

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE MADRID

ESCUELA POLITÉCNICA SUPERIOR



PROYECTO FIN DE CARRERA

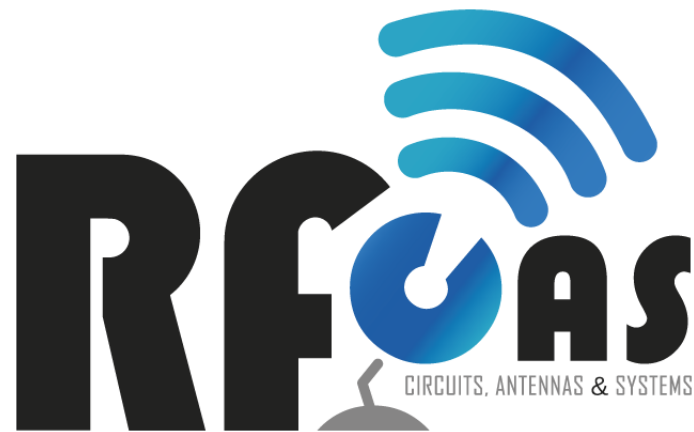
# SIMULACIÓN DE MEDIOS DE TRANSMISIÓN MEDIANTE EL MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS

Ingeniería de Telecomunicación

Carlos Revillas Sánchez  
Junio de 2015



# SIMULACIÓN DE MEDIOS DE TRANSMISIÓN MEDIANTE EL MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS



AUTOR: Carlos Revillas Sánchez  
TUTOR: Juan Córcoles Ortega  
PONENTE: Jorge Alfonso Ruiz Cruz

Grupo de Radiofrecuencia: Circuitos, Antenas y Sistemas (RFCAS)  
Dpto. de Tecnología Electrónica y de las Comunicaciones  
Escuela Politécnica Superior  
Universidad Autónoma de Madrid  
Junio de 2015



## Resumen

El análisis de medios de transmisión y componentes de circuitos de radiofrecuencia, como filtros, antenas, acopladores, etc. se puede realizar mediante instrumentación específica, analizadores de red, osciloscopios, analizadores de espectro, o mediante métodos de computación electromagnética, realizando simulaciones para analizar los medios de transmisión y componentes de radiofrecuencia. El análisis mediante simulaciones presenta la clara ventaja de que no es necesario construir físicamente el objeto a analizar, pudiendo ser esta tarea realmente compleja y costosa.

Uno de los métodos más utilizados para la computación electromagnética es el método de elementos finitos (FEM). En particular, la implementación de elementos vectoriales (*edge-based elements*) supone una gran ventaja frente a otros métodos, ya que modelan de forma eficiente el comportamiento de los campos vectoriales electromagnéticos.

En este proyecto de fin de carrera se ha realizado un primer acercamiento al análisis de medios de transmisión utilizando el método FEM. Para ello se han analizado los problemas clásicos, que facilitan la comprensión del análisis mediante FEM.

El primer caso es el del potencial electrostático para cálculo de modos TEM, ya que presenta un ejemplo de problema determinístico, donde se analiza el comportamiento de una estructura a una excitación. El segundo caso es el análisis de guías homogéneas. En él se analiza un problema de autovalores, donde se obtienen los modos resonantes de la estructura, sin introducir ninguna fuente, interna o externa. Utilizando esta formulación se han analizado algunas estructuras con solución analítica así como algunas estructuras de interés, que no se pueden resolver sin la aplicación de algún método numérico, como son las guías Ridge y Double Ridge. Por último se analiza el problema inhomogéneo mediante dos ejemplos, también típicos de la literatura de FEM en electromagnetismo, la guía rellena de dieléctrico hasta la mitad, y la línea microstrip apantallada. Para el análisis de estos problemas se requiere de una formulación diferente a la empleada en problemas homogéneos. Utilizando esta formulación se pueden obtener resultados más interesantes como son las curvas de dispersión características de cada medio de transmisión.

Para la simulación de los problemas se ha utilizado el paquete de herramientas FEniCS, un paquete de libre distribución que dispone de un conjunto de instrucciones de alto nivel, donde se implementan las funciones básicas del método FEM. Para la simulación de estructuras más complejas se ha utilizado la herramienta de libre distribución Gmsh, que permite crear mallados para el método FEM de estructuras complejas, para su posterior resolución utilizando otro paquete, en nuestro caso mediante FEniCS.

## Palabras Clave

Medios de transmisión, elementos finitos, problema inhomogéneo.

## **Abstract**

Waveguide and transmission line analysis, as well as other radio frequency circuit components like filters, antennas, etc. can be done by specific instrumentation like network analyzers, oscilloscopes and spectrum analyzers or by the use of some electromagnetic computation technique, the latter with the advantage that is not needed to physically build the specific components, which can be really tedious and expensive.

One of the preferred techniques used in electromagnetic computation is the finite element method (FEM). Primarily because the implementation of the vector elements, also called edge-based which provide an advantage to other methods as they model in a very efficient way the nature of electromagnetic vectorial fields. In this PFC it's been done a first approach to the waveguide and transmission line analysis using FEM. For that, the classic problems have been analysed, as they ease the comprehension of the finite element method.

First is the analysis of TEM modes by the electrostatic problem as it presents an example of a deterministic problem, where the excitation of an structure it's been analyzed. The second is the homogeneous waveguide analysis, as it presents an eigenvalue problem, where no internal or external sources are involved. Using this formulation some structures with analytic solution have been analysed as well as some structures of interest, that can not be analysed without the use of some numerical method, like the Ridge and Double-Ridge waveguides. Lastly is the inhomogeneous problem, by reviewing two structures, the inhomogeneous rectangular waveguide and the microstrip line. In these problems a different formulation is needed. Using this formulation more interesting results like the dispersion curves can be obtained.

The FEniCS tool package it's been used to implement all the simulation. It is a free distribution software that implements high level instructions that performs all the basic FEM functions. In the simulation of more complex structures, the free distribution tool Gmsh it's been used. This tool it's able to create more the mesh with complex geometries, for them to be solved in an other FEM package, in our case FEniCS.

## **Key words**

Transmission line, finite element, inhomogeneous problem.

# Agradecimientos

Agradezco en primer lugar a mi tutor, Juan Córcoles, por el apoyo y la paciencia que me ha ofrecido en este proyecto. También a Jorge A. Ruiz por el material ofrecido que ha ayudado a completar este trabajo. Finalmente agradezco a mi familia por su apoyo.





# Índice general

<b>Índice de figuras</b>	<b>IX</b>
<b>Índice de cuadros</b>	<b>XII</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Motivación . . . . .	1
1.2. Objetivos . . . . .	1
1.3. Organización de la memoria . . . . .	2
<b>2. Principios teóricos y Estado del arte</b>	<b>3</b>
2.1. Ecuaciones características de las leyes electromagnéticas . . . . .	3
2.1.1. Las Ecuaciones de Maxwell . . . . .	3
2.1.2. Condiciones de contorno en campos electromagnéticos . . . . .	4
2.1.3. La ecuación de Helmholtz . . . . .	5
2.2. Medios de transmisión . . . . .	5
2.2.1. Solución general para las ondas electromagnéticas . . . . .	5
2.3. El método de los elementos finitos . . . . .	7
2.3.1. Procedimiento general FEM . . . . .	8
2.3.2. Condiciones de contorno en elementos finitos . . . . .	8
2.3.3. Tipos de elementos . . . . .	9
2.3.4. Software FEM . . . . .	9
<b>3. Modos TEM en medios cerrados y abiertos</b>	<b>11</b>
3.1. Problema determinístico electrostático . . . . .	11
3.2. Condiciones de contorno . . . . .	12
3.3. Resultados para estructuras con varios conductores . . . . .	13
<b>4. Medios cerrados con dieléctrico homogéneo</b>	<b>15</b>
4.1. Formulación escalar . . . . .	15
4.1.1. Ecuación de Helmholtz para la componente longitudinal . . . . .	15
4.1.2. Modos TE y TM según condiciones de contorno de la componente longitudinal . . . . .	17

4.2.	Formulación vectorial . . . . .	19
4.2.1.	Ecuación de Helmholtz para la componente transversal . . . . .	19
4.2.2.	Modos TE y TM según condiciones de contorno de la componente transversal	21
4.3.	Resultados: guías con solución analítica . . . . .	22
4.3.1.	Guía rectangular de prueba . . . . .	22
4.3.2.	Guía WR-90 . . . . .	30
4.3.3.	Guía circular en la banda X . . . . .	32
4.4.	Resultados: guías con solución numérica . . . . .	36
4.4.1.	Guía Ridge . . . . .	36
4.4.2.	Guía Double-Ridge . . . . .	41
<b>5.</b>	<b>Análisis general para medios cerrados multidieléctricos</b>	<b>49</b>
5.1.	Formulación general . . . . .	49
5.2.	Formulación simplificada para medios homogéneos . . . . .	52
5.3.	Modos según las condiciones de contorno . . . . .	53
5.3.1.	Condiciones de contorno en la formulación simplificada para medios ho- mogéneos . . . . .	53
5.3.2.	Condiciones de contorno en la formulación general . . . . .	53
5.4.	Resultados para guías homogéneas . . . . .	55
5.4.1.	Guía rectangular de prueba: formulación general vs simplificada . . . . .	55
5.4.2.	Guía WR-90 . . . . .	62
5.4.3.	Guía circular en la banda X . . . . .	64
5.4.4.	Guía Ridge . . . . .	68
5.4.5.	Guía Double-Ridge . . . . .	72
5.5.	Resultados para guías inhomogéneas . . . . .	77
<b>6.</b>	<b>Conclusiones y Trabajo futuro</b>	<b>83</b>
6.1.	Conclusiones . . . . .	83
6.2.	Trabajo futuro . . . . .	83
	<b>Glosario de acrónimos</b>	<b>85</b>
	<b>Bibliografía</b>	<b>86</b>
	<b>Presupuesto</b>	<b>I</b>
	<b>Pliego de condiciones</b>	<b>III</b>

# Índice de figuras

2.1. Esquema de dos medios de transmisión . . . . .	6
2.2. Elementos de Lagrange en dos dimensiones de orden uno, dos y tres. . . . .	9
2.3. Elementos de Nédélec en dos dimensiones de orden uno, dos y tres. . . . .	9
3.1. Mallado y potencial electrostático del cable coaxial. . . . .	13
3.2. Mallado y potencial electrostático de un cable sobre un plano de tierra. . . . .	14
3.3. Esquemas de las estructuras utilizadas para el análisis de modos TEM. . . . .	14
3.4. Resultados del coaxial aproximados junto a los calculados analíticamente. La línea de puntos corresponde a los valores aproximados mediante elementos finitos, la línea continua corresponde a los valores calculados analíticamente. . . . .	14
4.1. Mallados utilizados en la simulación de la guía rectangular . . . . .	22
4.2. Error relativo frente a los grados de libertad del problema al aumentar el orden del elemento. Los valores representados mediante cuadrados corresponden al mallado de 100 elementos, los valores representados mediante triángulos corresponden al mallado de 400 elementos. . . . .	23
4.3. Componente longitudinal del campo magnético del modo $TE_{10}$ . . . . .	23
4.4. Componente longitudinal del campo magnético del modo $TE_{20}$ . . . . .	24
4.5. Componente longitudinal campo magnético del modo $TE_{01}$ . . . . .	25
4.6. Componente longitudinal del campo eléctrico del modo $TM_{11}$ . . . . .	25
4.7. Error relativo frente a los grados de libertad del problema al aumentar el orden del elemento. Los valores representados mediante cuadrados corresponden al mallado de 100 elementos, los valores representados mediante triángulos corresponden al mallado de 400 elementos . . . . .	26
4.8. Componente transversal del campo eléctrico del modo $TE_{10}$ . . . . .	27
4.9. Componente transversal del campo eléctrico del modo $TE_{20}$ . . . . .	28
4.10. Componente transversal del campo eléctrico del modo $TE_{01}$ . . . . .	28
4.11. Componente transversal del campo magnético del modo $TM_{11}$ . . . . .	29
4.12. Componentes longitudinales del campo magnético en una guía tipo WR-90. . . . .	30
4.13. Componentes transversales del campo eléctrico en una guía tipo WR-90. . . . .	31
4.14. Mallados utilizados en la simulación de la guía circular . . . . .	32
4.15. Componente longitudinal, del campo magnético para los modos TE y del campo eléctrico para los modos TM, en una guía circular. . . . .	33

4.16. Componente transversal del campo eléctrico para los modos TE y del campo magnético para los modos TM, una guía circular. . . . .	35
4.17. Mallado de la guía Ridge utilizada en la simulación. . . . .	37
4.18. Esquema y dimensiones de la guía Ridge utilizada en la simulación. . . . .	37
4.19. Componente longitudinal, del campo magnético para los modos TE y del campo eléctrico para los modos TM, en una guía Ridge. . . . .	38
4.20. Componente transversal, del campo eléctrico para los modos TE y del campo magnético para los modos TM, en una guía Ridge. . . . .	40
4.21. Esquema y dimensiones de la guía Double-Ridge utilizada en la simulación. . . . .	41
4.22. Mallado utilizado en la simulación de la guía Double-Ridge. . . . .	41
4.23. Componente longitudinal, del campo magnético para los modos TE y del campo eléctrico para los modos TM, en una guía Double-Ridge. . . . .	42
4.24. Componente transversal, del campo eléctrico para los modos TE y del campo magnético para los modos TM, en una guía Double-Ridge. . . . .	46
5.1. Error relativo frente a los grados de libertad del problema al aumentar el orden del elemento. Los valores representados mediante cuadrados corresponden al mallado de 100 elementos, los valores representados mediante triángulos corresponden al mallado de 400 elementos. . . . .	55
5.2. Componente transversal del campo eléctrico del modo $TE_{10}$ . . . . .	56
5.3. Componente longitudinal del campo magnético modo $TE_{10}$ . . . . .	57
5.4. Componente transversal del campo eléctrico del modo $TE_{20}$ . . . . .	57
5.5. Componente longitudinal del campo magnético del modo $TE_{20}$ . . . . .	58
5.6. Componente transversal del campo eléctrico del modo $TE_{01}$ . . . . .	59
5.7. Componente longitudinal campo magnético del modo $TE_{01}$ . . . . .	59
5.8. Componente transversal del campo magnético del modo $TM_{11}$ . . . . .	60
5.9. Componente transversal del campo eléctrico del modo $TE_{11}$ . . . . .	61
5.10. Componente longitudinal del campo magnético del modo $TE_{11}$ . . . . .	61
5.11. Componentes longitudinales del campo magnético en una guía tipo WR-90. . . . .	63
5.12. Componentes transversales del campo eléctrico en una guía tipo WR-90. . . . .	63
5.13. Resultados para una guía circular sin imponer condiciones de contorno. Componente longitudinal del campo magnético para los modos TE y componente transversal del campo magnético para los modos TM. . . . .	65
5.14. Resultados para una guía circular cuando se imponen condiciones de contorno tipo Dirichlet. Componente transversal del campo eléctrico para los modos TE y componente longitudinal del campo eléctrico para los modos TM. . . . .	66
5.15. Resultados para una guía Ridge utilizando la formulación para el campo $\vec{H}$ . Componente longitudinal del campo magnético para los modos TE y componente transversal del campo magnético para los modos TM. . . . .	69
5.16. Resultados para una guía Ridge cuando se imponen condiciones de contorno tipo Dirichlet. Componente transversal del campo eléctrico para los modos TE y componente longitudinal del campo eléctrico para los modos TM. . . . .	71

5.17. Resultados para una guía Double-Ridge utilizando la formulación para el campo $\vec{H}$ . Componente longitudinal del campo magnético para los modos TE y componente transversal del campo magnético para los modos TM. . . . .	74
5.18. Resultados para una guía Double-Ridge utilizando la formulación para el campo $\vec{E}$ . Componente transversal del campo eléctrico para los modos TE y componente longitudinal del campo eléctrico para los modos TM. . . . .	75
5.19. Esquema de la guía rectangular vacía empleada en la simulación. . . . .	77
5.20. Esquema de la guía rectangular rellena hasta la mitad empleada en la simulación. . . . .	77
5.21. Esquema de la línea microstrip empleada en la simulación. . . . .	78
5.22. Curva de dispersión calculada para los cinco primeros modos de una guía rectangular vacía. . . . .	78
5.23. Curva de dispersión calculada para los cuatro primeros modos de una guía rectangular rellena de dieléctrico hasta la mitad. . . . .	79
5.24. Curva de dispersión calculada para los siete primeros modos de una línea microstrip. . . . .	79
5.25. Componente longitudinal del campo eléctrico del primer modo a diferentes frecuencias en la guía rectangular inhomogénea. . . . .	80
5.26. Componente transversal del campo eléctrico del primer modo a diferentes frecuencias en la guía rectangular inhomogénea. . . . .	81



