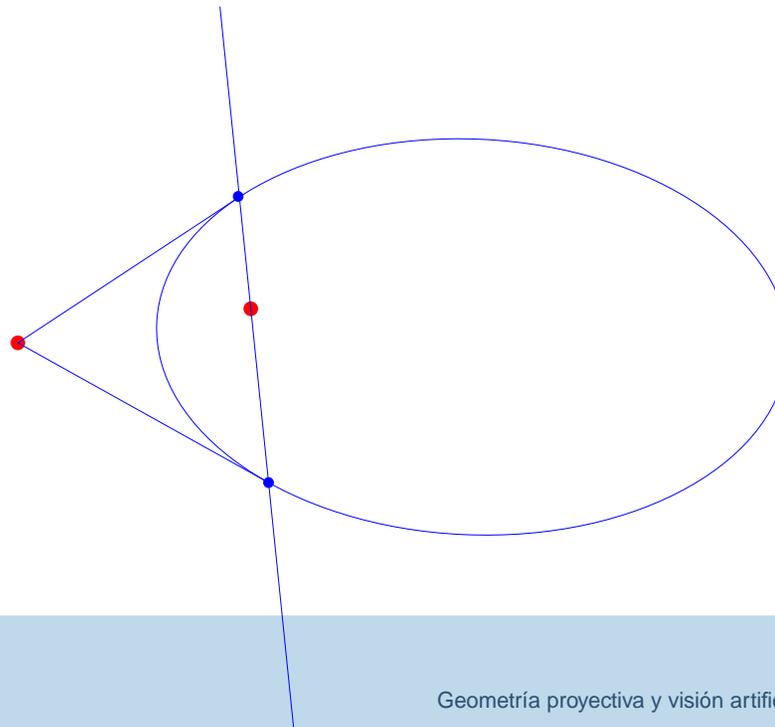


La cónica absoluta

Corte de una esfera con el plano del infinito:

$$T = 0, \quad X^2 + Y^2 + Z^2 = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\omega} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = 0$$

Ortogonalidad: $(X, Y, Z)\omega(X', Y', Z')^T = 0$



- title1
- Geometría proyectiva y visión artificial

Introducción

Elementos de geometría proyectiva

Reconstrucción proyectiva

Geometrías: euclídea, afin, proyectiva

- Jerarquía de geometrías
- Geometría afin
- Propiedades afines: paralelismo
- Propiedades afines: razón simple
- Geometría euclídea
- Circunferencias
- Ángulos
- La cónica absoluta

Reconstrucción euclídea

Bibliografía



Reconstrucción euclídea

- title1
- Geometría proyectiva y visión artificial

Introducción

Elementos de geometría proyectiva

Reconstrucción proyectiva

Geometrías: euclídea, afin, proyectiva

Reconstrucción euclídea

● **Reconstrucción euclídea**

- Tipos de reconstrucciones
- Buscando puntos del infinito
- Buscando la cónica absoluta
- Indeterminación de posición y escala
- Autocalibración con píxeles cuadrados
- Autocalibración con píxeles cuadrados
- Autocalibración con dos cámaras
- Autocalibración con dos cámaras

Bibliografía

De la reconstrucción proyectiva a la reconstrucción euclídea:

- Localizar el plano del infinito
- Localizar la cónica absoluta



Reconstrucción euclídea

- title1
- Geometría proyectiva y visión artificial

Introducción

Elementos de geometría proyectiva

Reconstrucción proyectiva

Geometrías: euclídea, afin, proyectiva

Reconstrucción euclídea

- **Reconstrucción euclídea**
- Tipos de reconstrucciones
- Buscando puntos del infinito
- Buscando la cónica absoluta
- Indeterminación de posición y escala
- Autocalibración con píxeles cuadrados
- Autocalibración con píxeles cuadrados
- Autocalibración con dos cámaras
- Autocalibración con dos cámaras

Bibliografía

De la reconstrucción proyectiva a la reconstrucción euclídea:

- Localizar el plano del infinito
- Localizar la cónica absoluta

Dos alternativas:

1. Utilizar datos conocidos de la escena

- Cada par de rectas paralelas nos da un punto del plano del infinito.



Reconstrucción euclídea

- title1
- Geometría proyectiva y visión artificial

Introducción

Elementos de geometría proyectiva

Reconstrucción proyectiva

Geometrías: euclídea, afin, proyectiva

Reconstrucción euclídea

- **Reconstrucción euclídea**
- Tipos de reconstrucciones
- Buscando puntos del infinito
- Buscando la cónica absoluta
- Indeterminación de posición y escala
- Autocalibración con píxeles cuadrados
- Autocalibración con píxeles cuadrados
- Autocalibración con dos cámaras
- Autocalibración con dos cámaras

Bibliografía

De la reconstrucción proyectiva a la reconstrucción euclídea:

- Localizar el plano del infinito
- Localizar la cónica absoluta

Dos alternativas:

1. Utilizar datos conocidos de la escena

- Cada par de rectas paralelas nos da un punto del plano del infinito.
- Dos pares ortogonales rectas paralelas nos dan además una ecuación en los parámetros de la cónica absoluta.



Reconstrucción euclídea

- title1
- Geometría proyectiva y visión artificial

Introducción

Elementos de geometría proyectiva

Reconstrucción proyectiva

Geometrías: euclídea, afin, proyectiva

Reconstrucción euclídea

- **Reconstrucción euclídea**
- Tipos de reconstrucciones
- Buscando puntos del infinito
- Buscando la cónica absoluta
- Indeterminación de posición y escala
- Autocalibración con píxeles cuadrados
- Autocalibración con píxeles cuadrados
- Autocalibración con dos cámaras
- Autocalibración con dos cámaras

Bibliografía

De la reconstrucción proyectiva a la reconstrucción euclídea:

- Localizar el plano del infinito
- Localizar la cónica absoluta

Dos alternativas:

1. Utilizar datos conocidos de la escena
 - Cada par de rectas paralelas nos da un punto del plano del infinito.
 - Dos pares ortogonales rectas paralelas nos dan además una ecuación en los parámetros de la cónica absoluta.
2. Utilizar la constancia de ciertos parámetros en las cámaras (*autocalibración*).



Tipos de reconstrucciones

- title1
- Geometría proyectiva y visión artificial

Introducción

Elementos de geometría proyectiva

Reconstrucción proyectiva

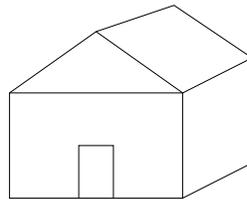
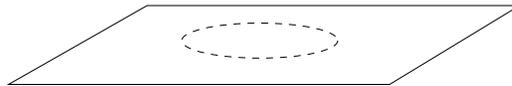
Geometrías: euclídea, afin, proyectiva

Reconstrucción euclídea

- Reconstrucción euclídea
- Tipos de reconstrucciones
- Buscando puntos del infinito
- Buscando la cónica absoluta
- Indeterminación de posición y escala
- Autocalibración con píxeles cuadrados
- Autocalibración con píxeles cuadrados
- Autocalibración con dos cámaras
- Autocalibración con dos cámaras

Bibliografía

Escena real





Tipos de reconstrucciones

- title1
- Geometría proyectiva y visión artificial

Introducción

Elementos de geometría proyectiva

Reconstrucción proyectiva

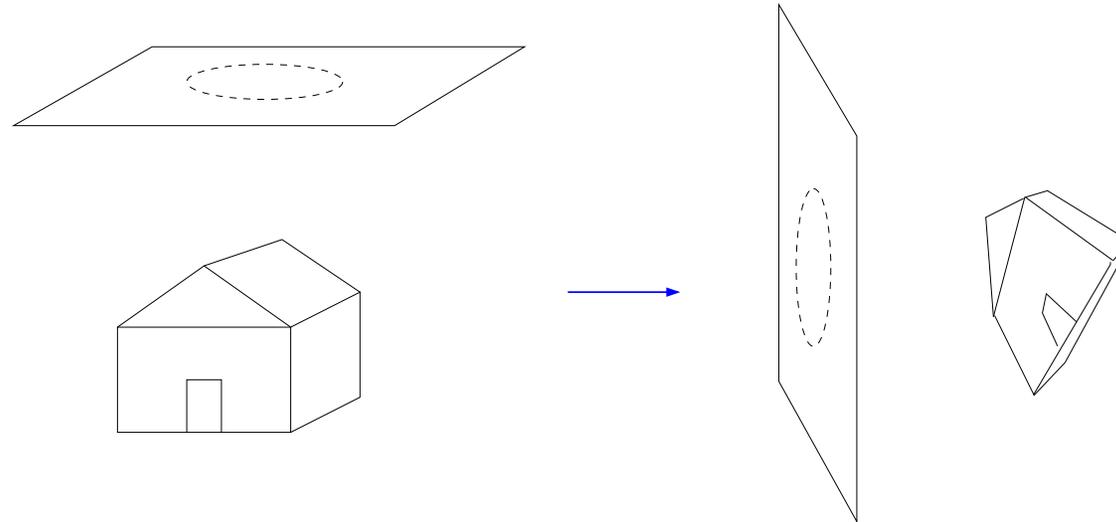
Geometrías: euclídea, afin, proyectiva

Reconstrucción euclídea

- Reconstrucción euclídea
- Tipos de reconstrucciones
- Buscando puntos del infinito
- Buscando la cónica absoluta
- Indeterminación de posición y escala
- Autocalibración con píxeles cuadrados
- Autocalibración con píxeles cuadrados
- Autocalibración con dos cámaras
- Autocalibración con dos cámaras