# Índice de tablas

4.1. Resultados del número de onda de corte del modo $TE_{10}$ con valor analítico $\pi=3.14159265359 \text{ m}^{-1}$ . . . . .	23
4.2. Resultados del número de onda de corte del modo $TE_{20}$ con valor analítico $2\pi=6.28318530718 \text{ m}^{-1}$ . . . . .	24
4.3. Resultados del número de onda de corte del modo $TE_{01}$ con valor analítico $2\pi=6.28318530718 \text{ m}^{-1}$ . . . . .	24
4.4. Resultados del número de onda de corte del modo $TM_{11}$ con valor analítico $\sqrt{\pi^2 + 4\pi^2}=7.02481473104 \text{ m}^{-1}$ . . . . .	25
4.5. Resultados del número de onda de corte del modo $TE_{10}$ con valor analítico $\pi^2=3.14159265359 \text{ m}^{-1}$ . . . . .	26
4.6. Resultados del número de onda de corte del modo $TE_{20}$ con valor analítico $2\pi^2=6.28318530718 \text{ m}^{-1}$ . . . . .	27
4.7. Resultados del número de onda de corte del modo $TE_{01}$ con valor analítico $2\pi^2=6.28318530718 \text{ m}^{-1}$ . . . . .	27
4.8. Resultados del número de onda de corte del modo $TM_{11}$ con valor analítico $\sqrt{\pi^2 + 4\pi^2}=7.02481473104 \text{ m}^{-1}$ . . . . .	28
4.9. Resultados de las frecuencias de corte para una guía WR-90 utilizando la formulación escalar, cuyos valores analíticos son $6.5571\text{e}+09 \text{ Hz}$ para el modo $TE_{10}$ y $1.3114\text{e}+10 \text{ Hz}$ para el modo $TE_{20}$ . . . . .	30
4.10. Resultados de las frecuencias de corte para una guía WR-90 utilizando la formulación vectorial, cuyos valores analíticos son $6.5571\text{e}+09 \text{ Hz}$ para el modo $TE_{10}$ y $1.3114\text{e}+10 \text{ Hz}$ para el modo $TE_{20}$ . . . . .	31
4.11. Resultados de las frecuencias de corte para una guía circular utilizando la formulación escalar, cuyos valores analíticos son $7.3723\text{e}+09 \text{ Hz}$ para el modo $TE_{11}$ , $9.6308\text{e}+09 \text{ Hz}$ para el modo $TM_{01}$ y $1.223\text{e}+10 \text{ Hz}$ para el modo $TE_{21}$ . . . . .	33
4.12. Resultados de las frecuencias de corte para una guía circular utilizando la formulación vectorial, cuyos valores analíticos son $7.3723\text{e}+09 \text{ Hz}$ para el modo $TE_{11}$ , $9.6308\text{e}+09 \text{ Hz}$ para el modo $TM_{01}$ y $1.223\text{e}+10 \text{ Hz}$ para el modo $TE_{21}$ . . . . .	34
4.13. Resultados de las frecuencias de corte de los modos TE para una guía Ridge utilizando la formulación escalar. . . . .	36
4.14. Resultados de las frecuencias de corte de los modos TM para una guía Ridge utilizando la formulación escalar. . . . .	36
4.15. Resultados de las frecuencias de corte de los modos TE para una guía Ridge utilizando la formulación vectorial. . . . .	39
4.16. Resultados de las frecuencias de corte de los modos TM para una guía Ridge utilizando la formulación vectorial. . . . .	39

4.17. Resultados para una guía Double-Ridge utilizando la formulación escalar. . . . .	43
4.18. Resultados de las frecuencias de corte para una guía Double-Ridge utilizando la formulación escalar. . . . .	43
4.19. Resultados de las frecuencias de corte para una guía Double-Ridge utilizando la formulación escalar. . . . .	44
4.20. Resultados de las frecuencias de corte para una guía Double-Ridge utilizando la formulación escalar. . . . .	44
4.21. Resultados de las frecuencias de corte para una guía Double-Ridge utilizando la formulación vectorial. . . . .	45
4.22. Resultados de las frecuencias de corte para una guía Double-Ridge utilizando la formulación vectorial. . . . .	47
4.23. Resultados de las frecuencias de corte para una guía Double-Ridge utilizando la formulación vectorial. . . . .	47
4.24. Resultados de las frecuencias de corte para una guía Double-Ridge utilizando la formulación vectorial. . . . .	48
5.1. Resultados para el modo $TE_{10}$ con valor analítico $\pi=3.14159265359 m^{-1}$ , utilizando la formulación para el campo $\vec{E}$ . . . . .	55
5.2. Resultados para el modo $TE_{10}$ con valor analítico $\pi=3.14159265359 m^{-1}$ , utilizando la formulación para el campo $\vec{H}$ . . . . .	56
5.3. Resultados para el modo $TE_{20}$ con valor analítico $2\pi=6.28318530718 m^{-1}$ , utilizando la formulación para el campo $\vec{E}$ . . . . .	57
5.4. Resultados para el modo $TE_{20}$ con valor analítico $2\pi=6.28318530718 m^{-1}$ , utilizando la formulación para el campo $\vec{H}$ . . . . .	58
5.5. Resultados para el modo $TE_{01}$ con valor analítico $2\pi=6.28318530718 m^{-1}$ , utilizando la formulación para el campo $\vec{E}$ . . . . .	58
5.6. Resultados para el modo $TE_{01}$ con valor analítico $2\pi=6.28318530718 m^{-1}$ , utilizando la formulación para el campo $\vec{H}$ . . . . .	59
5.7. Resultados para el modo $TM_{11}$ con valor analítico $\sqrt{\pi^2 + 4\pi^2}=7.02481473104 m^{-1}$ , utilizando la formulación para el campo $\vec{E}$ . . . . .	60
5.8. Resultados para el modo $TE_{11}$ con valor analítico $\sqrt{\pi^2 + 4\pi^2}=7.02481473104 m^{-1}$ , utilizando la formulación para el campo $\vec{E}$ . . . . .	60
5.9. Resultados para el modo $TE_{11}$ con valor analítico $\sqrt{\pi^2 + 4\pi^2}=7.02481473104 m^{-1}$ , utilizando la formulación para el campo $\vec{H}$ . . . . .	61
5.10. Resultados de las frecuencias de corte para una guía WR-90, cuyos valores analíticos son $6.5571e+09 Hz$ para el modo $TE_{10}$ y $1.3114e+10 Hz$ para el modo $TE_{20}$ , utilizando la formulación para el campo $\vec{H}$ . . . . .	62
5.11. Resultados de las frecuencias de corte para una guía WR-90,, cuyos valores analíticos son $6.5571e+09 Hz$ para el modo $TE_{10}$ y $1.3114e+10 Hz$ para el modo $TE_{20}$ , utilizando la formulación para el campo $\vec{E}$ . . . . .	62
5.12. Resultados de las frecuencias de corte para una guía circular, cuyos valores analíticos son $7.3723e+09 Hz$ para el modo $TE_{11}$ , $9.6308e+09 Hz$ para el modo $TM_{01}$ y $1.223e+10 Hz$ para el modo $TE_{21}$ , utilizando la formulación para el campo $\vec{H}$ . . . . .	64



5.13. Resultados de las frecuencias de corte para una guía circular, cuyos valores analíticos son $7.3723e+09 \text{ Hz}$ para el modo $TE_{11}$ , $9.6308e+09 \text{ Hz}$ para el modo $TM_{01}$ y $1.223e+10 \text{ Hz}$ para el modo $TE_{21}$ , utilizando la formulación para el campo $\vec{E}$ .	67
5.14. Resultados de las frecuencias de corte de los modos TE para una guía Ridge, utilizando la formulación para el campo $\vec{H}$ .	68
5.15. Resultados de las frecuencias de corte de los modos TM para una guía Ridge, utilizando la formulación para el campo $\vec{H}$ .	68
5.16. Resultados de las frecuencias de corte de los modos TE para una guía Ridge, utilizando la formulación para el campo $\vec{E}$ .	70
5.17. Resultados de las frecuencias de corte de los modo TM para una guía Ridge, utilizando la formulación para el campo $\vec{E}$ .	70
5.18. Resultados de las frecuencias de corte para una guía Double-Ridge, utilizando la formulación para el campo $\vec{H}$ .	72
5.19. Resultados de las frecuencias de corte para una guía Double-Ridge, utilizando la formulación para el campo $\vec{H}$ .	73
5.20. Resultados de las frecuencias de corte para una guía Double-Ridge, utilizando la formulación para el campo $\vec{E}$ .	73
5.21. Resultados de las frecuencias de corte para una guía Double-Ridge, utilizando la formulación para el campo $\vec{E}$ .	76



# 1

## Introducción

### 1.1. Motivación

Las ecuaciones de Maxwell, tanto en su forma diferencial como en su forma integral, describen todos los fenómenos electromagnéticos. Estas ecuaciones se pueden resolver de forma analítica para medios de transmisión homogéneos con geometría canónica (rectangular, circular, coaxial) y de forma cuasi-analítica para algunos medios inhomogéneos (varios materiales dieléctricos) cerrados e incluso abiertos.

Sin embargo, en el caso más general de guías con geometrías arbitrarias y varios materiales dieléctricos, como las guías de tipo Ridge o las fibras ópticas de varias capas, se requiere el uso de un método numérico para su resolución. Estos medios de transmisión son de especial importancia debido a diversos motivos. Por ejemplo, las guías rellenas de dieléctrico permiten miniaturizar dispositivos y, en caso de realizar adaptación de impedancias, en ocasiones se requiere el uso de guías parcialmente rellenas de dieléctrico; las fibras ópticas de índice de refracción gradual reducen la dispersión en los sistemas de comunicaciones ópticas; guías de onda tipo Ridge y Double-Ridge se utilizan en sistemas donde se requiere más ancho de banda monomodo del que proporcionan las guías rectangulares y las guías circulares.

El método numérico conocido como elementos finitos (Finite Element Method - FEM) es uno de los métodos más utilizados para resolver numéricamente problemas que incluyan ecuaciones diferenciales y, en electromagnetismo, problemas que deriven de las ecuaciones diferenciales de Maxwell ya que permite el uso de elementos vectoriales, los cuales son especialmente útiles para calcular campos vectoriales como los electromagnéticos. Del mismo modo el uso de los elementos finitos ha crecido en muchos campos de la ingeniería ya que permite el uso de herramientas externas para crear geometrías complicadas. En este proyecto de fin de carrera se pretende realizar un acercamiento a las técnicas de computación electromagnéticas ya que son las principales herramientas para analizar y diseñar componentes de radiofrecuencia en la actualidad.

### 1.2. Objetivos

El objetivo de este proyecto de fin de carrera es analizar el comportamiento de algunos medios de transmisión, homogéneos e inhomogéneos cerrados utilizando el método de elementos finitos en su versión bidimensional (FEM-2D). También se estudiará el análisis de medios de transmisión

abiertos, aplicado a casos sencillos electrostáticos.

Para ello se utilizará el paquete FEniCS [1], ya que implementa funciones de alto nivel que realizan las funciones básicas del método FEM. Para el análisis de geometrías complejas (Ridge y Double-Ridge) se utilizará el paquete Gmsh [2] que permite realizar mallados en elementos finitos de geometrías complejas de manera sencilla.

### **1.3. Organización de la memoria**

La siguiente memoria está dividida en seis capítulos. En este primer capítulo se ha expuesto la motivación y los objetivos que se han seguido en este proyecto. En el segundo capítulo se presentan las bases electromagnéticas necesarias para la comprensión de la memoria así como una introducción de método de elementos finitos. En el tercer capítulo se presenta la formulación escalar para problemas determinísticos aplicado a problemas electrostáticos cerrados y abiertos. En el cuarto capítulo se presenta las formulaciones escalares y vectoriales para los problemas de autovalores que surgen en el análisis de guías homogéneas. En el quinto capítulo se presenta la formulación inhomogénea y la formulación general. En el sexto y último capítulo se recogen las conclusiones y el trabajo futuro.

# 2

## Principios teóricos y Estado del arte

### 2.1. Ecuaciones características de las leyes electromagnéticas

#### 2.1.1. Las Ecuaciones de Maxwell

El siguiente conjunto de ecuaciones,

$$\nabla \times \vec{\mathcal{E}} = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{\mathcal{B}} - \vec{\mathcal{M}} \quad (2.1a)$$

$$\nabla \times \vec{\mathcal{H}} = \frac{\partial}{\partial t} \vec{\mathcal{D}} + \vec{\mathcal{J}} \quad (2.1b)$$

$$\nabla \cdot \vec{\mathcal{D}} = \rho \quad (2.1c)$$

$$\nabla \cdot \vec{\mathcal{B}} = 0 \quad (2.1d)$$

se denominan las ecuaciones de Maxwell en forma diferencial. Siendo  $\vec{\mathcal{E}}$  el campo eléctrico con unidades  $V/m$ ,  $\vec{\mathcal{H}}$  el campo magnético con unidades  $A/m$ ,  $\vec{\mathcal{D}}$  la densidad de flujo eléctrico con unidades  $Coul/m^2$ ,  $\vec{\mathcal{B}}$  la densidad de flujo magnético con unidades  $Weber/m^2$ ,  $\vec{\mathcal{M}}$  la densidad de corriente magnética con unidades  $V/m^2$ ,  $\vec{\mathcal{J}}$  la densidad de corriente eléctrica con unidades  $A/m^2$  y  $\rho$  la densidad de carga eléctrica con unidades  $Coul/m^3$ , utilizando el Sistema Internacional. Junto a estas ecuaciones, en presencia de un medio lineal, las densidades de flujo, eléctrico y magnético, están relacionadas a los campos de la siguiente manera,

$$\vec{\mathcal{B}} = \mu \vec{\mathcal{H}} \quad (2.2a)$$

$$\vec{\mathcal{D}} = \epsilon \vec{\mathcal{E}} \quad (2.2b)$$

Donde  $\mu$  la constante de permeabilidad magnética del medio y  $\epsilon$  la constante de permitividad eléctrica del medio. Si suponemos una dependencia temporal del tipo armónico se puede utilizar la notación fasorial  $\vec{\mathcal{E}}(x, y, z, t) = Re[\vec{E}(x, y, z)e^{j\omega t}]$ , con lo que se puede suprimir el término  $e^{j\omega t}$ , y sustituir la derivada parcial  $\partial/\partial t$  por el término  $j\omega t$ , donde  $\omega$  es la frecuencia en radianes. Utilizando la notación fasorial en las corrientes y flujos, eléctrico y magnético,  $\vec{\mathcal{E}}(x, y, z, t) = Re[\vec{E}(x, y, z)e^{j\omega t}]$ ,  $\vec{\mathcal{B}}(x, y, z, t) = Re[\vec{B}(x, y, z)e^{j\omega t}]$ ,  $\vec{\mathcal{M}}(x, y, z, t) =$

$Re[\vec{M}(x, y, z)e^{j\omega t}]$ ,  $\vec{\mathcal{H}}(x, y, z, t) = Re[\vec{H}(x, y, z)e^{j\omega t}]$ ,  $\vec{\mathcal{D}}(x, y, z, t) = Re[\vec{D}(x, y, z)e^{j\omega t}]$ ,  $\vec{\mathcal{J}}(x, y, z, t) = Re[\vec{J}(x, y, z)e^{j\omega t}]$  se obtienen las ecuaciones de Maxwell en forma fasorial,

$$\nabla \times \vec{E} = -j\omega\mu\vec{H} - \vec{M} \quad (2.3a)$$

$$\nabla \times \vec{H} = j\omega\epsilon\vec{D} + \vec{J} \quad (2.3b)$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho \quad (2.3c)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (2.3d)$$

Donde se ha aplicado la relación entre la densidad de flujo y el campo 2.2.

### 2.1.2. Condiciones de contorno en campos electromagnéticos

#### Paredes de conductor perfecto

En una región donde se encuentra un cambio de medio entre dieléctrico y un conductor perfecto, todas las componentes del campo son nulas dentro del conductor. Esto se debe a que la profundidad de penetración del campo,  $\delta_s$ , tiende a cero cuando la conductividad,  $\sigma$ , tiende a infinito,  $\delta_s = \sqrt{2/\mu\omega\sigma}$  [3]. Si además se asume que  $M_s = 0$ , aplicable si la pared de conductor perfecto está en toda la superficie del contorno, se obtiene la siguiente condición de contorno para los campos,

$$\hat{n} \times \vec{E} = 0 \quad (2.4a)$$

$$\hat{n} \times \vec{H} = \vec{J}_s \quad (2.4b)$$

$$\hat{n} \cdot \vec{D} = \rho_s \quad (2.4c)$$

$$\hat{n} \cdot \vec{B} = 0 \quad (2.4d)$$

donde  $\rho_s$  y  $\vec{J}_s$  representan la densidad de carga y la densidad de flujo eléctrico superficiales y  $\hat{n}$  el vector unitario que apunta hacia afuera del conductor.

#### Pared magnética

La pared magnética es el análogo al campo magnético, de la pared conductora perfecta al campo eléctrico. Como indica [3], la pared magnética no existe en la practica pero es muy útil a la hora de realizar simplificaciones, como introducir simetrías para reducir el peso computacional.

$$\hat{n} \times \vec{E} = -\vec{M}_s \quad (2.5a)$$

$$\hat{n} \times \vec{H} = 0 \quad (2.5b)$$

$$\hat{n} \cdot \vec{D} = 0 \quad (2.5c)$$

$$\hat{n} \cdot \vec{B} = 0 \quad (2.5d)$$

donde  $\vec{M}_s$  representa la densidad de flujo magnético superficial.

### 2.1.3. La ecuación de Helmholtz

En una región homogénea, libre de fuentes e isotrópica, de las ecuaciones de Maxwell en forma fasorial obtenemos:

$$\nabla \times \vec{E} = -j\omega\mu\vec{H} \quad (2.6a)$$

$$\nabla \times \vec{H} = j\omega\epsilon\vec{E} \quad (2.6b)$$

Las expresiones anteriores forman un sistema de ecuaciones con dos incógnitas que puede resolverse tanto para  $\vec{E}$  como para  $\vec{H}$ . Tomando el rotacional de 2.6a y usando 2.6b obtenemos:

$$\nabla \times \nabla \times \vec{E} = \omega^2\mu\epsilon\vec{E} \quad (2.7)$$

que es una ecuación para  $\vec{E}$ . Podemos simplificar este resultado a través de la identidad vectorial

$$\nabla \times \nabla \times \vec{A} = \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2\vec{A}, \quad (2.8)$$

que es válida para las componentes de un vector arbitrario  $\vec{A}$ . Aplicando la identidad anterior a 2.7 y teniendo en cuenta que  $\nabla \cdot \vec{E} = 0$  en una región libre de fuentes, podemos escribir 2.7 como,

$$\nabla^2\vec{E} + \omega^2\mu\epsilon\vec{E} = 0 \quad (2.9)$$

Esta ecuación se denomina la ecuación de onda o la ecuación de Helmholtz para el campo  $\vec{E}$ . De manera análoga se puede aplicar el procedimiento anterior al campo magnético para obtener:

$$\nabla^2\vec{H} + k^2\vec{H} = 0, \quad (2.10)$$

donde se define  $k = \omega\sqrt{\mu\epsilon}$  como la *constante de propagación del medio*, (también llamada constante de fase o número de onda) con unidades  $1/m$ .