Bibliografía

Reconstrucción proyectiva





Tipos de reconstrucciones

- title1
- Geometría proyectiva y visión artificial

Introducción

Elementos de geometría proyectiva

Reconstrucción proyectiva

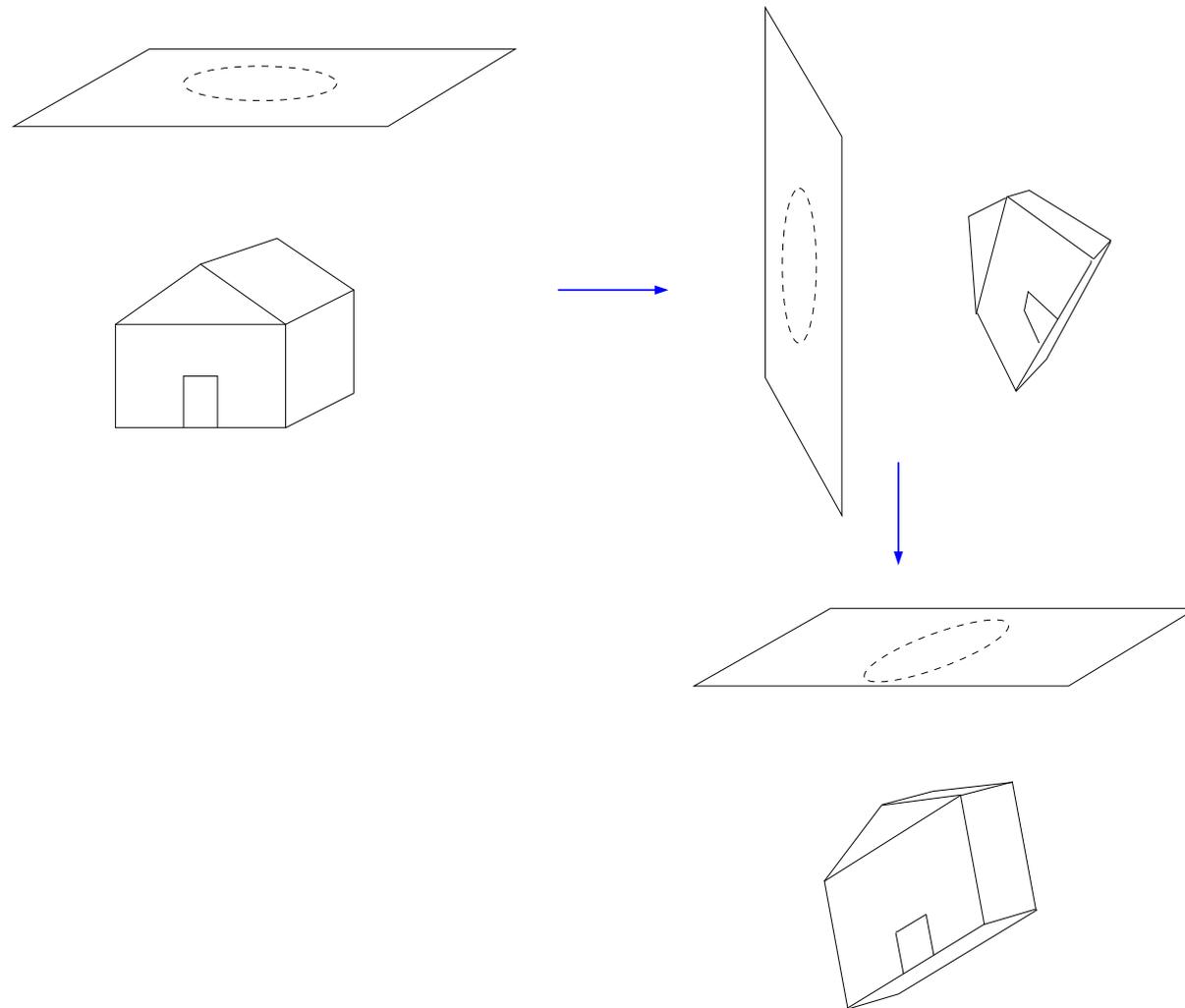
Geometrías: euclídea, afin, proyectiva

Reconstrucción euclídea

- Reconstrucción euclídea
- Tipos de reconstrucciones
- Buscando puntos del infinito
- Buscando la cónica absoluta
- Indeterminación de posición y escala
- Autocalibración con píxeles cuadrados
- Autocalibración con píxeles cuadrados
- Autocalibración con dos cámaras
- Autocalibración con dos cámaras

Bibliografía

Reconstrucción afin





Tipos de reconstrucciones

- title1
- Geometría proyectiva y visión artificial

Introducción

Elementos de geometría proyectiva

Reconstrucción proyectiva

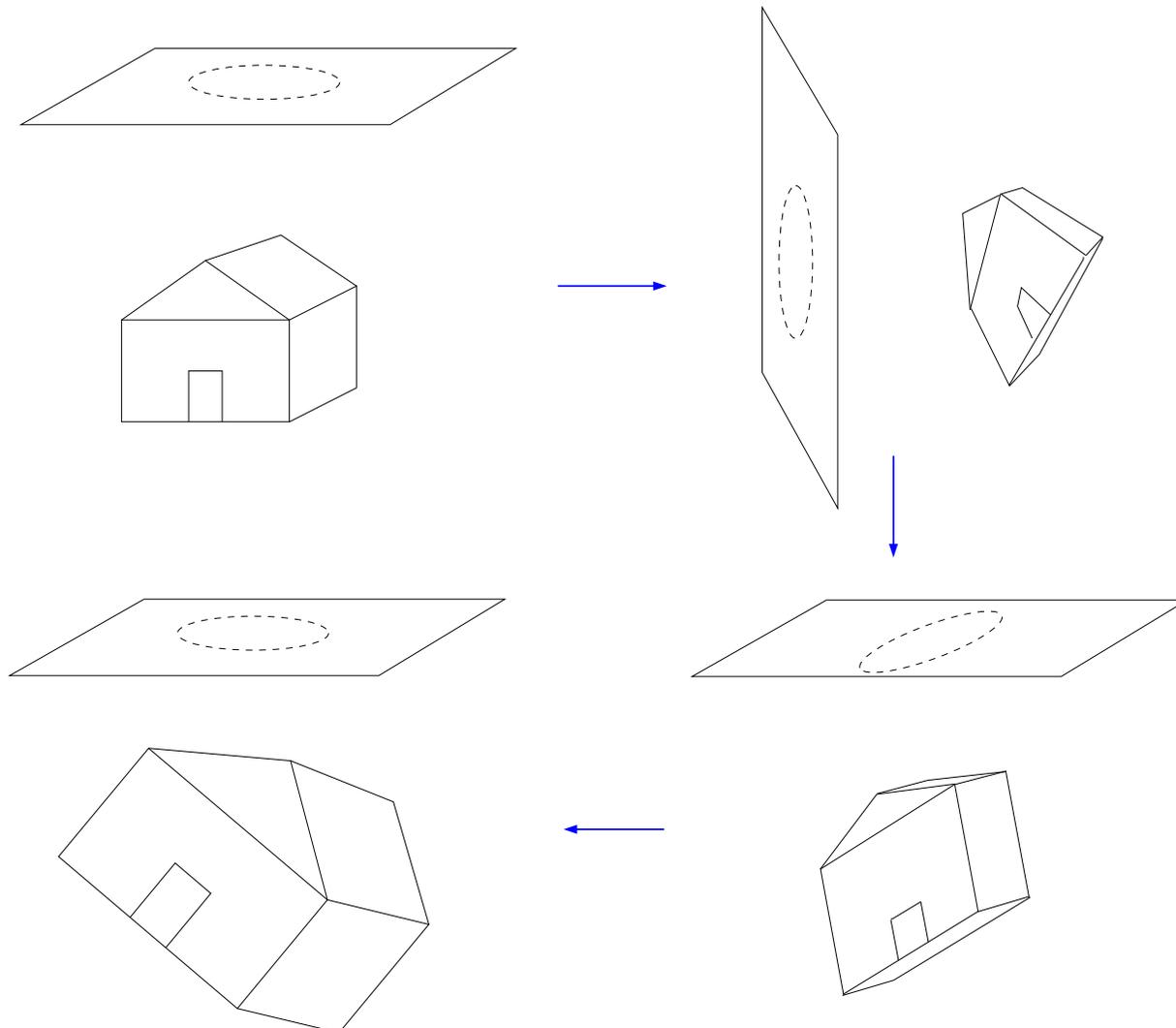
Geometrías: euclídea, afin, proyectiva

Reconstrucción euclídea

- Reconstrucción euclídea
- Tipos de reconstrucciones
- Buscando puntos del infinito
- Buscando la cónica absoluta
- Indeterminación de posición y escala
- Autocalibración con píxeles cuadrados
- Autocalibración con píxeles cuadrados
- Autocalibración con dos cámaras
- Autocalibración con dos cámaras

Bibliografía

Reconstrucción euclídea





Buscando puntos del infinito

- title1
- Geometría proyectiva y visión artificial

Introducción

Elementos de geometría proyectiva

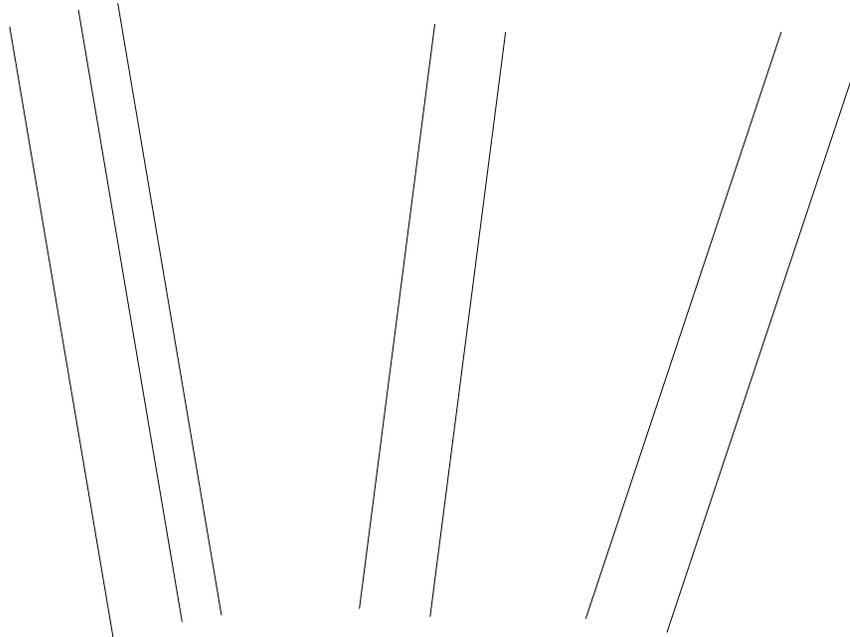
Reconstrucción proyectiva

Geometrías: euclídea, afin, proyectiva

Reconstrucción euclídea

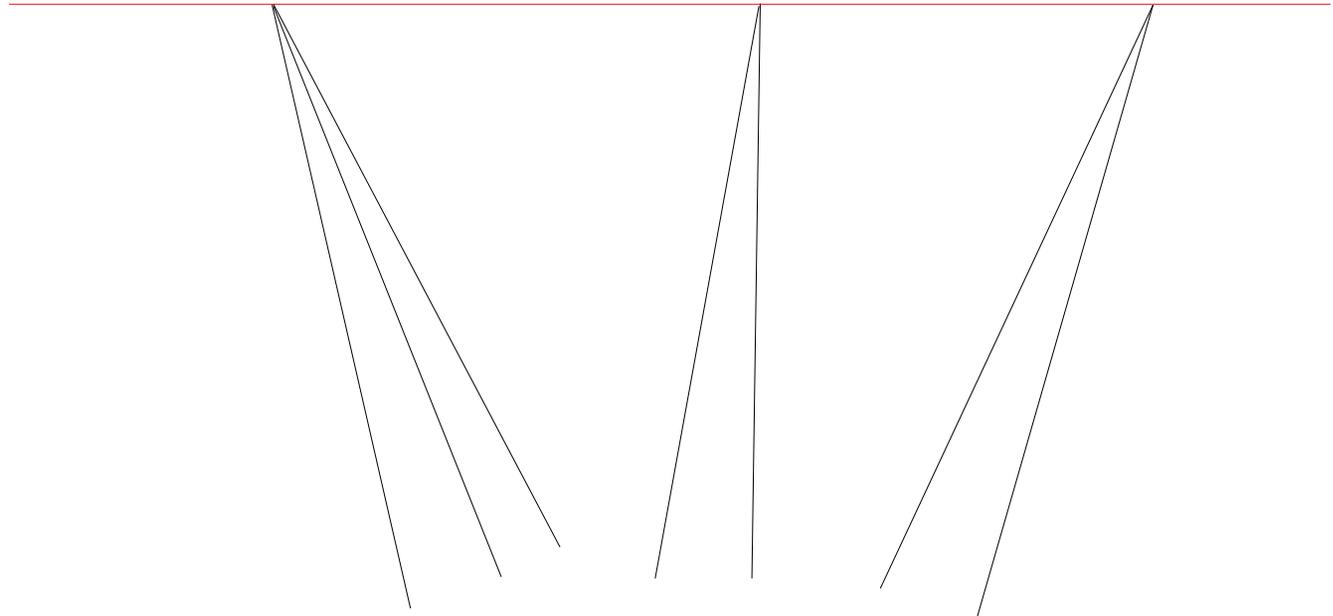
- Reconstrucción euclídea
- Tipos de reconstrucciones
- **Buscando puntos del infinito**
- Buscando la cónica absoluta
- Indeterminación de posición y escala
- Autocalibración con píxeles cuadrados
- Autocalibración con píxeles cuadrados
- Autocalibración con dos cámaras
- Autocalibración con dos cámaras

Bibliografía





Buscando puntos del infinito



- title1
- Geometría proyectiva y visión artificial

Introducción

Elementos de geometría proyectiva

Reconstrucción proyectiva

Geometrías: euclídea, afin, proyectiva

Reconstrucción euclídea

- Reconstrucción euclídea
- Tipos de reconstrucciones
- Buscando puntos del infinito
- Buscando la cónica absoluta
- Indeterminación de posición y escala
- Autocalibración con píxeles cuadrados
- Autocalibración con píxeles cuadrados
- Autocalibración con dos cámaras
- Autocalibración con dos cámaras

Bibliografía



Buscando puntos del infinito

- title1
- Geometría proyectiva y visión artificial

Introducción

Elementos de geometría proyectiva

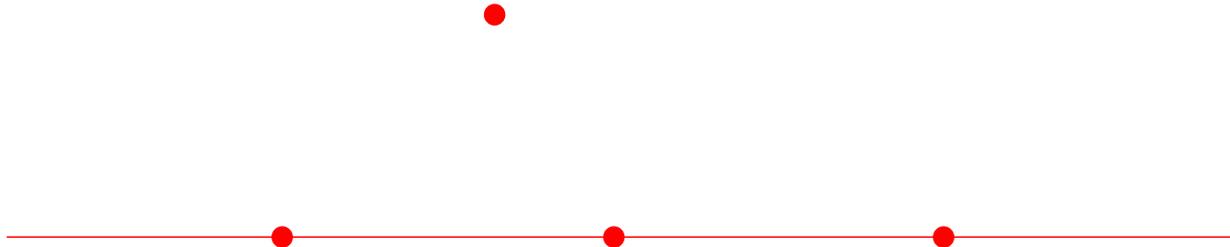
Reconstrucción proyectiva

Geometrías: euclídea, afin, proyectiva

Reconstrucción euclídea

- Reconstrucción euclídea
- Tipos de reconstrucciones
- **Buscando puntos del infinito**
- Buscando la cónica absoluta
- Indeterminación de posición y escala
- Autocalibración con píxeles cuadrados
- Autocalibración con píxeles cuadrados
- Autocalibración con dos cámaras
- Autocalibración con dos cámaras

Bibliografía





Buscando puntos del infinito

- title1
- Geometría proyectiva y visión artificial

Introducción

Elementos de geometría proyectiva

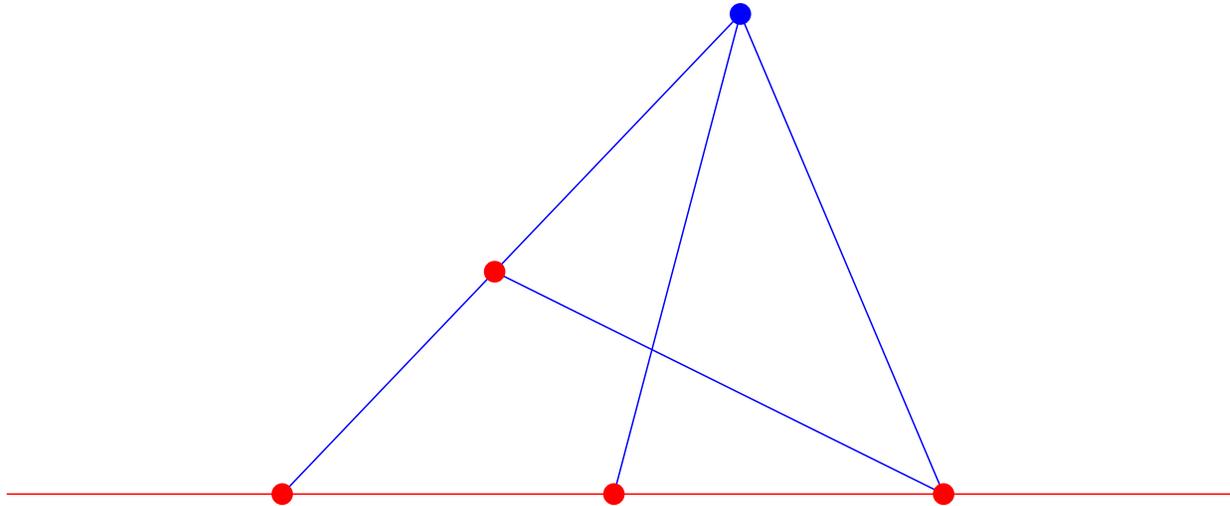
Reconstrucción proyectiva

Geometrías: euclídea, afin, proyectiva

Reconstrucción euclídea

- Reconstrucción euclídea
- Tipos de reconstrucciones
- **Buscando puntos del infinito**
- Buscando la cónica absoluta
- Indeterminación de posición y escala
- Autocalibración con píxeles cuadrados
- Autocalibración con píxeles cuadrados
- Autocalibración con dos cámaras
- Autocalibración con dos cámaras

Bibliografía





Buscando puntos del infinito

- title1
- Geometría proyectiva y visión artificial

Introducción

Elementos de geometría proyectiva

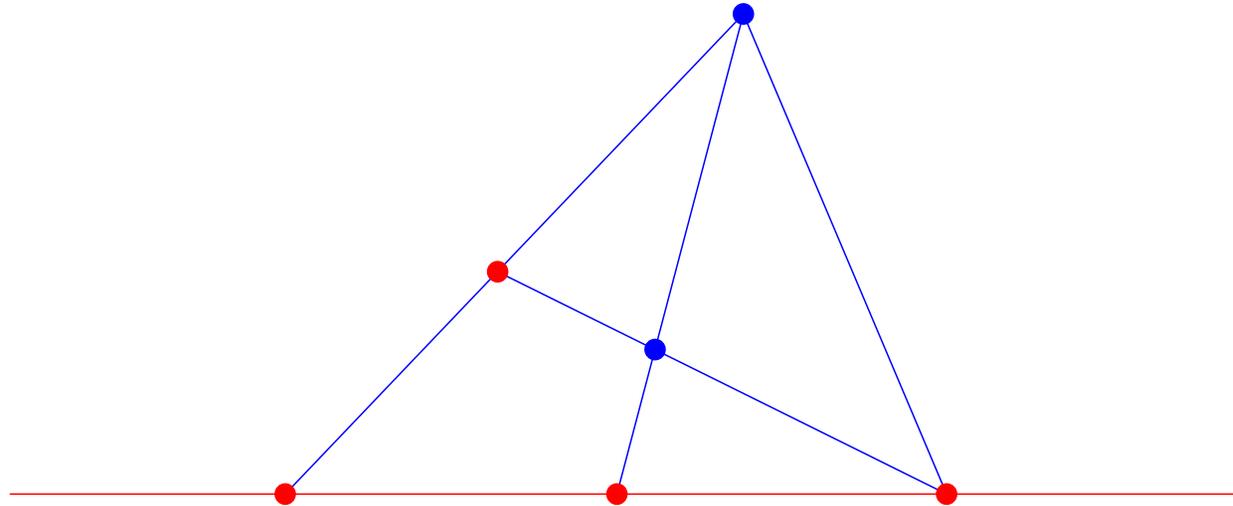
Reconstrucción proyectiva

Geometrías: euclídea, afin, proyectiva

Reconstrucción euclídea

- Reconstrucción euclídea
- Tipos de reconstrucciones
- **Buscando puntos del infinito**
- Buscando la cónica absoluta
- Indeterminación de posición y escala
- Autocalibración con píxeles cuadrados
- Autocalibración con píxeles cuadrados
- Autocalibración con dos cámaras
- Autocalibración con dos cámaras