## 2.2. Medios de transmisión

### 2.2.1. Solución general para las ondas electromagnéticas

Resolviendo la ecuación de Helmholtz para el caso particular de un medio de transmisión de sección transversal constante, como los que aparecen en la figura 2.1, se obtienen los campos electromagnéticos que se propagan dentro de ese medio. Para ello es necesario tener en cuenta las características de cada medio, en cuanto a su geometría, el número de conductores que lo forman y las características del dieléctrico del medio. Como se indica en la literatura electromagnética, como [3] y [4], las ondas electromagnéticas que se propagan por los medios de transmisión se pueden clasificar en ondas transversales electromagnéticas (TEM), transversales eléctricas (TE), transversales magnéticas (TM) e híbridas.

#### Ondas TEM

Las ondas transversales electromagnéticas aparecen en medios de transmisión con más de un conductor y se caracterizan porque la componente en la dirección de propagación de los campos eléctrico y magnético es nula. Teniendo esto en cuenta se obtiene que en ondas TEM, cada una de las componentes transversales de los campos eléctrico y magnético cumplen la ecuación de Laplace,

$$\nabla_t^2\vec{E} = 0, \quad (2.11)$$

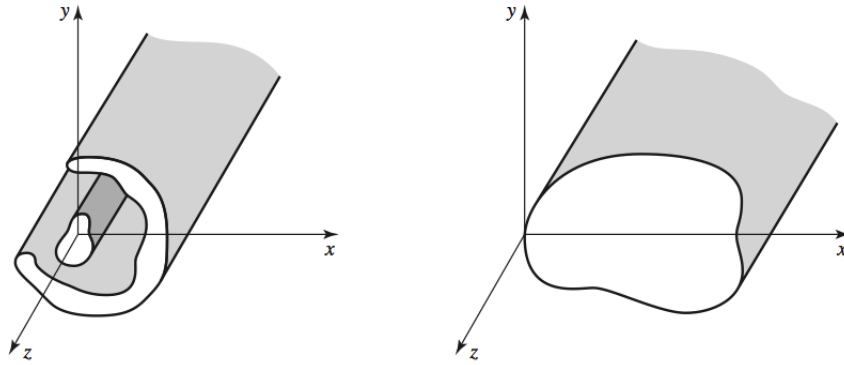


Figura 2.1: Esquema de dos medios de transmisión, el primero formado por dos conductores, uno de ellos abierto, y el segundo formado por un conductor cerrado. Imagen obtenida de [3].

$$\nabla_t^2 \vec{H} = 0. \quad (2.12)$$

Como indica [3], esto también implica que se puede obtener el campo eléctrico a partir del potencial electrostático,

$$\vec{E} = -\nabla_t \Phi, \quad (2.13)$$

y que podemos calcular el potencial electrostático resolviendo la ecuación de Laplace,

$$\nabla_t^2 \Phi = 0. \quad (2.14)$$

## Ondas TE y TM

En ondas transversales eléctricas (TE) la componente en la dirección de propagación es nula para el campo eléctrico. En ondas transversales magnéticas (TM) la componente en la dirección de propagación es nula para el campo magnético.

Este tipo de ondas son las únicas que se propagan en medios de transmisión con un solo conductor y dieléctrico homogéneo, como las guías de onda rellenas de dieléctrico homogéneo.

Para calcular los campos electromagnéticos de las ondas TE y TM no se puede aplicar el mismo método que para las ondas TEM, para calcularlos es necesario resolver la ecuación de Helmholtz aplicando las condiciones de contorno propias de cada estructura. La ecuación de onda no resuelve en una solución única, sino en infinitas soluciones que dan lugar a infinitos modos de propagación.

## Ondas Híbridas

Las ondas híbridas aparecen en medios de transmisión como las fibras ópticas (guías circulares dieléctricas) o en una guía onda rellena de dieléctrico de manera inhomogénea. Aparecen debido a que algunas estructuras no permiten que las ondas sean TE o TM sino una combinación de ambas [5]. En las ondas híbridas, ninguna de las componentes de los campos electromagnéticos es nula, excepto en algunos casos, en la frecuencia en la que empieza a propagarse la onda, denominada frecuencia de corte. A esta frecuencia una de las ondas, TE o TM, domina frente a la otra, anulándose la componente en la dirección de propagación del campo eléctrico (si domina la onda TE) o del campo magnético (si domina la onda TM). Por ello los modos híbridos se denominan híbridos EH (si domina el campo magnético) e híbridos HE (si domina el campo eléctrico).



## 2.3. El método de los elementos finitos

El método de elementos finitos, *finite element method* en inglés o método FEM, es uno de los métodos numéricos más utilizados para resolver numéricamente ecuaciones en derivadas parciales (EDP). Al igual que otros métodos numéricos, se basa en transformar un problema con valor en el contorno, es decir, una ecuación en derivadas parciales junto a unas condiciones de contorno, en un sistema de ecuaciones lineales [4].

Una referencia histórica de los avances del método se puede encontrar en [4]. El método se propuso por primera vez por Courant en 1943 para resolver problemas variacionales en teoría potencial, y más tarde fue desarrollado y aplicado a problemas de análisis estructural. La primera aplicación del método para resolver problemas electromagnéticos fue realizada por Silvester en 1969 analizando la propagación en una guía de onda vacía. En 1974, Mei implementó una técnica para combinar elementos finitos con expansión de autofunciones para trabajar con problemas con regiones abiertas para analizar los campos en antenas y problemas de dispersión. En 1982 Marin desarrolló un método alternativo que combina el método FEM y una ecuaciones integral en el borde para resolver problemas de dispersión con regiones abiertas. Un salto importante en el análisis de campos electromagnéticos vectoriales se produjo en 1980, con el desarrollo de los elementos vectoriales de borde (*edge-based elements*). Estos elementos modelan de forma precisa el comportamiento de los campos eléctrico y magnético y elimina problemas relacionados con el uso de elementos escalares basados en nodos (*node-based elements*). Desde el desarrollo de estos elementos vectoriales el método FEM se ha convertido en una potente técnica para la computación numérica de problemas electromagnéticos. En la actualidad FEM es uno de los métodos más utilizados en el diseño de antenas y componentes en microondas.

El método FEM, aplicado a los problemas electromagnéticos, se puede realizar siguiendo dos técnicas diferentes: a través de análisis variacional o mediante la ponderación de residuos [6]. Ambos comienzan con la forma diferencial de las ecuaciones de Maxwell. El primero encuentra la forma variacional cuyo mínimo corresponde con la solución de la EDP, sujeta a unas condiciones de contorno. La segunda comienza con las ecuaciones de Maxwell e introduce un residuo ponderado, qué, utilizando el teorema de Green, el operador diferencial se *desplaza* a la función de ponderación. Los dos procedimientos resultan en el mismo resultado para la mayoría de las EDPs.

En el análisis con FEM se pueden resolver dos tipos de problemas, problemas de autovalores y problemas determinísticos.

Los problemas sin ningún tipo de fuente, interna o externa pertenecen a los problemas de autovalores. Un ejemplo clásico son las cavidades resonantes. Mediante éste análisis obtenemos las frecuencias resonantes y su distribución de los campos asociados dentro de la cavidad. Se debe tener en cuenta que el análisis de autovalores no se realiza en el dominio de la frecuencia ni en el tiempo sino más bien en el dominio de los autovalores, donde, usando transformaciones, es posible introducir la frecuencia de trabajo en la simulación, como en el caso de las curvas de dispersión en una guía de onda.

Los problemas determinísticos que se analizan en FEM involucran una fuente, donde, mediante FEM obtenemos la respuesta de la estructura a esa excitación. En este análisis se incluyen multitud de aplicaciones en radiofrecuencia, como son el análisis de antenas, radar cross section, análisis de circuitos en microondas y análisis de estructuras periódicas.

En este proyecto se han resuelto problemas determinísticos, en el caso del problema del potencial electrostático para cálculo de modos TEM, y problemas de autovalores en la simulación de guías de onda y línea microstrip apantallada.

### 2.3.1. Procedimiento general FEM

1. Preprocesado: subdividir la región en elementos finitos.
2. Crear las matrices de los elementos: determinado por la ecuación variacional del problema.
3. Ensamblar las matrices globales
4. Resolución del sistema de ecuaciones
5. Postprocesado

#### Preprocesado

En la fase de preprocesado se crea el mallado sobre la región de estudio. Este mallado subdivide el dominio en un conjunto de elementos no solapados y contiene la información de las coordenadas de los nodos de los elementos (los vértices) así como la conexión entre los elementos mediante una numeración global.

#### Crear las matrices de los elementos

En la siguiente fase se ha de obtener la forma variacional de la ecuación en derivadas parciales y la ecuación variacional matricial en cada elemento, identificando el tipo de elemento finito (la familia de funciones base) más conveniente según la ecuación en derivadas parciales que se quiera resolver.

#### Ensamblar las matrices globales

Después de aplicar las condiciones de contorno a cada elemento, dependiendo de su situación en el mallado, el sistema de matrices de cada elemento se ensambla en el sistema matricial global, siguiendo la numeración global que indica el mallado.

#### Resolución del sistema de ecuaciones

Una vez se obtiene el sistema matricial global y, habiendo aplicado las condiciones de contorno, se resuelve el sistema de ecuaciones lineales o el problema de autovalores, donde se obtiene el conjunto de coeficientes que, aplicado a la base de funciones, para cada elemento del mallado, aproxima la ecuación diferencial en el dominio de cálculo.

#### Postprocesado

La fase de postprocesado depende en gran medida del problema a resolver. En ésta fase se engloban las operaciones que sean necesarias para obtener la información de interés, como representaciones gráficas y operaciones matemáticas (integración y derivación, etc.).

### 2.3.2. Condiciones de contorno en elementos finitos

En general, en elementos finitos se pueden aplicar tres tipos de condiciones de contorno, Dirichlet, Neumann y Robin [1]. Las condiciones tipo Dirichlet, Neumann y Robin vienen dadas por las siguientes expresiones,

$$u = u_0 \text{ en } \Omega_D \tag{2.15}$$

$$-\frac{\partial u}{\partial n} = g \text{ en } \Omega_N \quad (2.16)$$

$$-\frac{\partial u}{\partial n} = p(u - q) \text{ en } \Omega_R \quad (2.17)$$

donde  $u$  es la función desconocida,  $u_0$ ,  $g$ ,  $p$ ,  $q$  son constantes,  $\partial u/\partial n$  es la derivada normal en el contorno y  $\Omega_D$ ,  $\Omega_N$  y  $\Omega_R$  es el borde del dominio donde se aplica una condición tipo Dirichlet, Neumann y Robin, respectivamente.

### 2.3.3. Tipos de elementos

El tipo de elemento a utilizar, para resolver un problema mediante FEM, viene determinado por el tipo de problema que se quiere resolver. Debido a que el método de elementos finitos se puede aplicar a problemas de naturalezas muy diversas, se han desarrollado un gran número de elementos que, permiten o facilitan, la resolución de los problemas mediante FEM.

Aplicando FEM a problemas electromagnéticos se utilizan dos tipos de elementos, los elementos de Lagrange y los elementos vectoriales.

Los elementos de Lagrange se basan en funciones polinómicas y se utilizan para aproximar funciones escalares. En la figura 2.2 se muestra un elemento de Lagrange de orden uno, dos y tres, obtenida de [1]. Los elementos vectoriales, también conocidos como *edge-based elements* o elementos de Nédélec se basan en funciones vectoriales y se utilizan para aproximar funciones vectoriales. En la figura 2.3 se muestra un elemento vectorial de orden uno, dos y tres, obtenida de [1]. Estos elementos simplifican el cálculo de campos vectoriales electromagnéticos ya que, debido a su naturaleza vectorial tangencial a las caras de los elementos, facilitan la aplicación de las condiciones de contorno.

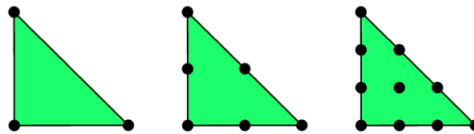


Figura 2.2: Elementos de Lagrange en dos dimensiones de orden uno, dos y tres. Imagen obtenida de [1].

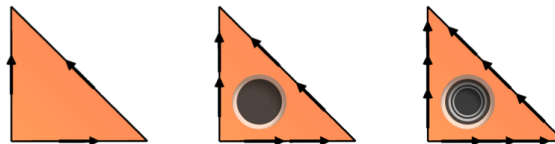


Figura 2.3: Elementos de Nédélec en dos dimensiones de orden uno, dos, y tres. Imagen obtenida de [1].

### 2.3.4. Software FEM

Para la aplicación del método FEM se ha utilizado FEniCS [1], un paquete de herramientas de software libre y de reciente desarrollo, que facilita en gran medida la tarea de programación, gracias al conjunto de funciones de alto nivel que implementan todas las etapas de la resolución de un problema en FEM.

En [7] se estudian algunas ventajas y desventajas que presenta el entorno FEniCS para la resolución de problemas electromagnéticos. Como indica, el paquete no permite el uso de números complejos, que están involucrados en gran parte de la formulación electromagnética. Aun así,

el paquete incluye elementos vectoriales, entre otros muchos elementos, lo que supone una gran ventaja frente a otros paquetes.

El software FEniCS permite realizar mallados de geometrías sencillas como rectángulos y círculos, sin embargo, para obtener los mallados de geometrías complejas se requiere el uso de otras herramientas como Gmsh [2]. Mediante esta herramienta se han realizado los mallados de las guías tipo Ridge, Double-Ridge y de las estructuras para el análisis de modos TEM.

# 3

## Análisis de modos TEM en medios cerrados y abiertos

### 3.1. Problema determinístico electrostático

Como se ha indicado en la sección 2.2.1, en medios de transmisión con más de un conductor se puede obtener el campo eléctrico a través del potencial eléctrico,  $\Phi$ , ya que cumple que,

$$\vec{E} = -\nabla_t \Phi. \quad (3.1)$$

Para ello se tiene que cumplir que el rotacional de  $\vec{E}$  se anule, lo que se puede comprobar teniendo en cuenta que en modos TEM  $\nabla_t \times \vec{E} = -j\omega H_z \hat{z} = 0$ . Como indica [3], debido a que  $\nabla \cdot \vec{D} = \epsilon \nabla_t \cdot \vec{E} = 0$ , el potencial electrostático también cumple la ecuación de Laplace,

$$\nabla_t^2 \Phi = 0. \quad (3.2)$$

Para resolver esta ecuación mediante el método de elementos finitos, primero hemos de formular las expresión anterior en forma variacional. Para ello, primero se debe multiplicar por una función test, integrar en todo el dominio de cálculo e integrar por partes los términos con segundas derivadas. Multiplicando por una función test e integrando, la ecuación de Laplace del potencial eléctrico obtenemos como resultado:

$$\int_{\Omega} T_s \nabla_t^2 \Phi ds = 0 \quad (3.3)$$

Aplicando integración por partes al término con derivadas segundas obtenemos:

$$\int_{\Omega} T_s \nabla_t^2 \Phi ds = \int_{\Omega} \nabla_t T_s \cdot \nabla_t \Phi ds + \int_{\partial\Omega} T_s \frac{\partial \Phi}{\partial n} dl = 0. \quad (3.4)$$

Donde el término  $\partial\Phi/\partial n$  es la derivada parcial de  $\Phi$  en la dirección normal y hacia afuera del contorno. Este término se anula, como indica [8], ya que se fuerza a la función test a anularse en el contorno. Por lo tanto el último término de la expresión anterior no se incluye en la forma final,

$$\int_{\Omega} \nabla_t T_s \cdot \nabla_t \Phi ds = 0. \quad (3.5)$$

La expresión anterior se puede reescribir como una ecuación variacional, es decir:

$$a(\Phi, T_s) = L(T_s), \quad (3.6)$$

donde

$$a(\Phi, T_s) = \int_{\Omega} \nabla_t T_s \cdot \nabla_t \Phi ds, \quad (3.7)$$

$$L(T_s) = 0. \quad (3.8)$$

En elementos finitos se conoce a  $a(\Phi, T_s)$  como la *forma bilineal*, donde debemos agrupar los términos que contengan la función desconocida, en nuestro caso  $\Phi$ , y  $L(T_s)$  recibe el nombre de la *forma lineal*, donde se agrupan los términos que solo incluyen la función test.

Aplicando una discretización al potencial eléctrico de la forma  $\Phi = \sum_i \Phi_i \alpha_i$  y utilizando funciones test del mismo tipo a las empleadas para la discretización,  $T_s = \alpha_j$ , se obtiene la expresión para cada elemento,

$$\sum_i \Phi_i \int_{\Delta} \nabla_t \alpha_j \cdot \nabla_t \alpha_i ds = 0 \quad (3.9)$$

donde  $\Delta$  representa la superficie de un elemento. Expresando en forma matricial,

$$[A_{el}][\Phi] = [L_{el}] \quad (3.10)$$

donde

$$[A_{el}] = \int_{\Delta} \nabla_t \alpha_j \cdot \nabla_t \alpha_i ds \quad (3.11)$$

$$[L_{el}] = 0. \quad (3.12)$$

Las matrices  $[A_{el}]$  y  $[L_{el}]$  se evalúan en cada elemento para ensamblarse en el sistema matricial global,

$$[A][\Phi] = [L] \quad (3.13)$$

para cuya resolución es necesario primero aplicar las condiciones de contorno necesarias, y mediante el cual, se obtiene la solución aproximada del potencial electrostático  $\Phi$ .

## 3.2. Condiciones de contorno

Las condiciones de contorno que se aplican en el problema electrostático pueden ser de dos tipos, dependiendo de la estructura que se está resolviendo.

En estructuras cerradas, donde el borde del dominio son las paredes conductoras, las condiciones de contorno serán tipo Dirichlet  $\Phi = \Phi_i$ , siendo  $\Phi_i$  el potencial en cada conductor.

Como indica [7], en estructuras abiertas se requiere aplicar condiciones mixtas Dirichlet y Robin. Utilizando este procedimiento se simula una pared absorbente que aproxima el comportamiento en espacio abierto mediante la condición de contorno tipo Robin. En las paredes conductoras se aplican las mismas condiciones de contorno tipo Dirichlet que en el caso cerrado,  $\Phi = \Phi_i$ , siendo  $\Phi_i$  el potencial en cada conductor.