Bibliografía





Buscando puntos del infinito

- title1
- Geometría proyectiva y visión artificial

Introducción

Elementos de geometría proyectiva

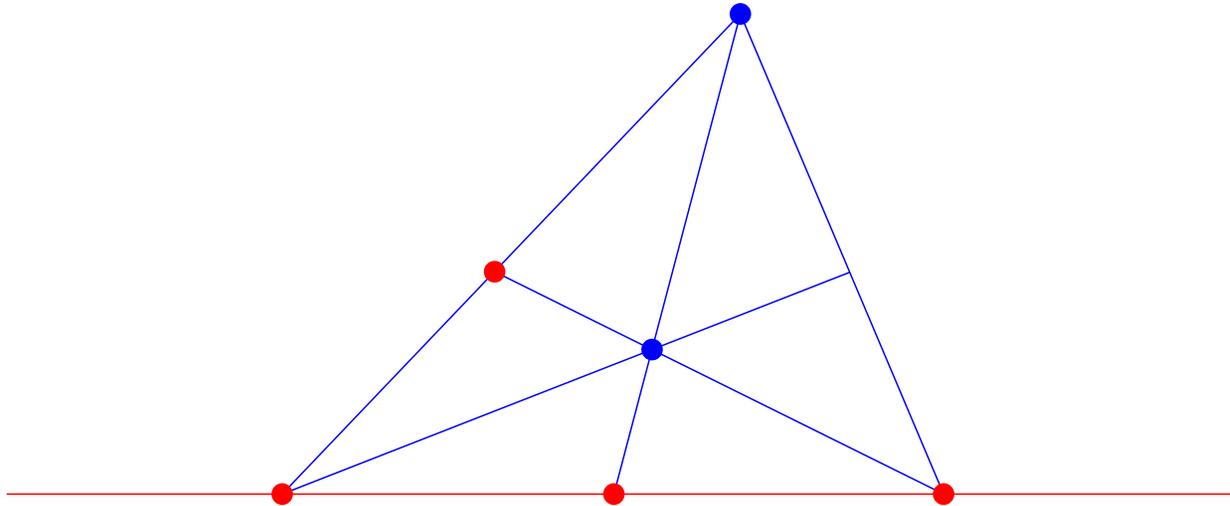
Reconstrucción proyectiva

Geometrías: euclídea, afin, proyectiva

Reconstrucción euclídea

- Reconstrucción euclídea
- Tipos de reconstrucciones
- **Buscando puntos del infinito**
- Buscando la cónica absoluta
- Indeterminación de posición y escala
- Autocalibración con píxeles cuadrados
- Autocalibración con píxeles cuadrados
- Autocalibración con dos cámaras
- Autocalibración con dos cámaras

Bibliografía





Buscando puntos del infinito

- title1
- Geometría proyectiva y visión artificial

Introducción

Elementos de geometría proyectiva

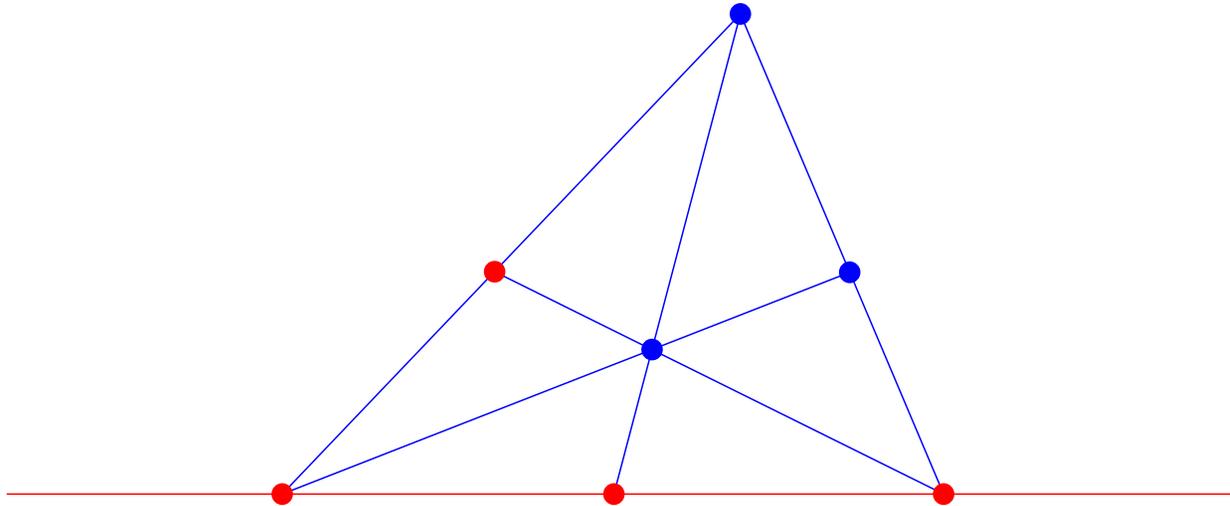
Reconstrucción proyectiva

Geometrías: euclídea, afin, proyectiva

Reconstrucción euclídea

- Reconstrucción euclídea
- Tipos de reconstrucciones
- **Buscando puntos del infinito**
- Buscando la cónica absoluta
- Indeterminación de posición y escala
- Autocalibración con píxeles cuadrados
- Autocalibración con píxeles cuadrados
- Autocalibración con dos cámaras
- Autocalibración con dos cámaras

Bibliografía





Buscando puntos del infinito

- title1
- Geometría proyectiva y visión artificial

Introducción

Elementos de geometría proyectiva

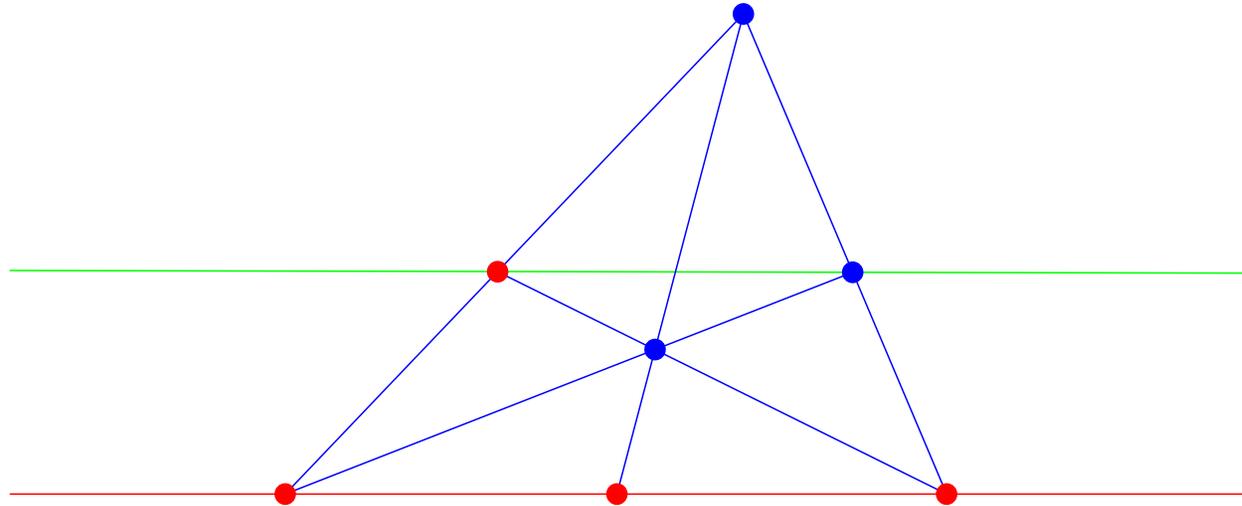
Reconstrucción proyectiva

Geometrías: euclídea, afin, proyectiva

Reconstrucción euclídea

- Reconstrucción euclídea
- Tipos de reconstrucciones
- **Buscando puntos del infinito**
- Buscando la cónica absoluta
- Indeterminación de posición y escala
- Autocalibración con píxeles cuadrados
- Autocalibración con píxeles cuadrados
- Autocalibración con dos cámaras
- Autocalibración con dos cámaras

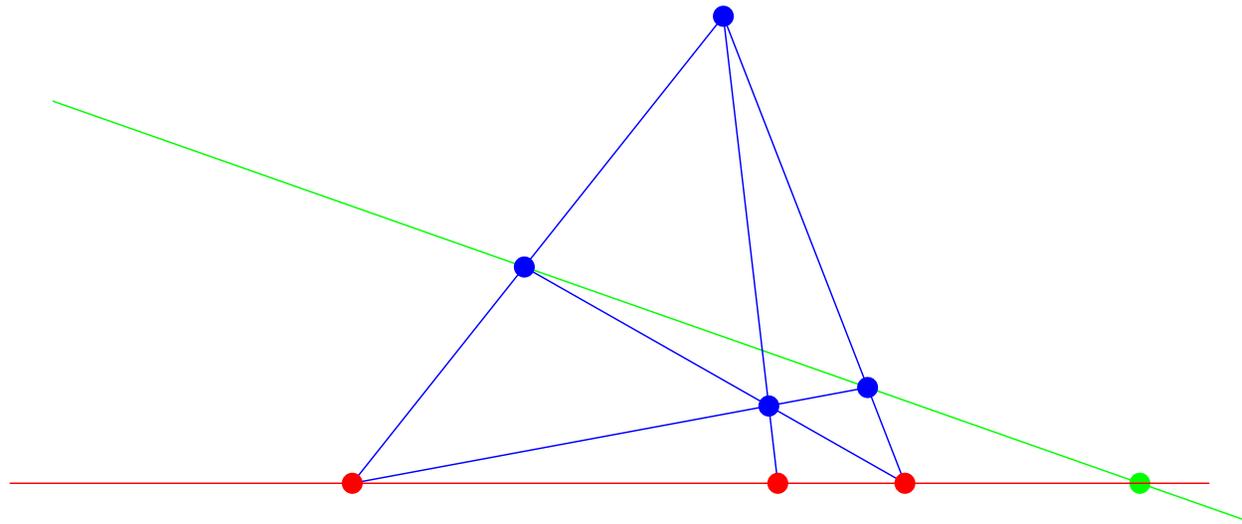
Bibliografía





Buscando puntos del infinito

Dos puntos y su punto medio nos dan un punto del infinito.



- title1
- Geometría proyectiva y visión artificial

Introducción

Elementos de geometría proyectiva

Reconstrucción proyectiva

Geometrías: euclídea, afin, proyectiva

Reconstrucción euclídea

- Reconstrucción euclídea
- Tipos de reconstrucciones
- Buscando puntos del infinito
- Buscando la cónica absoluta
- Indeterminación de posición y escala
- Autocalibración con píxeles cuadrados
- Autocalibración con píxeles cuadrados
- Autocalibración con dos cámaras
- Autocalibración con dos cámaras

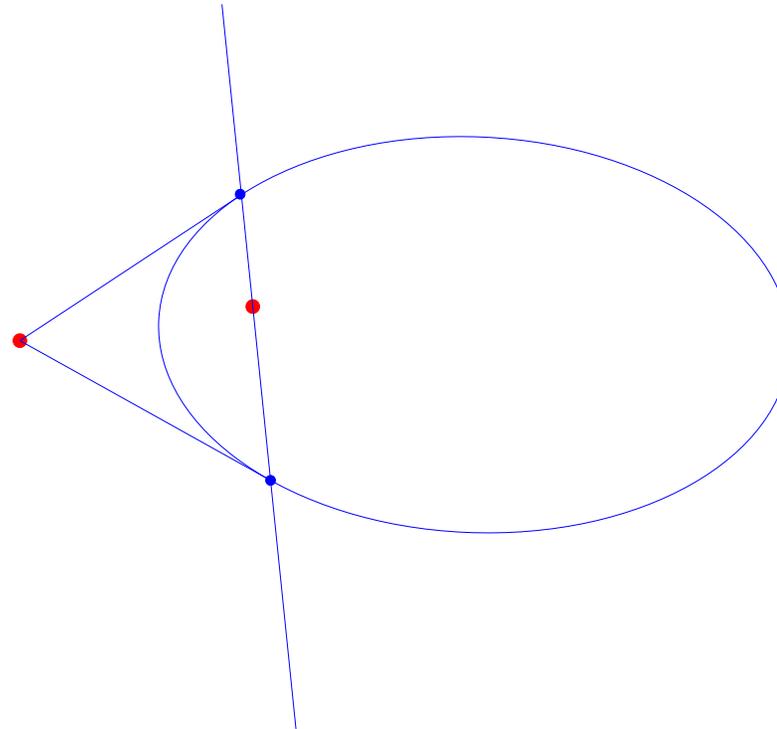
Bibliografía



Buscando la cónica absoluta

Dos direcciones (puntos del infinito ortogonales) nos dan una ecuación en las componentes de la matriz de la cónica absoluta.