Para aplicar las condiciones de contorno tipo Robin es necesario incluirlas en la ecuación variacional, de la siguiente manera,

$$a(\Phi, T_s) = \int_{\Omega} \nabla_t T_s \cdot \nabla_t \Phi ds + \int_{\Omega_R} p T_s \Phi dl, \quad (3.14)$$

$$L(T_s) = 0 - \int_{\Omega_R} pq T_s ds \quad (3.15)$$

Donde  $\Omega$  representa el dominio de cálculo y  $\Omega_R$  representa la pared Robin. Empleando la discretización del potencial como en el caso del conductor cerrado,  $\Phi = \sum_i \Phi_i \alpha_i$  y utilizando el mismo tipo de funciones test que las empleadas en la discretización,  $T_s = \alpha_j$ , se obtiene el sistema matricial en cada elemento,

$$[A_{el}][\Phi] = [L_{el}] \quad (3.16)$$

donde

$$[A_{el}] = \int_{\Delta} \nabla_t \alpha_j \cdot \nabla_t \alpha_i ds + \int_{\Delta_R} p \alpha_j \alpha_i dl, \quad (3.17)$$

$$[L_{el}] = 0 - \int_{\Delta_R} pq \alpha_j ds. \quad (3.18)$$

Una vez evaluadas las matrices  $[A_{el}]$  y  $[L_{el}]$  en cada elemento, se ensambla el sistema matricial completo,

$$[A][\Phi] = [L] \quad (3.19)$$

mediante el cual se obtiene la solución aproximada del potencial electrostático  $\Phi$ .

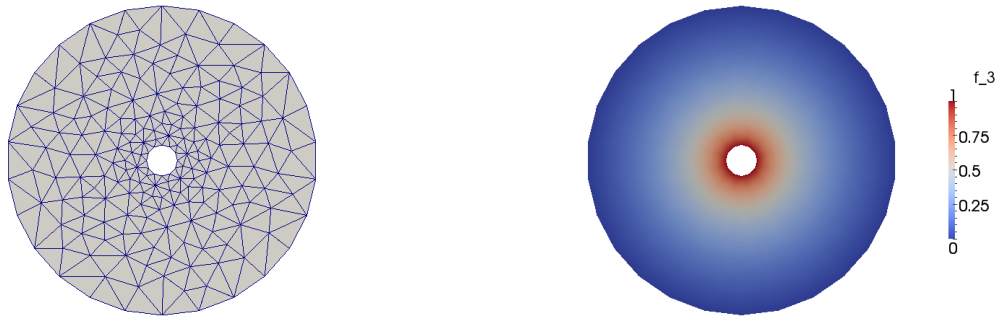
### 3.3. Resultados para estructuras con varios conductores

Se han comprobado los resultados obtenidos simulando el potencial electrostático dentro de un cable coaxial, como ejemplo de estructura cerrada. Se ha utilizado el mallado de la figura 3.1a, cuyo radio del conductor interior mide  $0.1 \text{ m}$  y el radio del conductor exterior  $1 \text{ m}$ , para comparar los resultados con los obtenidos en [7]. En la figura 3.1b se muestra la aproximación del potencial electrostático en una sección del cable coaxial.

Como ejemplo de estructura abierta se ha calculado el potencial en un cable de  $0.1 \text{ m}$  de radio sobre un plano de masa a una altura de  $0.4 \text{ m}$ , en la figura 3.2a se muestra el mallado empleado en la simulación de un cable sobre un plano de tierra, en la figura 3.2b se muestra la aproximación del potencial electrostático para esta estructura.

En la figura 3.3a se representa la configuración del cable coaxial empleada en la simulación, con el conductor interior conectado a una fuente de  $1V$  y el conductor exterior conectado a masa.

En la figura 3.3b se representa la configuración del cable sobre el plano conductor empleada en la simulación, con el cable conectado a una fuente de  $1V$  y el plano conductor conectado a masa.



(a) Mallado de una sección transversal del cable coaxial      (b) Potencial eléctrico dentro del coaxial coaxial

Figura 3.1: Mallado y potencial electrostático del cable coaxial.

En la figura 3.4 se contrastan estos resultados del cable coaxial con los valores analíticos, utilizando la siguiente expresión,

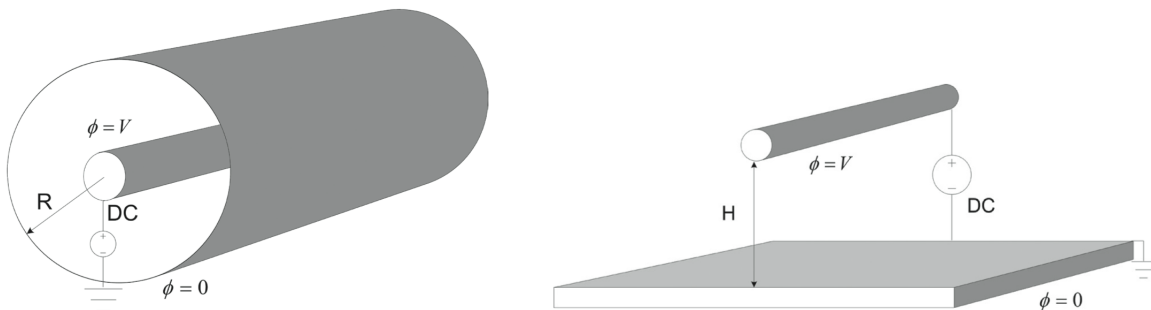
$$\Phi(r) = V_o \frac{\ln(b/r)}{\ln(b/a)}$$

siendo  $b$  el radio interior del conductor exterior,  $a$  el radio exterior del conductor interior y  $r$  el radio en el interior del coaxial.



(a) Mallado de una sección transversal de un cable sobre un plano de tierra (b) Potencial eléctrico de un cable sobre un plano de tierra

Figura 3.2: Mallado y potencial electrostático de un cable sobre un plano de tierra.



(a) Esquema del cable coaxial empleado en la simulación. Imagen obtenida de [7]. (b) Esquema del cable coaxial empleado en la simulación. Imagen obtenida de [7].

Figura 3.3: Esquemas de las estructuras utilizadas para el análisis de modos TEM.

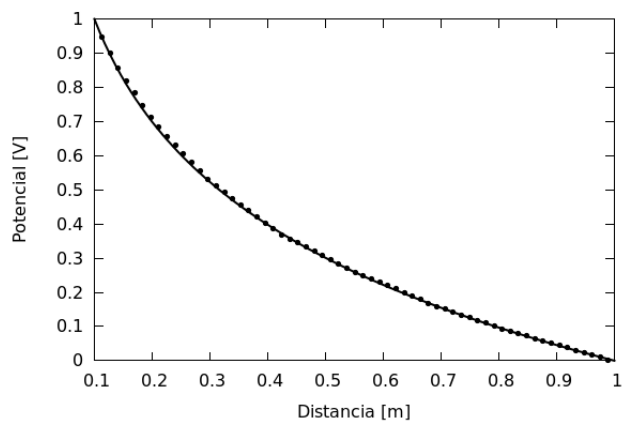


Figura 3.4: Resultados del coaxial aproximados junto a los calculados analíticamente. La línea de puntos corresponde a los valores aproximados mediante elementos finitos, la línea continua corresponde a los valores calculados analíticamente.



# 4

## Análisis específico de medios cerrados con dieléctrico homogéneo

### 4.1. Formulación escalar

#### 4.1.1. Ecuación de Helmholtz para la componente longitudinal

Como se indica en la sección 2.2.1, para obtener los campos electromagnéticos dentro de una guía de onda con dieléctrico homogéneo es necesario resolver la ecuación de Helmholtz. Para simplificar la ecuación de Helmholtz, como se realiza en la literatura de electromagnetismo [3], [4], se puede aplicar el método de separación de variables. Tanto la función vectorial del campo eléctrico,  $\vec{E}$ , como la función vectorial del campo magnético,  $\vec{H}$ , se pueden dividir en una parte longitudinal y otra transversal,  $\vec{E} = \vec{E}_t + E_z \hat{z}$ , y  $\vec{H} = \vec{H}_t + H_z \hat{z}$ . El siguiente procedimiento se va a realizar sobre el campo eléctrico pero sería análogo para el campo magnético. Aplicando la separación de componentes en la ecuación de Helmholtz para el campo eléctrico, se obtiene:

$$\nabla^2 \vec{E}_t + k^2 \vec{E}_t + \nabla^2 (E_z \hat{z}) + k^2 E_z \hat{z} = 0 \quad (4.1)$$

Podemos reescribir la expresión anterior utilizando la propiedad del laplaciano vectorial aplicado a un escalar,  $\nabla^2 (E_z \hat{z}) = (\nabla^2 E_z) \hat{z}$ , que pasa a ser un laplaciano escalar. Con ésto, la ecuación de Helmholtz se puede escribir como una ecuación vectorial para el vector transversal sumada a una ecuación escalar multiplicada por el vector unitario en la dirección longitudinal,  $\hat{z}$ :

$$\nabla^2 \vec{E}_t + k^2 \vec{E}_t + (\nabla^2 E_z + k^2 E_z) \hat{z} = 0 \quad (4.2)$$

La ecuación escalar se resuelve mediante el método de separación de variables, para ello hay que separar el laplaciano escalar en un laplaciano escalar transversal más la derivada segunda longitudinal, es decir,  $\nabla^2 E_z = \nabla_t^2 E_z + \partial^2 E_z / \partial z^2$ :

$$\nabla_t^2 E_z + \frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} + k^2 E_z = 0. \quad (4.3)$$

El método de separación de variables consiste en plantear una posible solución en la que la dependencia con cada una de las variables se pueda separar. En nuestro caso se plantea  $E_z = e_z(u_1, u_2)G(z)$  como posible solución, siendo  $e_z(u_1, u_2)$  una función que solo depende de

las coordenadas transversales  $(u_1, u_2)$ , y  $G(z)$  una función que solo depende de la coordenada longitudinal  $z$ . Introduciendo la solución planteada en 4.3 nos queda:

$$G(z)\nabla_t^2 e_z(u_1, u_2) + G''(z)e_z(u_1, u_2) + k^2 e_z(u_1, u_2)G(z) = 0 \quad (4.4)$$

Si dividimos la ecuación anterior por  $e_z(u_1, u_2)G(z)$  se llega a:

$$\frac{G''(z)}{G(z)} + \frac{\nabla_t^2 e_z(u_1, u_2)}{e_z(u_1, u_2)} + k^2 = 0, \quad (4.5)$$

de la ecuación anterior se deduce que cada sumando ha de ser igual a una constante:

$$\frac{G''(z)}{G(z)} = \gamma^2 \quad (4.6)$$

$$\frac{\nabla_t^2 e_z(u_1, u_2)}{e_z(u_1, u_2)} = -k_c^2 \quad (4.7)$$

$$\gamma^2 - k_c^2 + k^2 = 0 \quad (4.8)$$

La ecuación 4.6 resuelve como una ecuación diferencial de segundo orden homogénea, de la que se puede hallar la solución genérica,

$$G(z) = Ae^{-\gamma z} + Be^{+\gamma z}. \quad (4.9)$$

Donde  $\gamma$  es la *constante de propagación*. Si escribimos la ecuación 4.7 como:

$$\nabla_t^2 e_z(u_1, u_2) + k_c^2 e_z(u_1, u_2) = 0 \quad (4.10)$$

obtenemos la ecuación de Helmholtz en dos dimensiones. La constante  $k_c^2$  se denomina el *número de onda de corte* y está relacionado con la constante de propagación por la ecuación 4.8.

Para resolver la ecuación 4.10 mediante el método de elementos finitos, como se ha indicado en la sección 3.1, es necesario transformar la ecuación 4.10 en un *problema variacional* [1]. Para ello se debe multiplicar por una función test  $T_s$ , integrando en el dominio de cálculo  $\Omega$  para después aplicar las condiciones de contorno necesarias. Aplicando éste procedimiento a la ecuación 4.10 se obtiene,

$$\iint_{\Omega} [T_s(\nabla_t^2 e_z) + k_c^2 T_s e_z] ds = 0. \quad (4.11)$$

La ecuación anterior se denomina la *forma débil* de la ecuación de Helmholtz. Utilizando el teorema de Green, el primer término se puede reescribir en,

$$\iint_{\Omega} T_s \nabla_t^2 e_z ds = \int_{d\Omega} \nabla_t e_z \cdot \hat{n} dl - \iint_{\Omega} \nabla_t T_s \cdot \nabla_t e_z ds, \quad (4.12)$$

donde  $\hat{n}$  es el vector unitario normal al contorno  $d\Omega$ . Con lo que pasamos de la ecuación 4.11 a :

$$- \iint_{\Omega} (\nabla_t T_s \cdot \nabla_t e_z) ds + k_c^2 \iint_{\Omega} T_s e_z ds = - \int_{d\Omega} T_s \frac{\partial e_z}{\partial n} dl \quad (4.13)$$

donde  $\partial e_z / \partial n$  es la derivada normal de  $e_z$  a lo largo del contorno  $d\Omega$ . El término de la derecha desaparece ya que  $e_z$  debe cumplir la condición de contorno tipo Dirichlet  $e_z = 0$  en las paredes metálicas, y la condición de contorno tipo Neumann  $\partial e_z / \partial n = 0$  en las paredes magnéticas.

Eliminando el término de la derecha de la ecuación 4.13 y reordenando los términos llegamos finalmente a:

$$\iint_{\Omega} (\nabla_t T_s \cdot \nabla_t e_z) ds = k_c^2 \iint_{\Omega} T_s e_z ds \quad (4.14)$$

Para poder calcular el campo  $e_z$  mediante elementos finitos, en cada elemento, el campo ha de discretizarse mediante el sistema de ecuaciones,

$$e_z = \sum_i e_{zi} \alpha_i, \quad (4.15)$$

y utilizar funciones test,  $T_s$ , de la misma familia de funciones que las utilizadas en la discretización,  $\alpha_i$ ,

$$T_s = \alpha_j, \quad (4.16)$$

Por lo que, en cada elemento, la ecuación 4.14 se convierte en:

$$\sum_i e_{zi} \iint_{\Delta} (\nabla_t \alpha_i \cdot \nabla_t \alpha_j) ds = k_c^2 \sum_i e_{zi} \iint_{\Delta} \alpha_i \alpha_j ds \quad (4.17)$$

que podemos escribir de forma matricial:

$$[S_{el}][e_z] = k_c^2 [T_{el}][e_z] \quad (4.18)$$

donde

$$[S_{el}] = \iint_{\Delta} (\nabla_t \alpha_i \cdot \nabla_t \alpha_j) ds \quad (4.19)$$

$$[T_{el}] = \iint_{\Delta} (\alpha_i \alpha_j) ds \quad (4.20)$$

Las matrices  $[S_{el}]$  y  $[T_{el}]$  se evalúan en cada elemento para luego ensamblarse de acuerdo a la numeración global, y así obtener la ecuación matricial global:

$$[S][e_z] = k_c^2 [T][e_z]. \quad (4.21)$$

Por último se resuelve el problema de autovalores que presenta la expresión anterior tras aplicar las condiciones de contorno tipo Dirichlet en conductores perfectos. Los autovalores resultantes representan  $k_c^2$ , el número de onda de corte de los modos TM y los autovectores asociados representan los coeficientes del polinomio generador con el que puede calcularse el campo  $e_z$  en cada nodo del mallado.

En el caso de haber realizado el procedimiento anterior utilizando el campo  $h_z$  para obtener el número de onda de corte los modos TE, las matrices  $[S]$  y  $[T]$  serán las mismas a las obtenidas para el campo  $e_z$ ,

$$[S][h_z] = k_c^2 [T][h_z]. \quad (4.22)$$

ya que el término de la derecha de la ecuación 4.13 también se anula ya que  $h_z$  ha de cumplir la condición de contorno tipo Dirichlet  $h_z = 0$  (condición que habrá que imponer) en las paredes magnéticas y la condición de contorno tipo Neumann  $\partial h_z / \partial n = 0$  en las paredes de conductores perfectos.

#### 4.1.2. Modos TE y TM según condiciones de contorno de la componente longitudinal

La formulación que ha sido presentada en este capítulo, se ha realizado sobre la componente longitudinal del campo dentro de una guía de onda homogénea. El dominio de cálculo sobre el que se realiza la discretización de elementos finitos, sin embargo, es la sección transversal de la guía, ya que la formulación que se ha realizado es en dos dimensiones. Esto hace que

las condiciones de contorno, necesarias para resolver el problema de valor en la frontera, estén definidas por el material con el que se *construye* la guía a simular.

Por otra parte, las condiciones de contorno que se aplican también especifican los modos que se obtienen, teniendo en cuenta el material que forma la pared interior de la guía. Como se indica en [8], si la pared de la guía es un conductor perfecto, utilizando la formulación para  $e_z$  es necesario imponer condiciones de contorno tipo Dirichlet  $e_z = 0$  en el borde del dominio de cálculo, (la pared interior de la guía) para calcular los modos TM, ya que en éstos  $h_z = 0$  y  $e_z \neq 0$ , y, utilizando la formulación para  $h_z$  se deben aplicar condiciones de contorno tipo Neumann  $\partial h_z / \partial n = 0$  para calcular los modos TE, ya que en éstos  $h_z \neq 0$  y  $e_z = 0$ . De manera análoga, si la pared interior de la guía está formada por una pared magnética, para obtener los modos TM será necesario utilizar la formulación  $e_z$  e imponer condiciones de contorno tipo Neumann  $\partial e_z / \partial n = 0$  y, utilizar la formulación  $h_z$  e imponer condiciones de contorno tipo Dirichlet  $h_z = 0$ , para obtener los modos TE.

Como se indica en [8] y [1] las condiciones Dirichlet son condiciones de contorno *necesarias* y han de imponerse explícitamente para resolver el problema, mientras que las condiciones de contorno tipo Neumann son condiciones de contorno *naturales* y no han de imponerse explícitamente.

## 4.2. Formulación vectorial

### 4.2.1. Ecuación de Helmholtz para la componente transversal

Realizando un procedimiento similar al que se ha aplicado en la sección 4.1, podemos calcular la componente transversal del campo eléctrico, partiendo de la ecuación de Helmholtz

$$\nabla \times \nabla \times \vec{E} - k^2 \vec{E} = 0 \quad (4.23)$$

para luego aplicar el método de separación de variables.

Aplicando la propiedad del rotacional por la que se puede separar en una componente transversal más una componente longitudinal,  $\nabla = \nabla_t + \nabla_z$ , que aplicado a un vector arbitrario, separado este también en componente transversal y longitudinal,  $\vec{A} = \vec{A}_t + A_z \hat{z}$ , obtenemos:

$$\begin{aligned} \nabla \times (\vec{A}_t + A_z \hat{z}) &= (\nabla_t + \nabla_z) \times (\vec{A}_t + A_z \hat{z}) = \\ &= \nabla_t \times \vec{A}_t + \nabla_z \times \vec{A}_t + \nabla_t \times A_z \hat{z} + \nabla_z \times A_z \hat{z}. \end{aligned} \quad (4.24)$$

El rotacional se separa en cuatro términos de los cuales, el primero produce un vector según  $z$ , el segundo y el tercero un vector transversal y el cuarto un vector nulo. Si aplicamos esto dos veces a 4.23 resulta:

$$\begin{aligned} \nabla_t \times (\nabla_z \times \vec{E}_t + \nabla_t \times E_z \hat{z}) + \nabla_z \times (\nabla_z \times \vec{E}_t + \nabla_t \times E_z \hat{z}) + \\ + \nabla_t \times \nabla_t \times \vec{E}_t - k^2 (\vec{E}_t + E_z \hat{z}) = 0. \end{aligned} \quad (4.25)$$

Podemos simplificar el resultado anterior utilizando las siguientes identidades vectoriales y propiedades del operador rotacional:

$$\nabla_z \times \vec{A}_t = \hat{z} \times \frac{\partial \vec{A}_t}{\partial z} \quad (4.26)$$

$$\nabla_z \times (\nabla_z \times \vec{A}_t) = -\frac{\partial^2 \vec{A}_t}{\partial z^2} \quad (4.27)$$

$$\nabla_t \times (A_z \hat{z}) = \nabla_t A_z \times \hat{z} \quad (4.28)$$

$$\nabla_z \times (\vec{A}_t \times \hat{z}) = \frac{\partial \vec{A}_t}{\partial z} \quad (4.29)$$

$$\hat{z} \times (\vec{A}_t \times \hat{z}) = \vec{A}_t \quad (4.30)$$

Para llegar a la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} \nabla_t \times \left( \hat{z} \times \frac{\partial \vec{E}_t}{\partial z} \right) + \nabla_t \times (\nabla_t E_z \times \hat{z}) - \frac{\partial^2 \vec{E}_t}{\partial z^2} + \frac{\partial (\nabla_t E_z)}{\partial z} + \\ + \nabla_t \times \nabla_t \times \vec{E}_t - k^2 (\vec{E}_t + E_z \hat{z}) = 0. \end{aligned} \quad (4.31)$$

Donde los dos primeros términos producen vectores según  $z$  y el tercero, cuarto y quinto sumando producen vectores transversales. Si tomamos solo la parte transversal de la expresión anterior y aplicamos la condición TE ( $E_z = 0$ ) se consigue una ecuación para el campo  $\vec{E}_t$ :

$$\nabla_t \times \nabla_t \times \vec{E}_t - \frac{\partial^2 \vec{E}_t}{\partial z^2} - k^2 \vec{E}_t = 0. \quad (4.32)$$

Aplicando el método de separación de variables, como se realizó para el campo  $E_z$ , se propone una solución de la forma  $\vec{E}_t(u_1, u_2, z) = \vec{e}_t(u_1, u_2)G(z)$  y se introduce en la expresión anterior:

$$\nabla_t \times \nabla_t \times (\vec{e}_t(u_1, u_2)G(z)) - \frac{\partial^2 (\vec{e}_t(u_1, u_2)G(z))}{\partial z^2} - k^2 \vec{e}_t(u_1, u_2)G(z) = 0. \quad (4.33)$$

Dividiendo por  $G(z)$  y sacando factor común  $\vec{e}_t(u_1, u_2)$  obtenemos:

$$\left[ (\nabla_t \times \nabla_t \times) - \frac{G''(z)}{G(z)} - k^2 \right] \vec{e}_t(u_1, u_2) = 0, \quad (4.34)$$

de donde se deduce que el sumando  $G''(z)/G(z)$  ha de ser igual a una constante,  $\gamma^2$ , es decir,

$$[(\nabla_t \times \nabla_t \times) - \gamma^2 - k^2] \vec{e}_t(u_1, u_2) = 0, \quad (4.35)$$

que podemos reescribir de la forma

$$[(\nabla_t \times \nabla_t \times) - k_c^2] \vec{e}_t(u_1, u_2) = 0, \quad (4.36)$$

teniendo en cuenta que

$$\gamma^2 + k^2 = k_c^2 \quad (4.37)$$

La expresión 4.36 es la ecuación de Helmholtz en dos dimensiones para el campo eléctrico transversal, cuya solución se calculará utilizando el método de elementos finitos.

$$\nabla_t \times \nabla_t \times \vec{e}_t(u_1, u_2) - k_c^2 \vec{e}_t(u_1, u_2) = 0. \quad (4.38)$$

Para ello se debe transformar 4.38, la forma *fuerte* de la ecuación de Helmholtz, en la forma *débil*, primero multiplicando por la función test e integrando sobre el dominio de cálculo.

$$\iint_{\Omega} [T_s \cdot (\nabla_t \times \nabla_t \times \vec{e}_t) - T_s \cdot k_c^2 \vec{e}_t] ds = 0. \quad (4.39)$$

Podemos simplificar la expresión anterior utilizando el teorema de Green para un campo vectorial:

$$\iint_{\Omega} A \cdot (\nabla \times \nabla \times B) d\Omega = \iint_{\Omega} (\nabla \times A) \cdot (\nabla \times B) d\Omega - \int_{d\Omega} (A \times \nabla \times B) \cdot \hat{n} dl. \quad (4.40)$$

Con lo que 4.39 se reescribe de la forma:

$$\iint_{\Omega} (\nabla_t \times T_s) \cdot (\nabla_t \times \vec{e}_t) ds - \int_{d\Omega} (T_s \times \nabla_t \times \vec{e}_t) \cdot \hat{n} dl - \iint_{\Omega} T_s \cdot k_c^2 \vec{e}_t ds = 0. \quad (4.41)$$

Aplicando una discretización del campo  $\vec{e}_t$  mediante un conjunto de funciones base vectoriales  $\alpha_i$ , en cada elemento se aproxima el campo como

$$\vec{e}_t = \sum_i e_{ti} \vec{\alpha}_i. \quad (4.42)$$

Con lo que en cada elemento la expresión 4.41 se evalúa mediante:

$$\begin{aligned} \iint_{\Delta} (\nabla_t \times T_s) \cdot (\nabla_t \times \sum_i e_{ti} \vec{\alpha}_i) ds - \int_{d\Delta} (T_s \times \nabla_t \times \sum_i e_{ti} \vec{\alpha}_i) \cdot \hat{n} dl - \\ - \iint_{\Delta} T_s \cdot k_c^2 \sum_i e_{ti} \vec{\alpha}_i ds = 0. \end{aligned} \quad (4.43)$$

Utilizando funciones test del mismo tipo que las utilizadas para la discretización del campo en 4.42,

$$T_s = \vec{\alpha}_j, \quad (4.44)$$

se obtiene la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} \sum_i e_{ti} \iint_{\Delta} (\nabla_t \times \vec{\alpha}_j) \cdot (\nabla_t \times \vec{\alpha}_i) ds - \sum_i e_{ti} \int_{d\Delta} (\vec{\alpha}_j \times \nabla_t \times \vec{\alpha}_i) \cdot \hat{n} dl - \\ - k_c^2 \sum_i e_{ti} \iint_{\Delta} \vec{\alpha}_j \cdot \vec{\alpha}_i ds = 0. \end{aligned} \quad (4.45)$$

En la integral de línea, que aparece de aplicar el teorema de Green, podemos diferenciar dos posibles casos [8]: un lado del elemento puede pertenecer al contorno del dominio, donde este contorno puede estar formado por un conductor perfecto o por una pared magnética perfecta; o ser adyacente a otro elemento. Si el lado del elemento pertenece al contorno del dominio, la integral se anula al aplicarse condiciones de contorno tipo Dirichlet  $\hat{n} \times \vec{e}_t = 0$ , o al aplicarse condiciones de contorno tipo Neumann  $\hat{n} \times \nabla \times \vec{e}_t = 0$ . En el caso de que el lado del elemento sea adyacente a otro elemento, debido a que la numeración de los elementos vectoriales es siempre en sentido antihorario, los vectores normales en los lados adyacentes tienen sentido contrario con lo que la integral es la misma pero con signo contrario. De forma que la contribución de todas las integrales de línea que no pertenecen al contorno se anulan dos a dos con lo que no se tienen en cuenta en la formulación final.

$$\sum_i e_{ti} \iint_{\Delta} (\nabla_t \times \vec{\alpha}_j) \cdot (\nabla_t \times \vec{\alpha}_i) ds = k_c^2 \sum_i e_{ti} \iint_{\Delta} \vec{\alpha}_j \cdot \vec{\alpha}_i ds. \quad (4.46)$$

Podemos escribir la expresión anterior de forma matricial,

$$[S_{el}][e_t] = k_c^2 [T_{el}][e_t] \quad (4.47)$$

donde

$$[S_{el}] = \iint_{\Delta} (\nabla_t \times \vec{\alpha}_j) \cdot (\nabla_t \times \vec{\alpha}_i) ds, \quad (4.48)$$

$$[T_{el}] = \iint_{\Delta} \vec{\alpha}_j \cdot \vec{\alpha}_i ds. \quad (4.49)$$

Las matrices  $[S_{el}]$  y  $[T_{el}]$  se calculan en cada elemento y se ensamblan sobre toda la superficie siguiendo la numeración global para obtener el sistema ensamblado,

$$[S][e_t] = k_c^2 [T][e_t]. \quad (4.50)$$

Finalmente se resuelve el problema de autovalores de la ecuación anterior, hallando los autovalores  $k_c^2$  cuyos autovectores asociados forman los coeficientes del polinomio generador con el que se aproxima el campo en los nodos del mallado.

En el caso de haber realizado el procedimiento anterior utilizando el campo  $\vec{h}_t$  para obtener el número de onda de corte los modos TM, las matrices  $[S]$  y  $[T]$  serán las mismas a las obtenidas para el campo  $\vec{e}_t$ ,

$$[S][h_t] = k_c^2 [T][h_t]. \quad (4.51)$$

#### 4.2.2. Modos TE y TM según condiciones de contorno de la componente transversal

Como se ha indicado en la formulación escalar, los resultados obtenidos dependerán de la formulación empleada y de las condiciones de contorno que se aplican dependiendo del material del que está formada la pared interior de la guía.

La formulación presentada en este capítulo, obtiene la *forma variacional* de la ecuación de Helmholtz para la componente transversal del campo en la sección transversal de una guía homogénea. Por lo tanto, como indica [8] para la componente longitudinal y como se indica en [1], en una guía cuya pared interior esté formada por un conductor perfecto, utilizando la formulación en  $e_t$  será necesario imponer condiciones de contorno tipo Dirichlet,  $\hat{n} \times \vec{e}_t = 0$  en el borde del dominio para obtener los modos TE y, utilizando la formulación en  $h_t$  será necesario aplicar condiciones de contorno tipo Neumann  $\hat{n} \times \nabla \times \vec{h}_t = 0$  para obtener los modos TM.

De la misma manera, si la pared interior de la guía es una pared magnética, utilizando la formulación en  $h_t$  será necesario imponer condiciones de contorno tipo Dirichlet  $\hat{n} \times \vec{h}_t = 0$  para obtener los modos TM y, utilizar la formulación en  $e_t$  e imponer condiciones de contorno tipo Neumann  $\hat{n} \times \nabla \times \vec{e}_t = 0$  para obtener los modos TE.

### 4.3. Resultados: guías con solución analítica

En la siguiente sección se presentan los resultados obtenidos mediante las formulaciones escalar y vectorial tres guías homogéneas cuyo análisis se puede realizar de forma analítica. Las dos primeras guías son rectangulares homogéneas, la primera, con dimensiones  $a=1\text{ m}$  y  $b=0.5\text{ m}$ , se ha realizado a modo de verificación ya que es un ejemplo muy utilizado en la literatura de FEM en electromagnetismo. La segunda guía rectangular analizada tiene las dimensiones de la guía WR-90 y la tercera guía es de tipo circular, ambas diseñadas para trabajar en la banda X.

#### 4.3.1. Guía rectangular de prueba

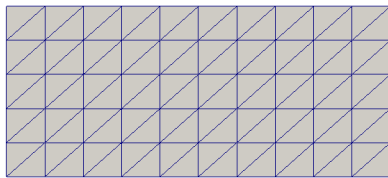
##### Formulación escalar

En las tablas 4.1, 4.2, 4.3, 4.4 se muestra el valor calculado del número de onda de corte,  $k_c$  para una guía de onda rectangular homogénea con dimensiones  $a=1\text{ m}$  y  $b=0.5\text{ m}$  utilizando la formulación escalar. El error relativo que se muestra en las tablas se ha calculado mediante,

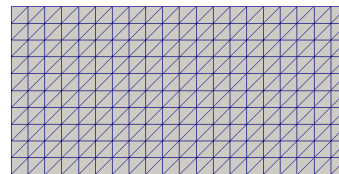
$$error\ relativo = \frac{V.C. - V.A.}{V.A.}$$

donde V.C. representa el valor calculado y V.A. representa el valor analítico.

La figura 4.1 muestra los mallados utilizados en la simulación. La figura 4.2 muestra el error relativo frente a los grados de libertad del problema. En las figuras 4.3, 4.4, 4.5, 4.6 se muestra la componente longitudinal de los primeros modos en una guía rectangular.



(a) Mallado de 100 elementos



(b) Mallado de 400 elementos

Figura 4.1: Mallados utilizados en la simulación de la guía rectangular



Orden del elemento	Número de celdas	Grados de libertad	Valor calculado [ $m^{-1}$ ]	Error relativo
1	100	66	3.15420482676	3.998527e-03
2	100	231	3.14161283809	6.424925e-06
3	100	496	3.14161283809	4.229840e-09
1	400	231	3.14479820163	1.020358e-03
2	400	861	3.1415939501	4.126911e-07
3	400	1891	3.1415926538	6.839239e-11

Tabla 4.1: Resultados del número de onda de corte del modo  $TE_{10}$  con valor analítico  $\pi=3.14159265359 m^{-1}$ .

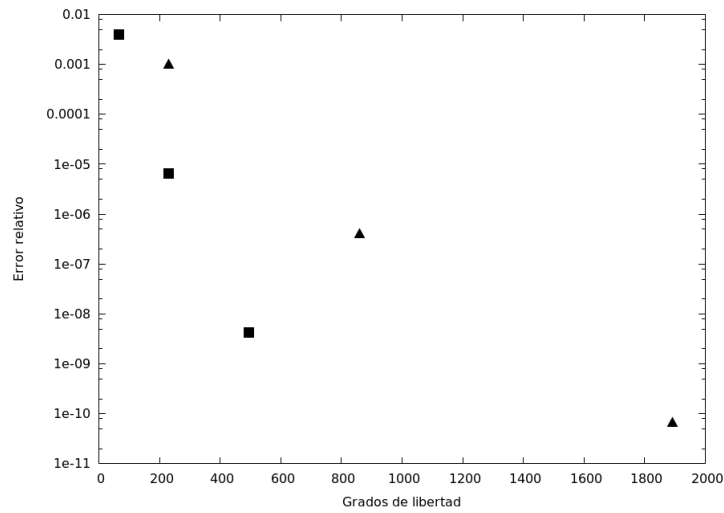


Figura 4.2: Error relativo frente a los grados de libertad del problema al aumentar el orden del elemento. Los valores representados mediante cuadrados corresponden al mallado de 100 elementos, los valores representados mediante triángulos corresponden al mallado de 400 elementos.

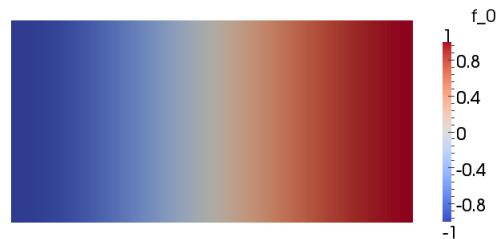


Figura 4.3: Componente longitudinal del campo magnético del modo  $TE_{10}$ .

Orden del elemento	Número de celdas	Grados de libertad	Valor calculado [ $m^{-1}$ ]	Error relativo
1	100	66	6.38331559029	1.593623e-02
2	100	231	6.28382080654	1.011429e-04
3	100	496	6.2831869951	2.686411e-07
1	400	231	6.3087756338	4.072827e-03
2	400	861	6.28322662164	6.575401e-06
3	400	1891	6.28318533435	4.324572e-09

Tabla 4.2: Resultados del número de onda de corte del modo  $TE_{20}$  con valor analítico  $2\pi=6.28318530718 m^{-1}$ .



Figura 4.4: Componente longitudinal del campo magnético del modo  $TE_{20}$ .

Orden del elemento	Número de celdas	Grados de libertad	Valor calculado [ $m^{-1}$ ]	Error relativo
1	100	66	6.38331559029	1.593623e-02
2	100	231	6.28382080654	1.011429e-04
3	100	496	6.2831869951	2.686411e-07
1	400	231	6.3087756338	4.072827e-03
2	400	896	6.28322662164	6.575401e-06
3	400	1891	6.28318533435	4.324572e-09

Tabla 4.3: Resultados del número de onda de corte del modo  $TE_{01}$  con valor analítico  $2\pi=6.28318530718 m^{-1}$ .