$$(X, Y, Z)\omega(X', Y', Z')^T = 0$$



- title1
- Geometría proyectiva y visión artificial

Introducción

Elementos de geometría proyectiva

Reconstrucción proyectiva

Geometrías: euclídea, afin, proyectiva

Reconstrucción euclídea

- Reconstrucción euclídea
- Tipos de reconstrucciones
- Buscando puntos del infinito
- **Buscando la cónica absoluta**
- Indeterminación de posición y escala
- Autocalibración con píxeles cuadrados
- Autocalibración con píxeles cuadrados
- Autocalibración con dos cámaras
- Autocalibración con dos cámaras

Bibliografía



Indeterminación de posición y escala

- title1
- Geometría proyectiva y visión artificial

Introducción

Elementos de geometría proyectiva

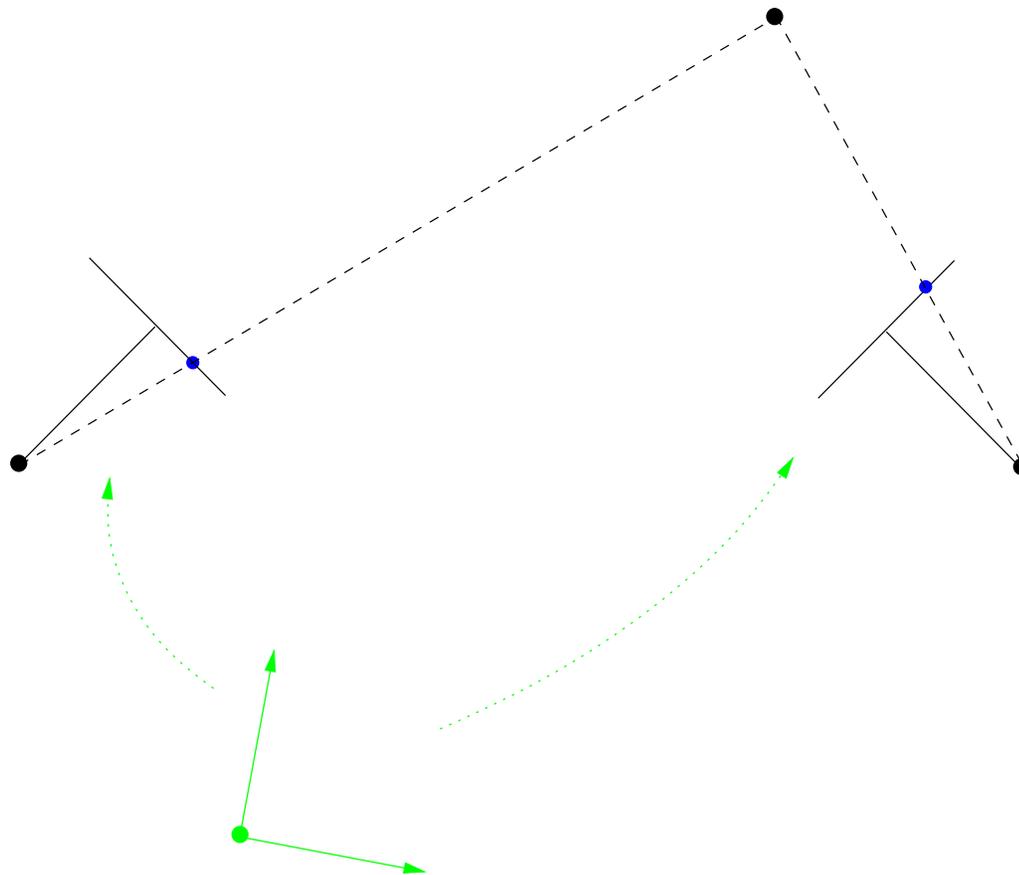
Reconstrucción proyectiva

Geometrías: euclídea, afin, proyectiva

Reconstrucción euclídea

- Reconstrucción euclídea
- Tipos de reconstrucciones
- Buscando puntos del infinito
- Buscando la cónica absoluta
- Indeterminación de posición y escala
- Autocalibración con píxeles cuadrados
- Autocalibración con píxeles cuadrados
- Autocalibración con dos cámaras
- Autocalibración con dos cámaras

Bibliografía





Indeterminación de posición y escala

- title1
- Geometría proyectiva y visión artificial

Introducción

Elementos de geometría proyectiva

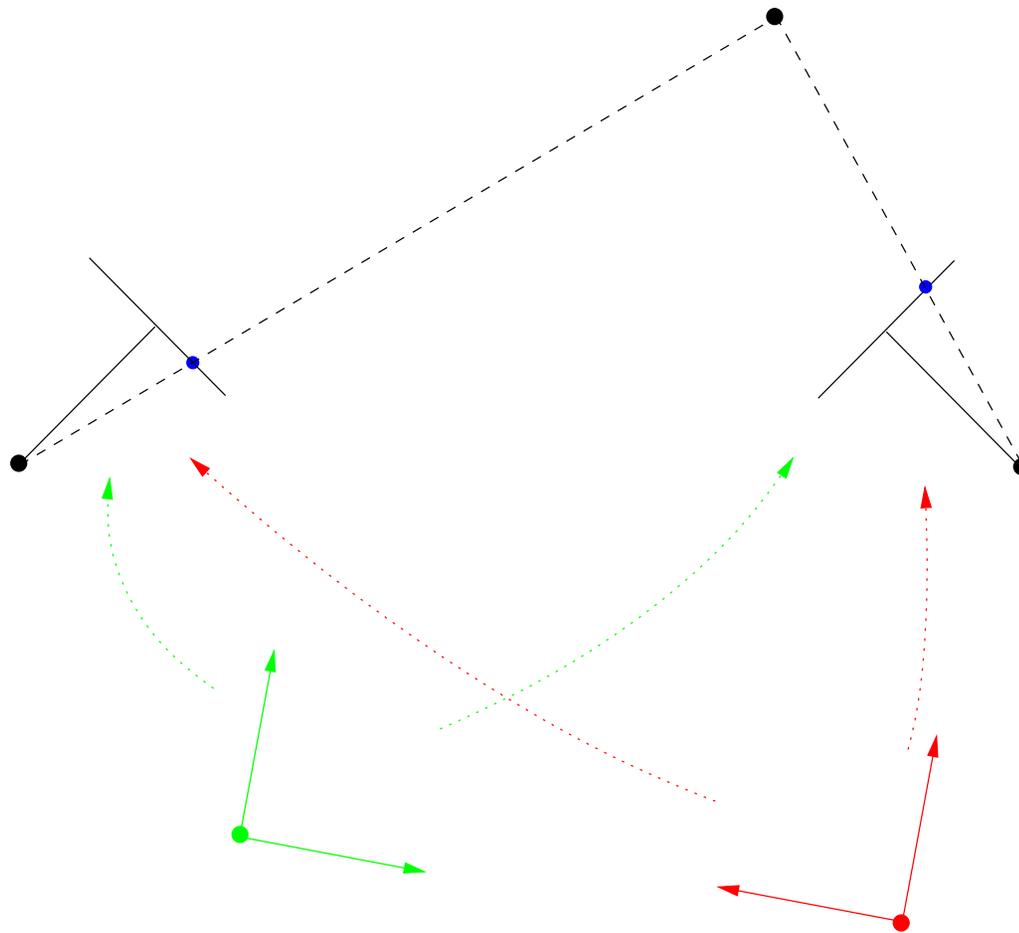
Reconstrucción proyectiva

Geometrías: euclídea, afin, proyectiva

Reconstrucción euclídea

- Reconstrucción euclídea
- Tipos de reconstrucciones
- Buscando puntos del infinito
- Buscando la cónica absoluta
- Indeterminación de posición y escala
- Autocalibración con píxeles cuadrados
- Autocalibración con píxeles cuadrados
- Autocalibración con dos cámaras
- Autocalibración con dos cámaras