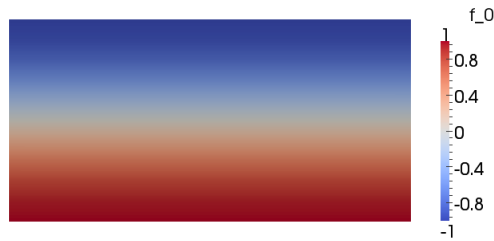


Figura 4.5: Componente longitudinal campo magnético del modo  $TE_{01}$ .

Orden del elemento	Número de celdas	Grados de libertad	Valor calculado [ $m^{-1}$ ]	Error relativo
1	100	66	7.21525263127	2.710931e-02
2	100	231	7.0265051188	2.406309e-04
3	100	496	7.02482133098	9.395180e-07
1	400	231	7.07246664055	6.783369e-03
2	400	861	7.02492349714	1.548313e-05
3	400	1891	7.02481483417	1.468001e-08

Tabla 4.4: Resultados del número de onda de corte del modo  $TM_{11}$  con valor analítico  $\sqrt{\pi^2 + 4\pi^2} = 7.02481473104 m^{-1}$ .

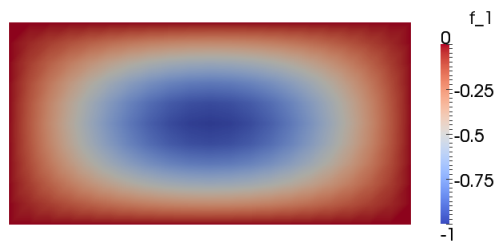


Figura 4.6: Componente longitudinal del campo eléctrico del modo  $TM_{11}$ .

### Formulación vectorial

En las tablas 4.5, 4.6, 4.7, 4.8 se muestran el valor del número de onda de corte de los primeros modos en una guía de onda rectangular homogénea con dimensiones  $a=1$  m y  $b=0.5$  m utilizando la formulación vectorial.

La figura 4.7 muestra el error relativo frente a los grados de libertad del problema. Las figuras 4.8, 4.9, 4.10, 4.11 muestran la componente transversal de los primeros modos en una guía rectangular.

Orden del elemento	Número de celdas	Grados de libertad	Valor calculado [ $m^{-1}$ ]	Error relativo
1	100	165	3.13727670139	1.373810e-03
2	100	530	3.14159358983	2.980141e-07
3	100	1095	3.14159265608	7.941422e-10
1	400	630	3.14051545462	3.428831e-04
2	400	2060	3.14159271253	1.876059e-08
3	400	4290	3.14159265363	1.284633e-11

Tabla 4.5: Resultados del número de onda de corte del modo  $TE_{10}$  con valor analítico  $\pi^2=3.14159265359$   $m^{-1}$ .

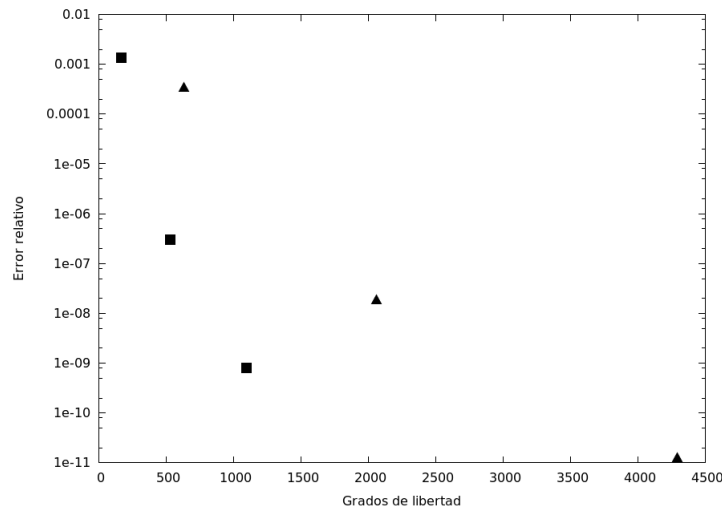


Figura 4.7: Error relativo frente a los grados de libertad del problema al aumentar el orden del elemento. Los valores representados mediante cuadrados corresponden al malla de 100 elementos, los valores representados mediante triángulos corresponden al malla de 400 elementos

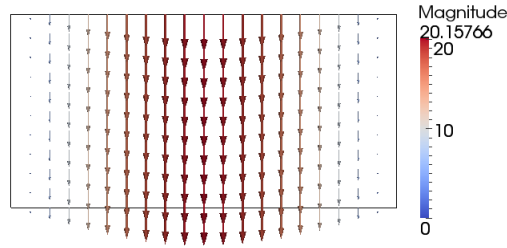


Figura 4.8: Componente transversal del campo eléctrico del modo  $TE_{10}$ .

Orden del elemento	Número de celdas	Grados de libertad	Valor calculado [ $m^{-1}$ ]	Error relativo
1	100	165	6.24793935165	5.609568e-03
2	100	530	6.28321439972	4.630221e-06
3	100	1095	6.28318562154	5.003229e-08
1	400	630	6.27451981354	1.379156e-03
2	400	2060	6.28318718386	2.986830e-07
3	400	4290	6.2831853123	8.150912e-10

Tabla 4.6: Resultados del número de onda de corte del modo  $TE_{20}$  con valor analítico  $2\pi^2=6.28318530718 m^{-1}$ .

Orden del elemento	Número de celdas	Grados de libertad	Valor calculado [ $m^{-1}$ ]	Error relativo
1	100	165	6.24882121789	5.469215e-03
2	100	530	6.2832143633	4.624425e-06
3	100	1095	6.28318561735	4.936476e-08
1	400	630	6.27457940688	1.369672e-03
2	400	2060	6.2831871834	2.986091e-07
3	400	4290	6.28318531226	8.092478e-10

Tabla 4.7: Resultados del número de onda de corte del modo  $TE_{01}$  con valor analítico  $2\pi^2=6.28318530718 m^{-1}$ .

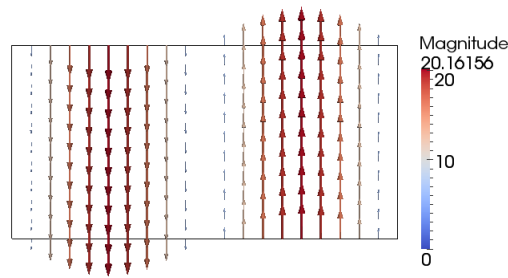


Figura 4.9: Componente transversal del campo eléctrico del modo  $TE_{20}$ .

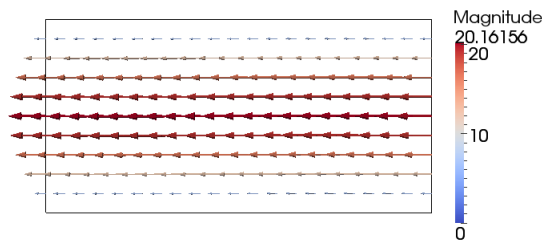


Figura 4.10: Componente transversal del campo eléctrico del modo  $TE_{01}$ .

Orden del elemento	Número de celdas	Grados de libertad	Valor calculado [ $m^{-1}$ ]	Error relativo
1	100	165	7.02266406197	3.061531e-04
2	100	530	7.0251720508	5.086536e-05
3	100	1095	7.02481718703	3.496158e-07
1	400	630	7.02432044536	7.036281e-05
2	400	2060	7.02483721227	3.200260e-06
3	400	4290	7.02481477	5.545813e-09

Tabla 4.8: Resultados del número de onda de corte del modo  $TM_{11}$  con valor analítico  $\sqrt{\pi^2 + 4\pi^2} = 7.02481473104 \text{ m}^{-1}$ .

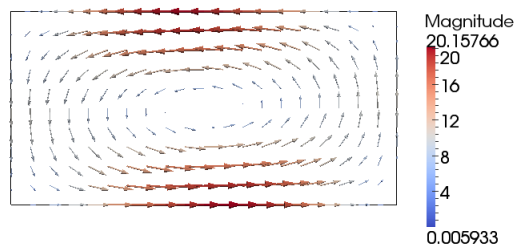


Figura 4.11: Componente transversal del campo magnético del modo  $TM_{11}$ .

### 4.3.2. Guía WR-90

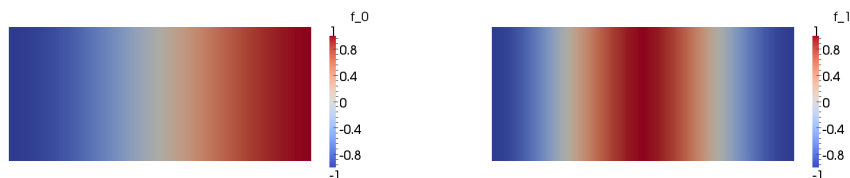
#### Formulación escalar

En la tablas 4.9 se muestran las frecuencias de corte de los dos primeros modos de una guía rectangular tipo WR-90 rellena de aire (dimensiones  $a=22.86 \text{ mm}$ ,  $b=10.16 \text{ mm}$ ), calculadas utilizando la formulación escalar.

En la figura 4.12 se muestra la componente longitudinal de los primeros modos en una guía rectangular tipo WR-90. Los mallados utilizados en la simulación son como los de la figura 4.1 pero escalados a las dimensiones de la guía WR-90.

Modo	Orden del elemento	Número de celdas	Grados de libertad	Valor calculado [Hz]
$TE_{10}$	1	100	66	6.58367e+09
$TE_{20}$	1	100	66	1.33247e+10
$TE_{10}$	1	400	231	6.56397e+09
$TE_{20}$	1	400	231	1.31680e+10
$TE_{10}$	2	100	231	6.55731e+09
$TE_{20}$	2	100	231	1.31159e+10
$TE_{10}$	2	400	861	6.55727e+09
$TE_{20}$	2	400	861	1.31146e+10

Tabla 4.9: Resultados de las frecuencias de corte para una guía WR-90 utilizando la formulación escalar, cuyos valores analíticos son  $6.5571e+09 \text{ Hz}$  para el modo  $TE_{10}$  y  $1.3114e+10 \text{ Hz}$  para el modo  $TE_{20}$ .



(a) Modo  $TE_{10}$

(b) Modo  $TE_{20}$

Figura 4.12: Componentes longitudinales del campo magnético en una guía tipo WR-90.



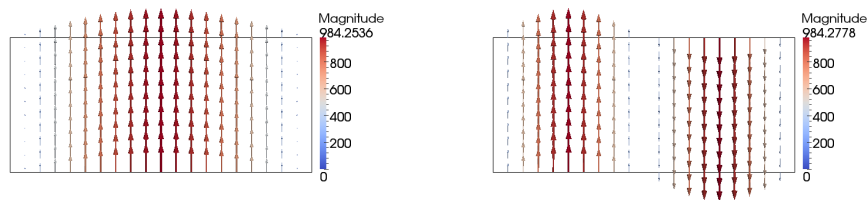
### Formulación vectorial

En la tabla 4.10 se muestran las frecuencias de corte de los dos primeros modos de una guía rectangular tipo WR-90 rellena de aire (dimensiones  $a=22.86 \text{ mm}$ ,  $b=10.16 \text{ mm}$ ), calculadas utilizando la formulación vectorial.

En la figura 4.13 se muestra la componente transversal de los primeros modos en una guía rectangular tipo WR-90.

Modo	Orden del elemento	Número de celdas	Grados de libertad	Valor calculado [Hz]
$TE_{10}$	1	100	165	6.55108e+09
$TE_{20}$	1	100	165	1.30640e+10
$TE_{10}$	1	400	530	6.55573e+09
$TE_{20}$	1	400	530	1.31021e+10
$TE_{10}$	2	100	530	6.55728e+09
$TE_{20}$	2	100	530	1.31147e+10
$TE_{10}$	2	400	2060	6.55727e+09
$TE_{20}$	2	400	2060	1.31146e+10

Tabla 4.10: Resultados de las frecuencias de corte para una guía WR-90 utilizando la formulación vectorial, cuyos valores analíticos son  $6.5571e+09 \text{ Hz}$  para el modo  $TE_{10}$  y  $1.3114e+10 \text{ Hz}$  para el modo  $TE_{20}$ .



(a) Modo  $TE_{10}$

(b) Modo  $TE_{20}$

Figura 4.13: Componentes transversales del campo eléctrico en una guía tipo WR-90.

### 4.3.3. Guía circular en la banda X

#### Formulación escalar

En la tabla 4.11 se muestran las frecuencias de corte de los dos primeros modos de una guía circular para la banda X (diámetro interior de  $23.83 \text{ mm}$ ) rellena de aire, calculadas utilizando la formulación escalar.

En la figura 4.14 se muestran los mallados utilizados en la simulación. En la figura 4.15 se muestra la componente longitudinal de los primeros modos en una guía circular. Como se puede apreciar en las figuras 4.15a y 4.15b, para el primer modo de la guía circular, el  $TE_{11}$ , el método obtiene dos modos degenerados, es decir, con la misma frecuencia de corte, donde los campos son iguales pero girados  $90^\circ$ .

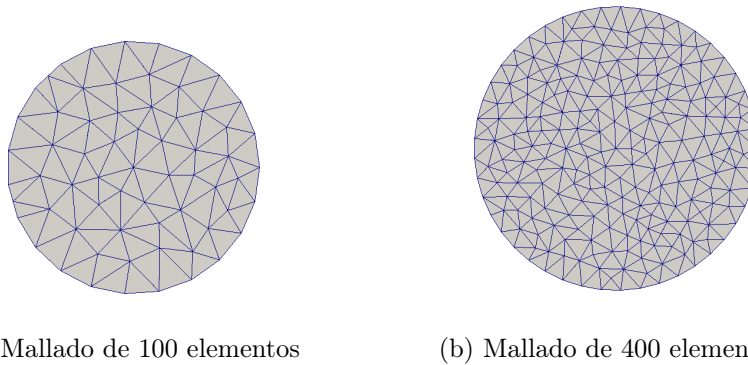


Figura 4.14: Mallados utilizados en la simulación de la guía circular

Modo	Orden del elemento	Número de celdas	Grados de libertad	Valor calculado [Hz]
$TE_{11a}$	1	100	65	7.46718e+09
$TE_{11b}$	1	100	65	7.46913e+09
$TM_{01}$	1	100	65	9.76389e+09
$TE_{21}$	1	100	65	1.25355e+10
$TE_{11a}$	2	100	232	7.41934e+09
$TE_{11b}$	2	100	232	7.41938e+09
$TM_{01}$	2	100	232	9.69659e+09
$TE_{21}$	2	100	232	1.23102e+10
$TE_{11a}$	1	400	234	7.39633e+09
$TE_{11b}$	1	400	234	7.39658e+09
$TM_{01}$	1	400	234	9.66667e+09
$TE_{21}$	1	400	234	1.23088e+10
$TE_{11a}$	2	400	888	7.38505e+09
$TE_{11a}$	2	400	888	7.38497e+09
$TM_{01}$	2	400	888	9.64651e+09
$TE_{21}$	2	400	888	1.22508e+10

Tabla 4.11: Resultados de las frecuencias de corte para una guía circular utilizando la formulación escalar, cuyos valores analíticos son  $7.3723e+09$  Hz para el modo  $TE_{11}$ ,  $9.6308e+09$  Hz para el modo  $TM_{01}$  y  $1.223e+10$  Hz para el modo  $TE_{21}$ .

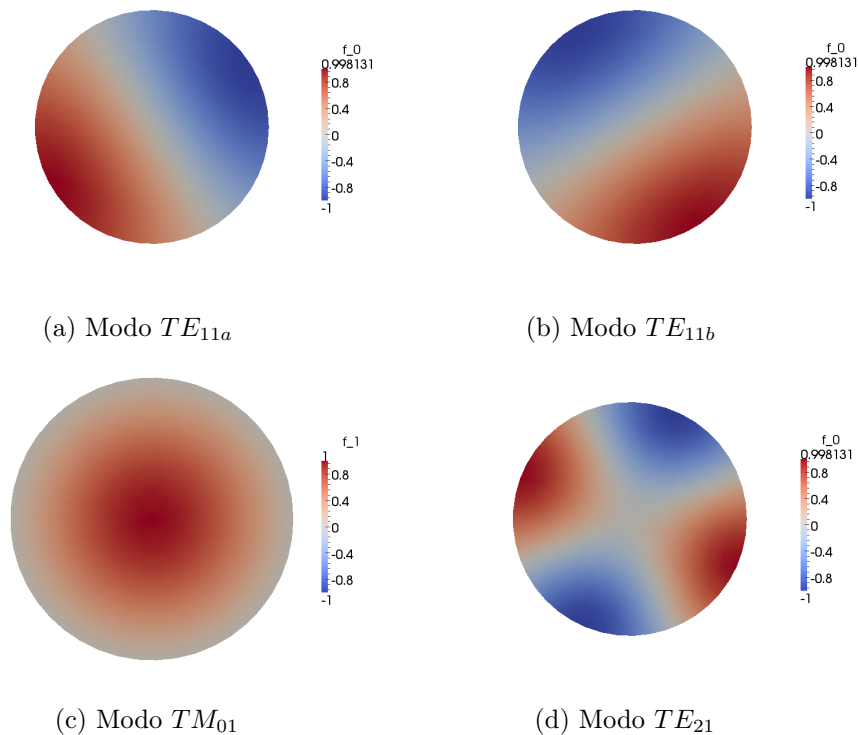


Figura 4.15: Componente longitudinal, del campo magnético para los modos TE y del campo eléctrico para los modos TM, en una guía circular.

### Formulación vectorial

En la tabla 4.12 se muestran las frecuencias de corte de los dos primeros modos de una guía circular para la banda X (diámetro interior de 23.83 mm) rellena de aire, calculadas utilizando la formulación vectorial.

En la figura 4.16 se muestra la componente transversal de los primeros modos en una guía circular. Al igual que en la formulación escalar, utilizando la formulación vectorial también se obtienen modos degenerados como se observa, para el modo  $TE_{11}$  en las figuras 4.16a y 4.16b, con la misma distribución del campo girada  $90^\circ$ .

Modo	Orden del elemento	Número de celdas	Grados de libertad	Valor calculado [Hz]
$TE_{11a}$	1	100	167	7.43560e+09
$TE_{11b}$	1	100	167	7.43638e+09
$TM_{01}$	1	100	167	9.75857e+09
$TE_{21}$	1	100	167	7.43638e+09
$TE_{11a}$	2	100	540	7.41758e+09
$TE_{11b}$	2	100	540	7.41778e+09
$TM_{01}$	2	100	540	9.69050e+09
$TE_{21}$	2	100	540	1.23032e+10
$TE_{11a}$	1	400	654	7.38968e+09
$TE_{11b}$	1	400	654	7.39044e+09
$TM_{01}$	1	400	654	9.66166e+09
$TE_{21}$	1	400	654	1.22627e+10
$TE_{11a}$	2	400	2150	7.38483e+09
$TE_{11b}$	2	400	2150	7.38484e+09
$TM_{01}$	2	400	2150	9.64581e+09
$TE_{21}$	2	400	2150	1.22501e+10

Tabla 4.12: Resultados de las frecuencias de corte para una guía circular utilizando la formulación vectorial, cuyos valores analíticos son 7.3723e+09 Hz para el modo  $TE_{11}$ , 9.6308e+09 Hz para el modo  $TM_{01}$  y 1.223e+10 Hz para el modo  $TE_{21}$ .

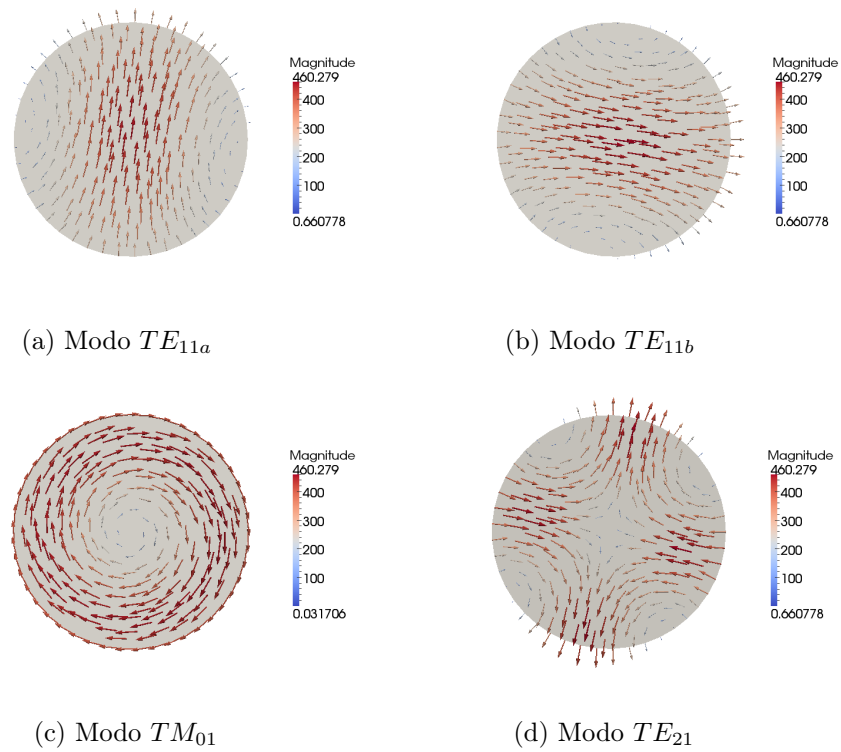


Figura 4.16: Componente transversal del campo eléctrico para los modos TE y del campo magnético para los modos TM, una guía circular.

## 4.4. Resultados: guías con solución numérica

En la siguiente sección se presentan los resultados de dos guías sin solución analítica, cuyo análisis ha de realizarse mediante un método numérico, la guía tipo Ridge y la guía tipo Double-Ridge. El análisis de este tipo de estructuras presenta una de las aplicaciones prácticas del método FEM en electromagnetismo.

### 4.4.1. Guía Ridge

#### Formulación escalar

En las tablas 4.13 y 4.14 se muestran las frecuencias de corte de los primeros modos de una guía tipo Ridge para la banda X rellena de aire, utilizando la formulación escalar. En la última columna de la tabla se ha añadido los valores obtenidos utilizando el método GTR (Generalized Transverse Resonance) [9], como referencia.

En la figura 4.17 se muestra el mallado utilizado en la simulación y en la figura 4.18 se muestra el esquema con las dimensiones de la guía. En la figura 4.19 se muestra la componente longitudinal de los primeros modos en una guía tipo Ridge.

Modo	Orden del elemento	Número de celdas	Grados de libertad	Valor calculado [Hz]	Valor de referencia [Hz]
$TE_1$	1	319	192	4.80922e+09	4.78414e+9
$TE_2$	1	319	192	1.50936e+10	1.49897e+10
$TE_3$	1	319	192	2.16361e+10	2.14809e+10
$TE_4$	1	319	192	2.16426e+10	2.14809e+10
$TE_1$	2	319	702	4.78773e+09	4.78414e+9
$TE_2$	2	319	702	1.49961e+10	1.49897e+10
$TE_3$	2	319	702	2.14854e+10	2.14809e+10
$TE_4$	2	319	702	2.14894e+10	2.14809e+10

Tabla 4.13: Resultados de las frecuencias de corte de los modos TE para una guía Ridge utilizando la formulación escalar.

Modo	Orden del elemento	Número de celdas	Grados de libertad	Valor calculado [Hz]	Valor de referencia [Hz]
$TM_1$	1	319	192	3.04878e+10	3.00817e+10
$TM_2$	1	319	192	3.04894e+10	3.00817e+10
$TM_1$	2	319	702	3.00978e+10	3.00817e+10
$TM_2$	2	319	702	3.00983e+10	3.00817e+10

Tabla 4.14: Resultados de las frecuencias de corte de los modos TM para una guía Ridge utilizando la formulación escalar.

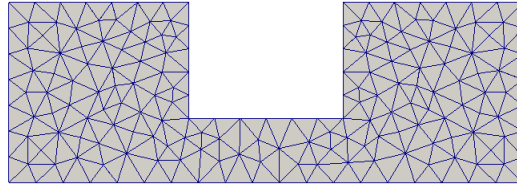


Figura 4.17: Mallado de la guía Ridge utilizada en la simulación.

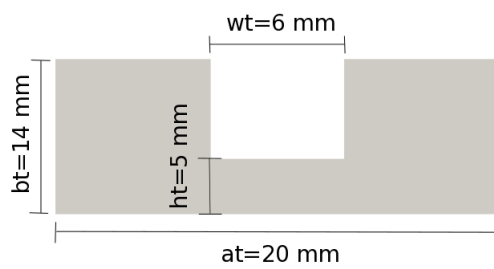


Figura 4.18: Esquema y dimensiones de la guía Ridge utilizada en la simulación.

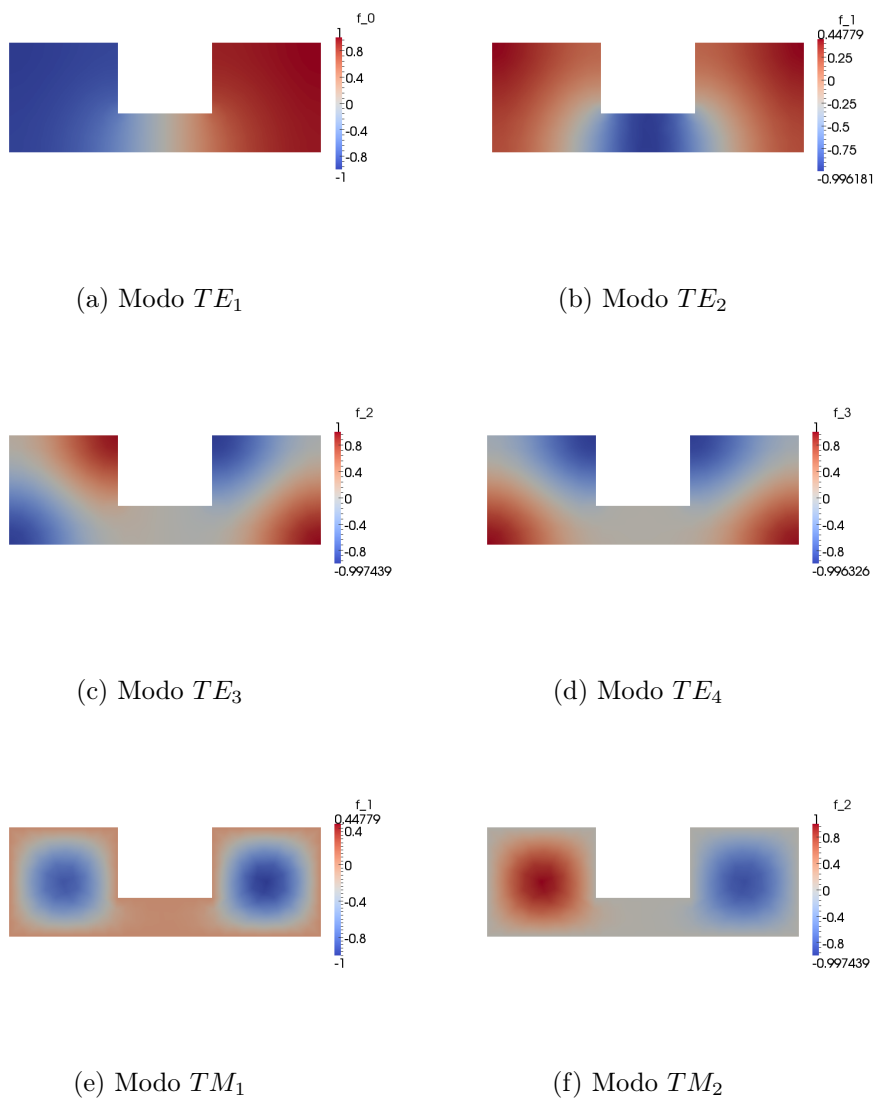


Figura 4.19: Componente longitudinal, del campo magnético para los modos TE y del campo eléctrico para los modos TM, en una guía Ridge.



## Formulación vectorial

En las tablas 4.15 y 4.16 se muestran las frecuencias de corte de los primeros modos de una guía tipo Ridge para la banda X rellena de aire, utilizando la formulación vectorial. En la última columna de la tabla se ha añadido los valores obtenidos utilizando el método GTR [9], como referencia. En la figura 4.20 se muestra la componente transversal de los primeros modos en una guía tipo Ridge.

Como puede observarse, especialmente en las figuras 4.20a y 4.20b, debido a que las condiciones de contorno fuerzan a que el campo eléctrico sea normal a las paredes conductoras, en las esquinas interiores de la estructura aparece una singularidad que provoca una aproximación errónea del campo en esos puntos. Pese a esta singularidad, los resultados siguen siendo muy próximos a los obtenidos mediante el método GTR.

Modo	Orden del elemento	Número de celdas	Grados de libertad	Valor calculado [Hz]	Valor de referencia [Hz]
$TE_1$	1	319	510	4.75575e+09	4.78414e+9
$TE_2$	1	319	510	1.48753e+10	1.49897e+10
$TE_3$	1	319	510	2.14529e+10	2.14809e+10
$TE_4$	1	319	510	2.14543e+10	2.14809e+10
$TE_1$	2	319	1658	4.77803e+09	4.78414e+9
$TE_2$	2	319	1658	1.49599e+10	1.49897e+10
$TE_3$	2	319	1658	2.14767e+10	2.14809e+10
$TE_4$	2	319	1658	2.14798e+10	2.14809e+10

Tabla 4.15: Resultados de las frecuencias de corte de los modos TE para una guía Ridge utilizando la formulación vectorial.

Modo	Orden del elemento	número de celdas	Grados de libertad	Valor calculado [Hz]	Valor de referencia [Hz]
$TM_1$	1	319	510	3.00234e+10	3.00817e+10
$TM_2$	1	319	510	3.00248e+10	3.00817e+10
$TM_1$	2	319	1658	3.00716e+10	3.00817e+10
$TM_2$	2	319	1658	3.00722e+10	3.00817e+10

Tabla 4.16: Resultados de las frecuencias de corte de los modos TM para una guía Ridge utilizando la formulación vectorial.

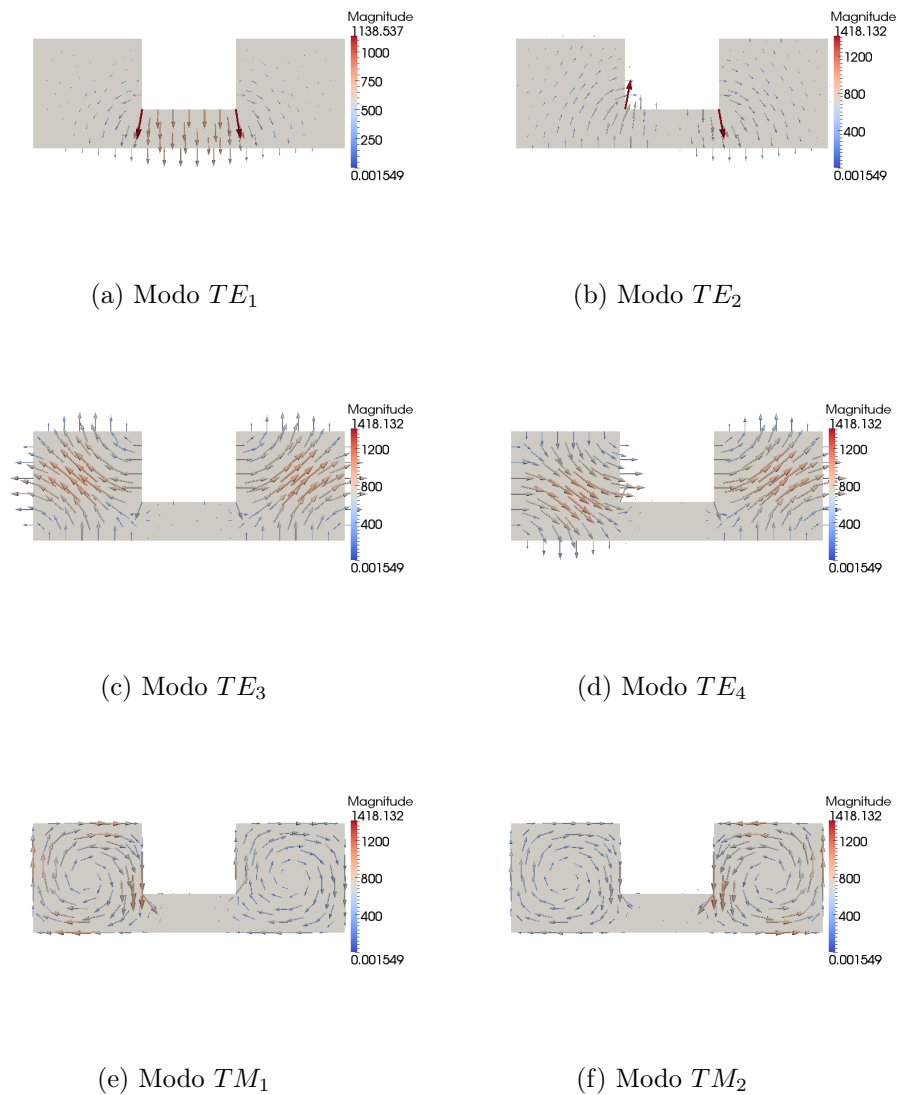


Figura 4.20: Componente transversal, del campo eléctrico para los modos TE y del campo magnético para los modos TM, en una guía Ridge.

#### 4.4.2. Guía Double-Ridge

##### Formulación escalar

En las tablas 4.17, 4.18, 4.19, 4.20 se muestran las frecuencias de corte de los primeros modos de una guía tipo Double-Ridge para la banda X rellena de aire, utilizando la formulación escalar. En la última columna de la tabla se ha añadido los valores obtenidos utilizando el método GTR [9], como referencia. En la figura 4.21 se muestra el esquema con las dimensiones de la guía y en la figura 4.22 se muestra el mallado utilizado en la simulación. En la figura 4.23 se muestra la componente longitudinal de los primeros modos en una guía tipo Double-Ridge.

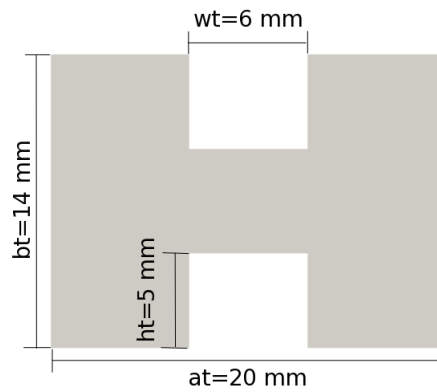


Figura 4.21: Esquema y dimensiones de la guía Double-Ridge utilizada en la simulación.

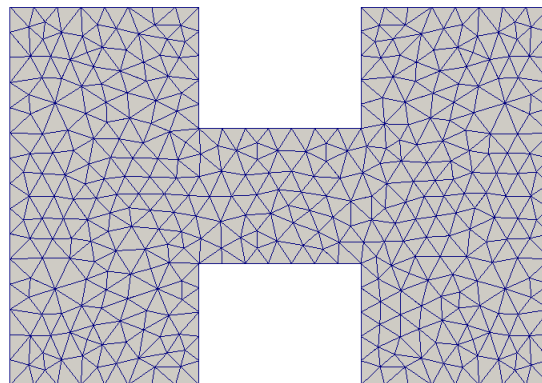


Figura 4.22: Mallado utilizado en la simulación de la guía Double-Ridge.