Bibliografía





Indeterminación de posición y escala

- title1
- Geometría proyectiva y visión artificial

Introducción

Elementos de geometría proyectiva

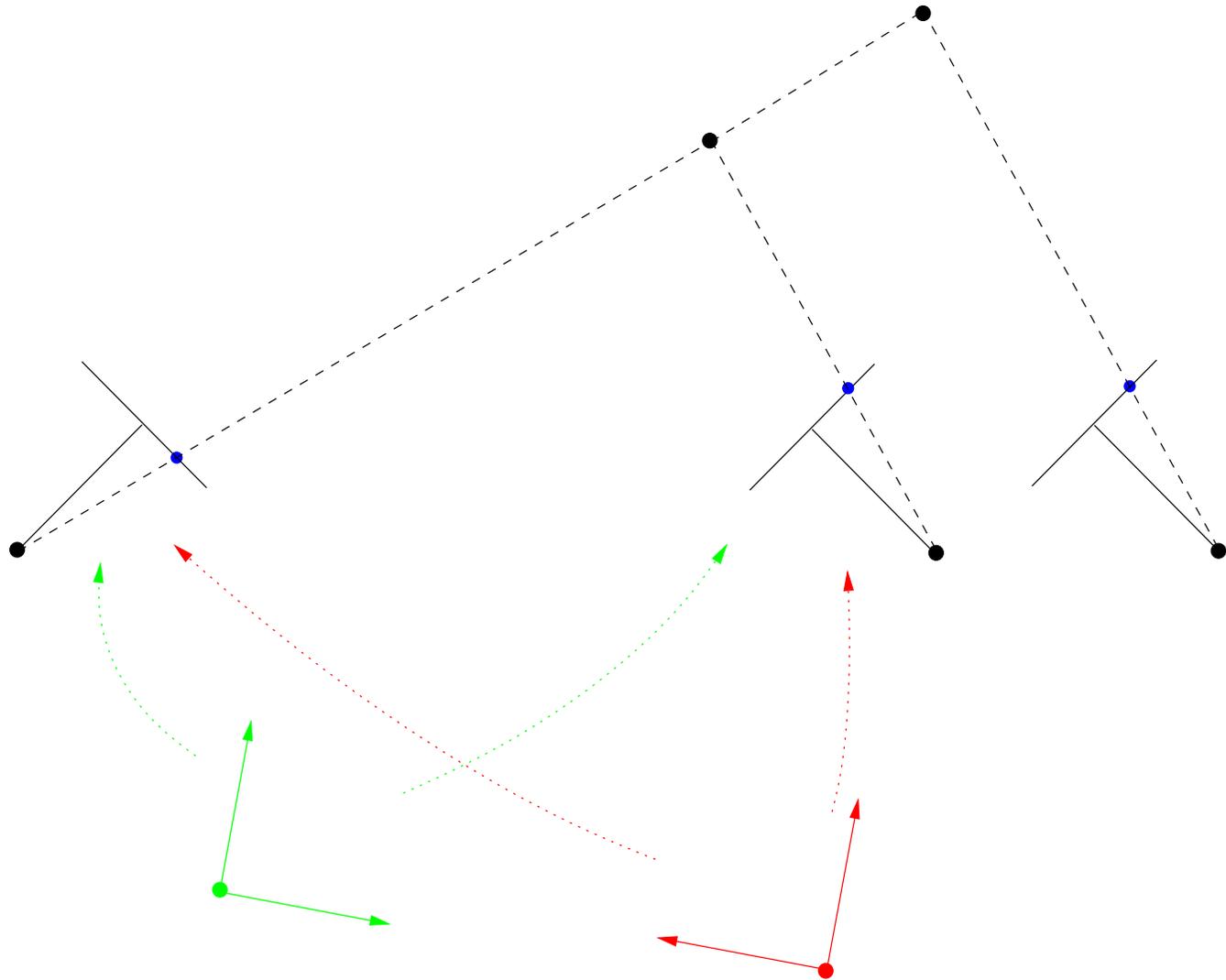
Reconstrucción proyectiva

Geometrías: euclídea, afin, proyectiva

Reconstrucción euclídea

- Reconstrucción euclídea
- Tipos de reconstrucciones
- Buscando puntos del infinito
- Buscando la cónica absoluta
- Indeterminación de posición y escala
- Autocalibración con píxeles cuadrados
- Autocalibración con píxeles cuadrados
- Autocalibración con dos cámaras
- Autocalibración con dos cámaras

Bibliografía





Autocalibración con píxeles cuadrados

- Tener píxeles cuadrados equivale a que *de cada cámara partan dos rectas conocidas que cortan a la cónica absoluta.*

- title1
- Geometría proyectiva y visión artificial

Introducción

Elementos de geometría proyectiva

Reconstrucción proyectiva

Geometrías: euclídea, afin, proyectiva

Reconstrucción euclídea

- Reconstrucción euclídea
- Tipos de reconstrucciones
- Buscando puntos del infinito
- Buscando la cónica absoluta
- Indeterminación de posición y escala
- Autocalibración con píxeles cuadrados
- Autocalibración con píxeles cuadrados
- Autocalibración con dos cámaras
- Autocalibración con dos cámaras

Bibliografía



Autocalibración con píxeles cuadrados

- title1
- Geometría proyectiva y visión artificial

Introducción

Elementos de geometría proyectiva

Reconstrucción proyectiva

Geometrías: euclídea, afin, proyectiva

Reconstrucción euclídea

- Reconstrucción euclídea
- Tipos de reconstrucciones
- Buscando puntos del infinito
- Buscando la cónica absoluta
- Indeterminación de posición y escala
- Autocalibración con píxeles cuadrados
- Autocalibración con píxeles cuadrados
- Autocalibración con dos cámaras
- Autocalibración con dos cámaras

Bibliografía

- Tener píxeles cuadrados equivale a que *de cada cámara partan dos rectas conocidas que cortan a la cónica absoluta.*
- La calibración euclídea consiste en *hallar una cónica que corte a todas las rectas.*



Autocalibración con píxeles cuadrados

- title1
- Geometría proyectiva y visión artificial

Introducción

Elementos de geometría proyectiva

Reconstrucción proyectiva

Geometrías: euclídea, afin, proyectiva

Reconstrucción euclídea

- Reconstrucción euclídea
- Tipos de reconstrucciones
- Buscando puntos del infinito
- Buscando la cónica absoluta
- Indeterminación de posición y escala
- Autocalibración con píxeles cuadrados
- Autocalibración con píxeles cuadrados
- Autocalibración con dos cámaras
- Autocalibración con dos cámaras

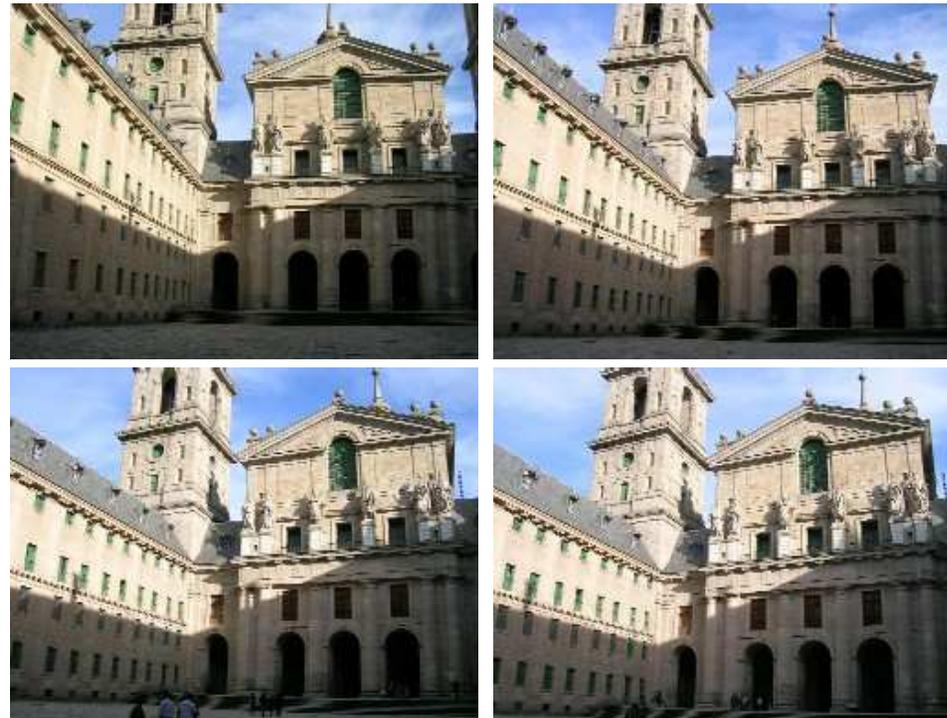
Bibliografía

- Tener píxeles cuadrados equivale a que *de cada cámara partan dos rectas conocidas que cortan a la cónica absoluta.*
- La calibración euclídea consiste en *hallar una cónica que corte a todas las rectas.*
- Si tenemos diez o más cámaras se resuelve mediante técnicas de álgebra lineal.



Autocalibración con píxeles cuadrados

Reconstrucción de un patio de El Escorial Cámaras con píxeles cuadrados, parámetros variables desconocidos



Reconstrucción 3D (VRML)

(Pulsar botón derecho del ratón y seleccionar "Abrir vínculo web en el explorador").

- title1
- Geometría proyectiva y visión artificial

Introducción

Elementos de geometría proyectiva

Reconstrucción proyectiva

Geometrías: euclídea, afin, proyectiva

Reconstrucción euclídea

- Reconstrucción euclídea
- Tipos de reconstrucciones
- Buscando puntos del infinito
- Buscando la cónica absoluta
- Indeterminación de posición y escala
- Autocalibración con píxeles cuadrados
- Autocalibración con píxeles cuadrados
- Autocalibración con dos cámaras
- Autocalibración con dos cámaras

Bibliografía



Autocalibración con dos cámaras

Partimos de dos imágenes tomadas con cámaras

- Con píxeles cuadrados.
- Con el resto de los parámetros intrínsecos iguales, desconocidos.

- title1
- Geometría proyectiva y visión artificial

Introducción

Elementos de geometría proyectiva

Reconstrucción proyectiva

Geometrías: euclídea, afin, proyectiva

Reconstrucción euclídea

- Reconstrucción euclídea
- Tipos de reconstrucciones
- Buscando puntos del infinito
- Buscando la cónica absoluta
- Indeterminación de posición y escala
- Autocalibración con píxeles cuadrados
- Autocalibración con píxeles cuadrados
- Autocalibración con dos cámaras
- Autocalibración con dos cámaras

Bibliografía



Autocalibración con dos cámaras

- title1
- Geometría proyectiva y visión artificial

Introducción

Elementos de geometría proyectiva

Reconstrucción proyectiva

Geometrías: euclídea, afin, proyectiva

Reconstrucción euclídea

- Reconstrucción euclídea
- Tipos de reconstrucciones
- Buscando puntos del infinito
- Buscando la cónica absoluta
- Indeterminación de posición y escala
- Autocalibración con píxeles cuadrados
- Autocalibración con píxeles cuadrados
- Autocalibración con dos cámaras
- Autocalibración con dos cámaras

Bibliografía

Partimos de dos imágenes tomadas con cámaras

- Con píxeles cuadrados.
- Con el resto de los parámetros intrínsecos iguales, desconocidos.

El conjunto de soluciones depende de un parámetro.



Autocalibración con dos cámaras

- title1
- Geometría proyectiva y visión artificial

Introducción

Elementos de geometría proyectiva

Reconstrucción proyectiva

Geometrías: euclídea, afin, proyectiva

Reconstrucción euclídea

- Reconstrucción euclídea
- Tipos de reconstrucciones
- Buscando puntos del infinito
- Buscando la cónica absoluta
- Indeterminación de posición y escala
- Autocalibración con píxeles cuadrados
- Autocalibración con píxeles cuadrados
- Autocalibración con dos cámaras
- Autocalibración con dos cámaras

Bibliografía

Partimos de dos imágenes tomadas con cámaras

- Con píxeles cuadrados.
- Con el resto de los parámetros intrínsecos iguales, desconocidos.

El conjunto de soluciones depende de un parámetro.
Ejemplo de reconstrucción:





Autocalibración con dos cámaras

- title1
- Geometría proyectiva y visión artificial

Introducción

Elementos de geometría proyectiva

Reconstrucción proyectiva

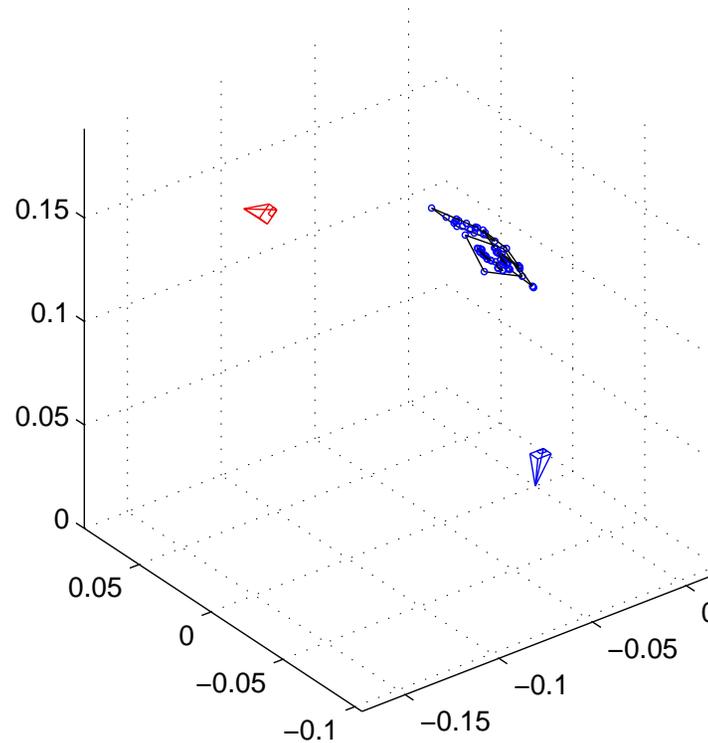
Geometrías: euclídea, afin, proyectiva

Reconstrucción euclídea

- Reconstrucción euclídea
- Tipos de reconstrucciones
- Buscando puntos del infinito
- Buscando la cónica absoluta
- Indeterminación de posición y escala
- Autocalibración con píxeles cuadrados
- Autocalibración con píxeles cuadrados
- Autocalibración con dos cámaras
- Autocalibración con dos cámaras

Bibliografía

Rec. euclídea – comp 2 – index 926



Explorando la curva de soluciones.



Autocalibración con dos cámaras

- title1
- Geometría proyectiva y visión artificial

Introducción

Elementos de geometría proyectiva

Reconstrucción proyectiva

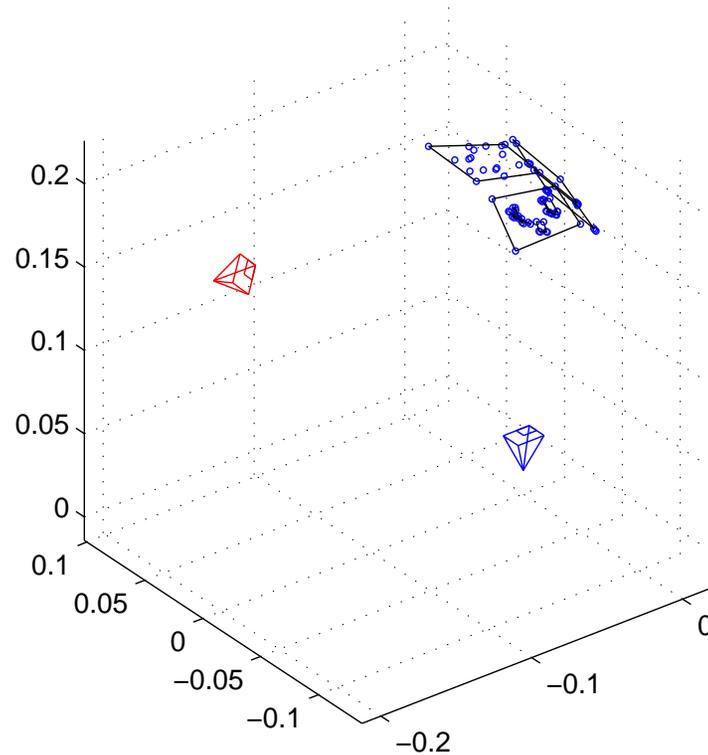
Geometrías: euclídea, afin, proyectiva

Reconstrucción euclídea

- Reconstrucción euclídea
- Tipos de reconstrucciones
- Buscando puntos del infinito
- Buscando la cónica absoluta
- Indeterminación de posición y escala
- Autocalibración con píxeles cuadrados
- Autocalibración con píxeles cuadrados
- Autocalibración con dos cámaras
- Autocalibración con dos cámaras

Bibliografía

Rec. euclídea – comp 2 – index 936



Explorando la curva de soluciones.



Autocalibración con dos cámaras

- title1
- Geometría proyectiva y visión artificial

Introducción

Elementos de geometría proyectiva

Reconstrucción proyectiva

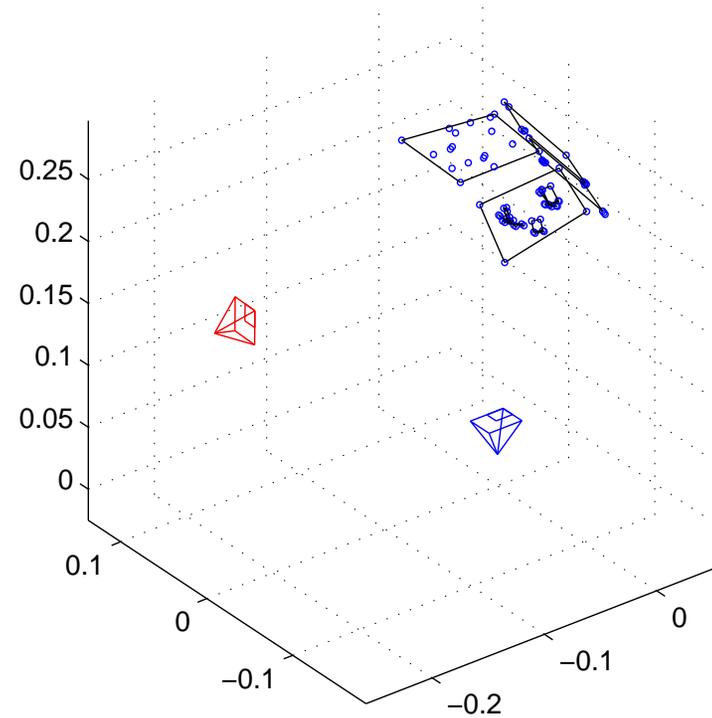
Geometrías: euclídea, afin, proyectiva

Reconstrucción euclídea

- Reconstrucción euclídea
- Tipos de reconstrucciones
- Buscando puntos del infinito
- Buscando la cónica absoluta
- Indeterminación de posición y escala
- Autocalibración con píxeles cuadrados
- Autocalibración con píxeles cuadrados
- Autocalibración con dos cámaras
- Autocalibración con dos cámaras

Bibliografía

Rec. euclídea – comp 2 – index 946



Explorando la curva de soluciones.



Autocalibración con dos cámaras

- title1
- Geometría proyectiva y visión artificial

Introducción

Elementos de geometría proyectiva

Reconstrucción proyectiva

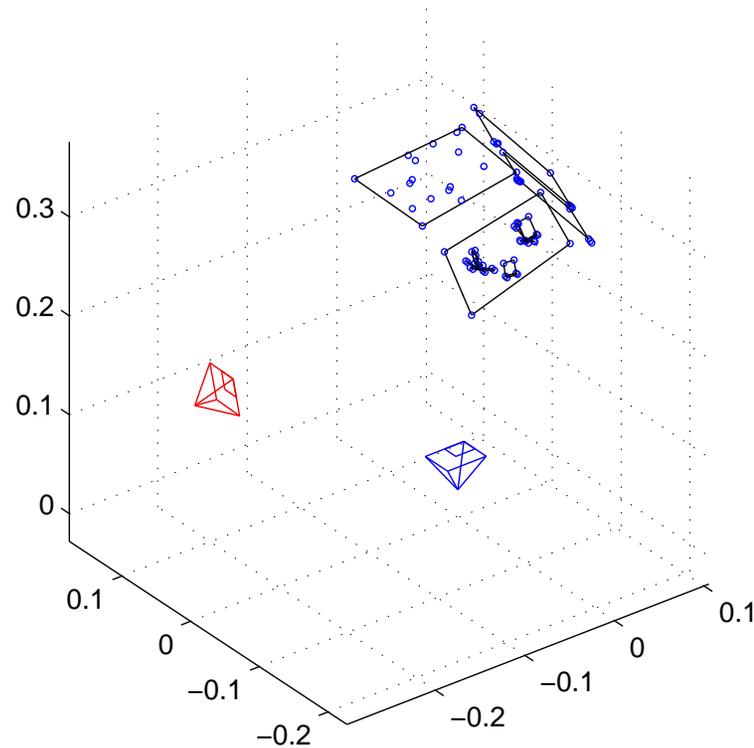
Geometrías: euclídea, afin, proyectiva

Reconstrucción euclídea

- Reconstrucción euclídea
- Tipos de reconstrucciones
- Buscando puntos del infinito
- Buscando la cónica absoluta
- Indeterminación de posición y escala
- Autocalibración con píxeles cuadrados
- Autocalibración con píxeles cuadrados
- Autocalibración con dos cámaras
- Autocalibración con dos cámaras

Bibliografía

Rec. euclídea – comp 2 – index 956



Explorando la curva de soluciones.



Autocalibración con dos cámaras

- title1
- Geometría proyectiva y visión artificial

Introducción

Elementos de geometría proyectiva

Reconstrucción proyectiva

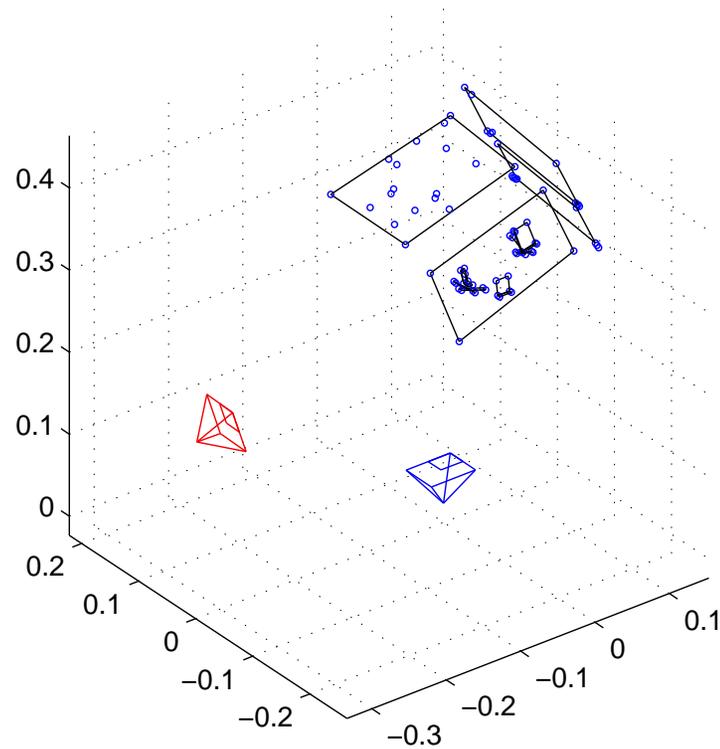
Geometrías: euclídea, afin, proyectiva

Reconstrucción euclídea

- Reconstrucción euclídea
- Tipos de reconstrucciones
- Buscando puntos del infinito
- Buscando la cónica absoluta
- Indeterminación de posición y escala
- Autocalibración con píxeles cuadrados
- Autocalibración con píxeles cuadrados
- Autocalibración con dos cámaras
- Autocalibración con dos cámaras

Bibliografía

Rec. euclídea – comp 2 – index 966



Explorando la curva de soluciones.



Autocalibración con dos cámaras

- title1
- Geometría proyectiva y visión artificial

Introducción

Elementos de geometría proyectiva

Reconstrucción proyectiva

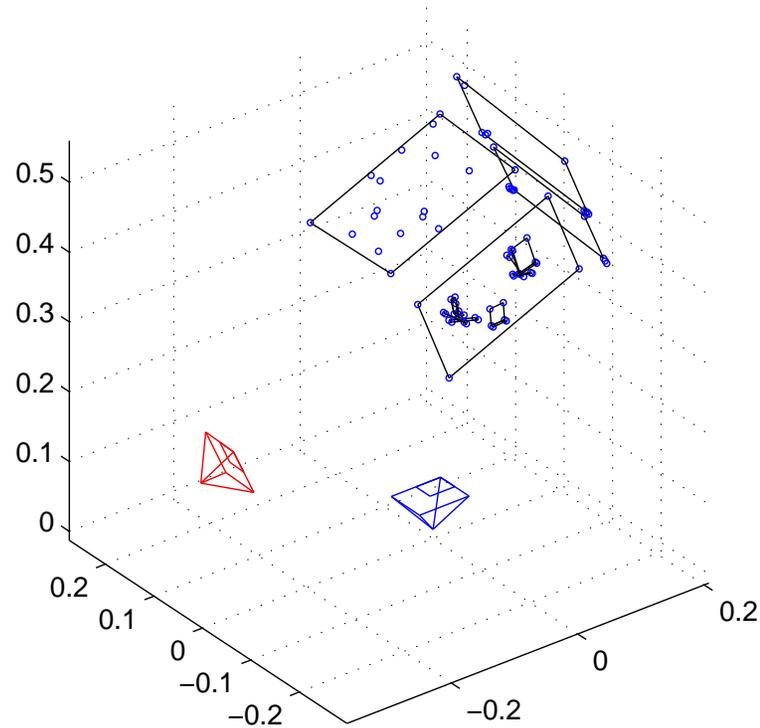
Geometrías: euclídea, afin, proyectiva

Reconstrucción euclídea

- Reconstrucción euclídea
- Tipos de reconstrucciones
- Buscando puntos del infinito
- Buscando la cónica absoluta
- Indeterminación de posición y escala
- Autocalibración con píxeles cuadrados
- Autocalibración con píxeles cuadrados
- Autocalibración con dos cámaras
- Autocalibración con dos cámaras

Bibliografía

Rec. euclídea – comp 2 – index 976



Ya hemos encontrado el ángulo recto.



Autocalibración con dos cámaras

- title1
- Geometría proyectiva y visión artificial

Introducción

Elementos de geometría proyectiva

Reconstrucción proyectiva

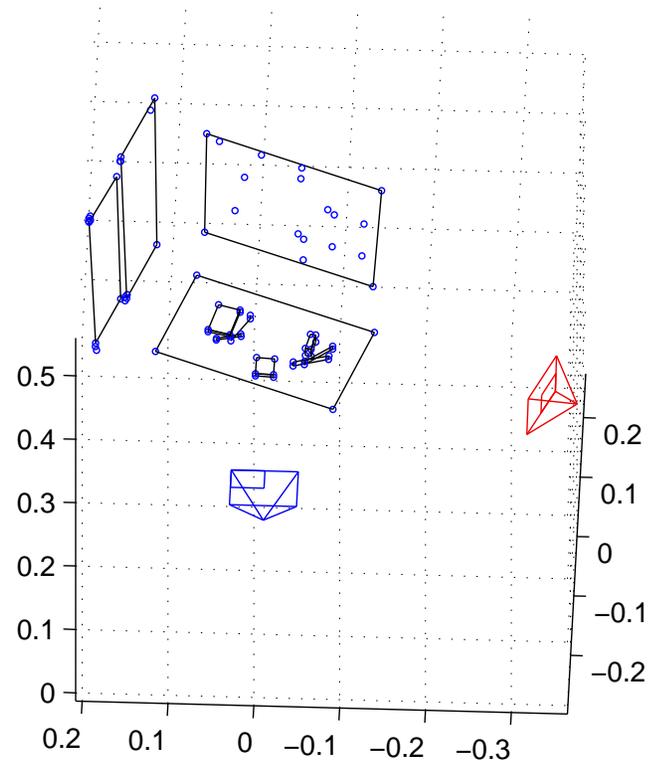
Geometrías: euclídea, afin, proyectiva

Reconstrucción euclídea

- Reconstrucción euclídea
- Tipos de reconstrucciones
- Buscando puntos del infinito
- Buscando la cónica absoluta
- Indeterminación de posición y escala
- Autocalibración con píxeles cuadrados
- Autocalibración con píxeles cuadrados
- Autocalibración con dos cámaras
- Autocalibración con dos cámaras

Bibliografía

Rec. euclídea – comp 2 – index 976



La misma, rotada.

Reconstrucción 3D (VRML)

(Pulsar botón derecho del ratón y seleccionar “Abrir vínculo web en el explorador”).



Bibliografía

- title1
- Geometría proyectiva y visión artificial

Introducción

Elementos de geometría proyectiva

Reconstrucción proyectiva

Geometrías: euclídea, afin, proyectiva

Reconstrucción euclídea

Bibliografía

- Bibliografía
- Técnicas de autocalibración mostradas

1. R. Hartley, A. Zisserman, “Multiple View Geometry in Computer Vision”, Cambridge Univ. Press, 2^a ed., Reino Unido, 2003.
2. J. M. Rodríguez-Sanjurjo, J. M. Ruiz Sancho, “Geometría Proyectiva”, Addison-Wesley, 1998.
3. J. G. Semple, G. T. Kneebone, “Algebraic Projective Geometry”, Oxford Univ. Press, 1952.



Bibliografía

- title1
- Geometría proyectiva y visión artificial

Introducción

Elementos de geometría proyectiva

Reconstrucción proyectiva

Geometrías: euclídea, afin, proyectiva

Reconstrucción euclídea

Bibliografía

- **Bibliografía**
- Técnicas de autocalibración mostradas

1. R. Hartley, A. Zisserman, “Multiple View Geometry in Computer Vision”, Cambridge Univ. Press, 2^a ed., Reino Unido, 2003.
2. J. M. Rodríguez-Sanjurjo, J. M. Ruiz Sancho, “Geometría Proyectiva”, Addison-Wesley, 1998.
3. J. G. Semple, G. T. Kneebone, “Algebraic Projective Geometry”, Oxford Univ. Press, 1952.



Bibliografía

- title1
- Geometría proyectiva y visión artificial

Introducción

Elementos de geometría proyectiva

Reconstrucción proyectiva

Geometrías: euclídea, afin, proyectiva

Reconstrucción euclídea

Bibliografía

- **Bibliografía**
- Técnicas de autocalibración mostradas

1. R. Hartley, A. Zisserman, “Multiple View Geometry in Computer Vision”, Cambridge Univ. Press, 2^a ed., Reino Unido, 2003.
2. J. M. Rodríguez-Sanjurjo, J. M. Ruiz Sancho, “Geometría Proyectiva”, Addison-Wesley, 1998.
3. J. G. Semple, G. T. Kneebone, “Algebraic Projective Geometry”, Oxford Univ. Press, 1952.



Técnicas de autocalibración mostradas

- title1
- Geometría proyectiva y visión artificial

Introducción

Elementos de geometría proyectiva

Reconstrucción proyectiva

Geometrías: euclídea, afin, proyectiva

Reconstrucción euclídea

Bibliografía

- Bibliografía
- Técnicas de autocalibración mostradas

1. A. Valdés, J. I. Ronda, “Camera autocalibration and the calibration pencil”, *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, vol. 23, no. 2, pp. 167-174, Sept. 2005.
2. A. Valdés, J. I. Ronda, G. Gallego, “The absolute line quadric and camera autocalibration”, *Int. J. of Computer Vision*, vol. 66, no. 3, pp. 283-303, March 2006.
3. J. I. Ronda, A. Valdés, “Autocalibration of cameras with known pixel shape”, aceptado en *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 2007,
http://www/~jir/comp_vis/index.html



Técnicas de autocalibración mostradas

- title1
- Geometría proyectiva y visión artificial

Introducción

Elementos de geometría proyectiva

Reconstrucción proyectiva

Geometrías: euclídea, afin, proyectiva

Reconstrucción euclídea

Bibliografía

- Bibliografía
- Técnicas de autocalibración mostradas

1. A. Valdés, J. I. Ronda, “Camera autocalibration and the calibration pencil”, Journal of Mathematical Imaging and Vision, vol. 23, no. 2, pp. 167-174, Sept. 2005.
2. A. Valdés, J. I. Ronda, G. Gallego, “The absolute line quadric and camera autocalibration”, Int. J. of Computer Vision, vol. 66, no. 3, pp. 283-303, March 2006.
3. J. I. Ronda, A. Valdés, “Autocalibration of cameras with known pixel shape”, aceptado en Journal of Mathematical Imaging and Vision, 2007,
http://www/~jir/comp_vis/index.html



Técnicas de autocalibración mostradas

- title1
- Geometría proyectiva y visión artificial

Introducción

Elementos de geometría proyectiva

Reconstrucción proyectiva

Geometrías: euclídea, afin, proyectiva

Reconstrucción euclídea

Bibliografía

- Bibliografía
- Técnicas de autocalibración mostradas

1. A. Valdés, J. I. Ronda, “Camera autocalibration and the calibration pencil”, Journal of Mathematical Imaging and Vision, vol. 23, no. 2, pp. 167-174, Sept. 2005.
2. A. Valdés, J. I. Ronda, G. Gallego, “The absolute line quadric and camera autocalibration”, Int. J. of Computer Vision, vol. 66, no. 3, pp. 283-303, March 2006.
3. J. I. Ronda, A. Valdés, “Autocalibration of cameras with known pixel shape”, aceptado en Journal of Mathematical Imaging and Vision, 2007,
http://www/~jir/comp_vis/index.html