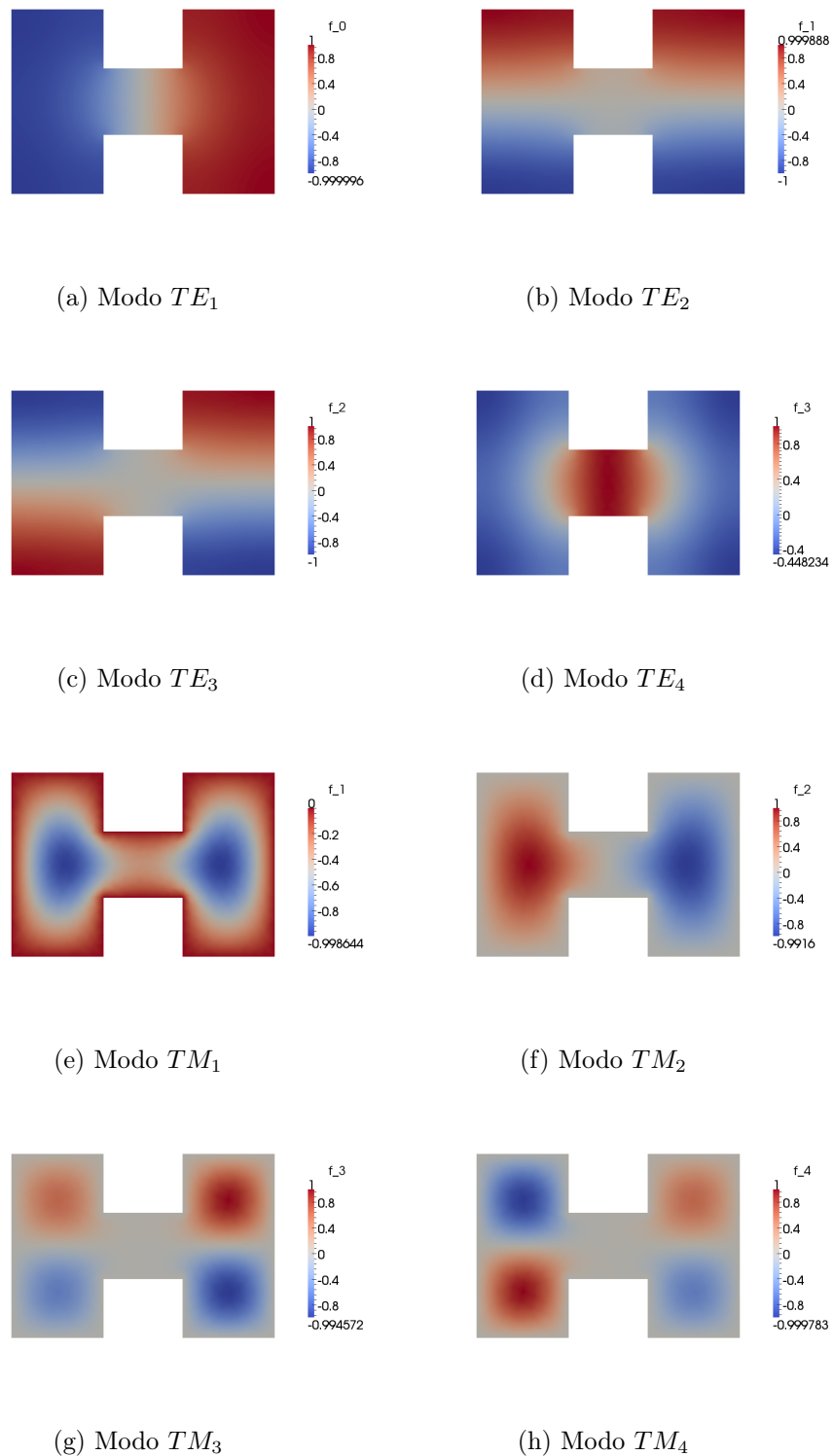


Figura 4.23: Componente longitudinal, del campo magnético para los modos TE y del campo eléctrico para los modos TM, en una guía Double-Ridge.

Modo	Orden del elemento	Número de celdas	Grados de libertad	Valor calculado [Hz]	Valor de referencia [Hz]
$TE_1$	1	736	417	4.84592e+09	4.786364e+09
$TE_2$	1	736	417	1.11779e+10	1.1087171e+10
$TE_3$	1	736	417	1.12115e+10	1.1114199e+10
$TE_4$	1	736	417	1.52939e+10	1.4989748e+10
$TE_5$	1	736	417	2.17263e+10	
$TE_6$	1	736	417	2.17358e+10	
$TE_7$	1	736	417	2.23481e+10	
$TE_8$	1	736	417	2.45152e+10	
$TE_9$	1	736	417	2.46066e+10	
$TE_{10}$	1	736	417	2.60515e+10	
$TE_{11}$	1	736	417	3.02209e+10	
$TE_{12}$	1	736	417	3.24258e+10	
$TE_{13}$	1	736	417	3.33125e+10	
$TE_{14}$	1	736	417	3.43142e+10	

Tabla 4.17: Resultados para una guía Double-Ridge utilizando la formulación escalar.

Modo	Orden del elemento	Número de celdas	Grados de libertad	Valor calculado [Hz]	Valor de referencia [Hz]
$TM_1$	1	736	417	2.24675e+10	2.1899125e+10
$TM_2$	1	736	417	2.27119e+10	2.2169846e+10
$TM_3$	1	736	417	3.07802e+10	3.0081782e+10
$TM_4$	1	736	417	3.07836e+10	3.0082352e+10
$TM_5$	1	736	417	3.32130e+10	
$TM_6$	1	736	417	3.72192e+10	
$TM_7$	1	736	417	3.98742e+10	
$TM_8$	1	736	417	4.13636e+10	
$TM_9$	1	736	417	4.44341e+10	
$TM_{10}$	1	736	417	4.95648e+10	
$TM_{11}$	1	736	417	4.95997e+10	
$TM_{12}$	1	736	417	5.01925e+10	
$TM_{13}$	1	736	417	5.04379e+10	
$TM_{14}$	1	736	417	5.04449e+10	

Tabla 4.18: Resultados de las frecuencias de corte para una guía Double-Ridge utilizando la formulación escalar.

Modo	Orden del elemento	Número de celdas	Grados de libertad	Valor calculado [Hz]	Valor de referencia [Hz]
$TE_1$	2	736	1569	4.79424e+09	4.786364e+09
$TE_2$	2	736	1569	1.10969e+10	1.1087171e+10
$TE_3$	2	736	1569	1.11244e+10	1.1114199e+10
$TE_4$	2	736	1569	1.50203e+10	1.4989748e+10
$TE_5$	2	736	1569	2.14883e+10	
$TE_6$	2	736	1569	2.14926e+10	
$TE_7$	2	736	1569	2.21048e+10	
$TE_8$	2	736	1569	2.41761e+10	
$TE_9$	2	736	1569	2.42492e+10	
$TE_{10}$	2	736	1569	2.55573e+10	
$TE_{11}$	2	736	1569	2.95791e+10	
$TE_{12}$	2	736	1569	3.17300e+10	
$TE_{13}$	2	736	1569	3.24995e+10	
$TE_{14}$	2	736	1569	3.35404e+10	

Tabla 4.19: Resultados de las frecuencias de corte para una guía Double-Ridge utilizando la formulación escalar.

Modo	Orden del elemento	Número de celdas	Grados de libertad	Valor calculado [Hz]	Valor de referencia [Hz]
$TM_1$	2	736	1569	2.19658e+10	2.1899125e+10
$TM_2$	2	736	1569	2.22288e+10	2.2169846e+10
$TM_3$	2	736	1569	3.01085e+10	3.0081782e+10
$TM_4$	2	736	1569	3.01090e+10	3.0082352e+10
$TM_5$	2	736	1569	3.23968e+10	
$TM_6$	2	736	1569	3.60154e+10	
$TM_7$	2	736	1569	3.86646e+10	
$TM_8$	2	736	1569	3.98185e+10	
$TM_9$	2	736	1569	4.26002e+10	
$TM_{10}$	2	736	1569	4.69422e+10	
$TM_{11}$	2	736	1569	4.69599e+10	
$TM_{12}$	2	736	1569	4.79282e+10	
$TM_{13}$	2	736	1569	4.79283e+10	
$TM_{14}$	2	736	1569	4.79497e+10	

Tabla 4.20: Resultados de las frecuencias de corte para una guía Double-Ridge utilizando la formulación escalar.

### Formulación vectorial

En las tablas 4.21, 4.22, 4.23, 4.24 se muestran las frecuencias de corte de los primeros modos de una guía tipo Double-Ridge para la banda X rellena de aire, utilizando la formulación vectorial. En la última columna de la tabla se ha añadido los valores obtenidos utilizando el método GTR [9], como referencia.

En la figura 4.24 se muestra la componente transversal de los primeros modos en una guía tipo Double-Ridge.

De igual manera a como ocurre en la guía Ridge, en las esquinas interiores de la guía Double-Ridge también aparecen singularidades donde la aproximación del campo es errónea.

Modo	Orden del elemento	Número de celdas	Grados de libertad	Valor calculado [Hz]	Valor de referencia [Hz]
$TE_1$	1	736	1152	4.84592e+09	4.786364e+09
$TE_2$	1	736	1152	1.11779e+10	1.1087171e+10
$TE_3$	1	736	1152	1.12115e+10	1.1114199e+10
$TE_4$	1	736	1152	1.52939e+10	1.4989748e+10
$TE_5$	1	736	1152	2.17263e+10	
$TE_6$	1	736	1152	2.17358e+10	
$TE_7$	1	736	1152	2.23481e+10	
$TE_8$	1	736	1152	2.45152e+10	
$TE_9$	1	736	1152	2.46066e+10	
$TE_{10}$	1	736	1152	2.60515e+10	
$TE_{11}$	1	736	1152	3.02209e+10	
$TE_{12}$	1	736	1152	3.24258e+10	
$TE_{13}$	1	736	1152	3.33125e+10	
$TE_{14}$	1	736	1152	3.43142e+10	

Tabla 4.21: Resultados de las frecuencias de corte para una guía Double-Ridge utilizando la formulación vectorial.

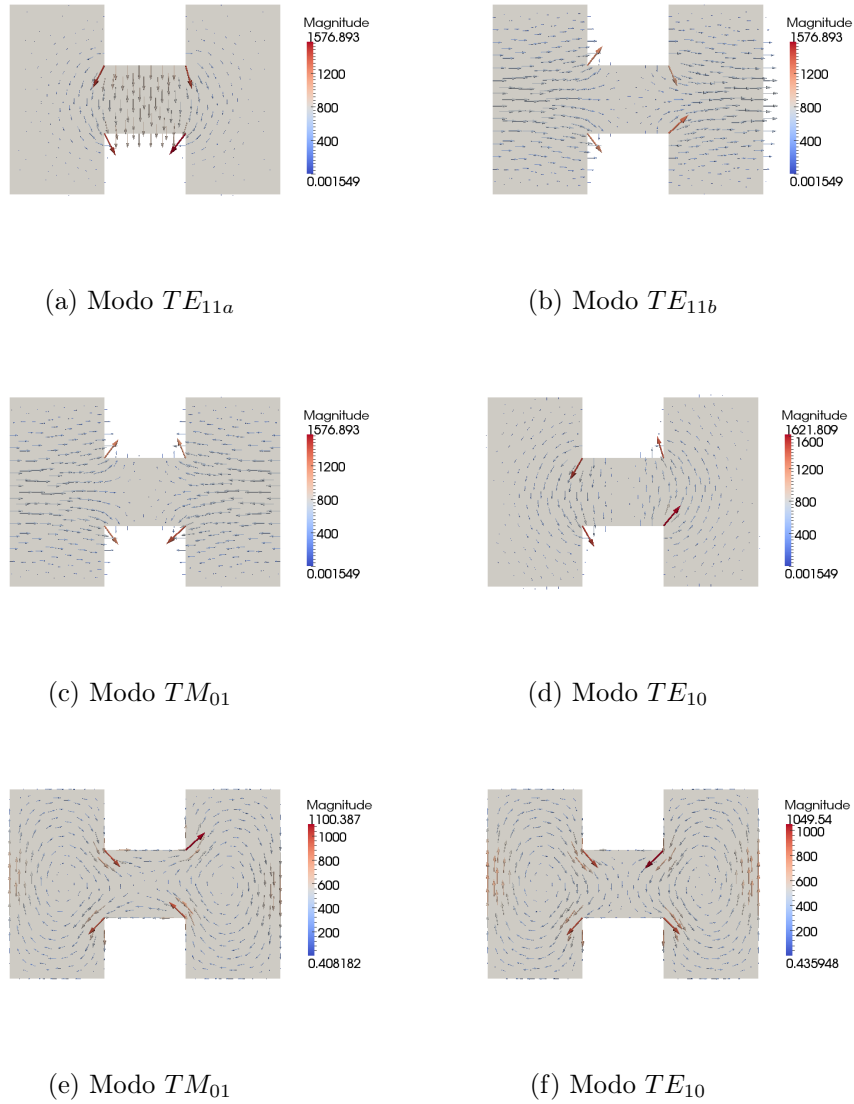


Figura 4.24: Componente transversal, del campo eléctrico para los modos TE y del campo magnético para los modos TM, en una guía Double-Ridge.



Modo	Orden del elemento	Número de celdas	Grados de libertad	Valor calculado [Hz]	Valor de referencia [Hz]
$TM_1$	1	736	1152	2.24675e+10	2.1899125e+10
$TM_2$	1	736	1152	2.27119e+10	2.2169846e+10
$TM_3$	1	736	1152	3.07802e+10	3.0081782e+10
$TM_4$	1	736	1152	3.07836e+10	3.0082352e+10
$TM_5$	1	736	1152	3.32130e+10	
$TM_6$	1	736	1152	3.72192e+10	
$TM_7$	1	736	1152	3.98742e+10	
$TM_8$	1	736	1152	4.13636e+10	
$TM_9$	1	736	1152	4.44341e+10	
$TM_{10}$	1	736	1152	4.95648e+10	
$TM_{11}$	1	736	1152	4.95997e+10	
$TM_{12}$	1	736	1152	5.01925e+10	
$TM_{13}$	1	736	1152	5.04379e+10	
$TM_{14}$	1	736	1152	5.04449e+10	

Tabla 4.22: Resultados de las frecuencias de corte para una guía Double-Ridge utilizando la formulación vectorial.

Modo	Orden del elemento	Número de celdas	Grados de libertad	Valor calculado [Hz]	Valor de referencia [Hz]
$TE_1$	2	736	3776	4.79424e+09	4.786364e+09
$TE_2$	2	736	3776	1.10969e+10	1.1087171e+10
$TE_3$	2	736	3776	1.11244e+10	1.1114199e+10
$TE_4$	2	736	3776	1.50203e+10	1.4989748e+10
$TE_5$	2	736	3776	2.14883e+10	
$TE_6$	2	736	3776	2.14926e+10	
$TE_7$	2	736	3776	2.21048e+10	
$TE_8$	2	736	3776	2.41761e+10	
$TE_9$	2	736	3776	2.42492e+10	
$TE_{10}$	2	736	3776	2.55573e+10	
$TE_{11}$	2	736	3776	2.95791e+10	
$TE_{12}$	2	736	3776	3.17300e+10	
$TE_{13}$	2	736	3776	3.24995e+10	
$TE_{14}$	2	736	3776	3.35404e+10	

Tabla 4.23: Resultados de las frecuencias de corte para una guía Double-Ridge utilizando la formulación vectorial.

Modo	Orden del elemento	Número de celdas	Grados de libertad	Valor calculado [Hz]	Valor de referencia [Hz]
$TM_1$	2	736	3776	2.19658e+10	2.1899125e+10
$TM_2$	2	736	3776	2.22288e+10	2.2169846e+10
$TM_3$	2	736	3776	3.01085e+10	3.0081782e+10
$TM_4$	2	736	3776	3.01090e+10	3.0082352e+10
$TM_5$	2	736	3776	3.23968e+10	
$TM_6$	2	736	3776	3.60154e+10	
$TM_7$	2	736	3776	3.86646e+10	
$TM_8$	2	736	3776	3.98185e+10	
$TM_9$	2	736	3776	4.26002e+10	
$TM_{10}$	2	736	3776	4.69422e+10	
$TM_{11}$	2	736	3776	4.69599e+10	
$TM_{12}$	2	736	3776	4.79282e+10	
$TM_{13}$	2	736	3776	4.79283e+10	
$TM_{14}$	2	736	3776	4.79497e+10	

Tabla 4.24: Resultados de las frecuencias de corte para una guía Double-Ridge utilizando la formulación vectorial.

# 5

## Análisis general para medios cerrados multidieléctricos

### 5.1. Formulación general

Para obtener la formulación general, también denominada inhomogénea, se vuelve a partir de la ecuación de Helmholtz para el campo eléctrico,

$$\nabla \times \frac{1}{\mu_r} \nabla \times \vec{E} = k_o^2 \epsilon_r \vec{E}, \quad (5.1)$$

donde  $k_o = \omega \sqrt{\mu_o \epsilon_o}$  y  $\mu_o$  la constante de permeabilidad magnética y  $\epsilon_o$  la constante de permitividad eléctrica, ambas en el vacío y  $\mu_r = \mu/\mu_o$  la constante de permeabilidad magnética relativa del medio y  $\epsilon_r = \epsilon/\epsilon_o$  la constante de permitividad eléctrica relativa del medio, aplicando la separación de variables, realizada en las secciones 4.1 y 4.2, podemos escribir el campo eléctrico separando sus componentes transversal  $\vec{E}_t$  y longitudinal  $\hat{z}E_z$ ,

$$\vec{E}(x, y, z) = \vec{E}(x, y) e^{-\gamma z} = [\vec{E}_t(x, y) + \hat{z}E_z(x, y)] e^{-\gamma z}. \quad (5.2)$$

Si introducimos la dependencia en la variable longitudinal,  $z$ , como muestra la expresión anterior, en la ecuación de Helmholtz se pueden separar los dos rotacionales en su parte transversal y longitudinal. Esto permite escribir una expresión de la ecuación de Helmholtz para el campo longitudinal y otra para el campo transversal,

$$\nabla_t \times (1/\mu_r \nabla_t \times \vec{E}_t) - \gamma 1/\mu_r (\nabla_t E_z + \gamma \vec{E}_t) = k_o^2 \epsilon_r \vec{E}_t \quad (5.3)$$

$$\nabla_t \times [1/\mu_r (\nabla_t E_z + \gamma \vec{E}_t) \times \hat{z}] = k_o^2 \epsilon_r E_z \hat{z} \quad (5.4)$$

Podemos utilizar esta formulación para calcular la constante de propagación  $\gamma$  cuando fijamos el número de onda de trabajo  $k_o$ , o lo que es lo mismo la frecuencia  $k_o = 2\pi f_o/c_o$ . Para ello, como indica [8] es conveniente realizar el siguiente cambio de variables, de modo que la constante de propagación aparezca solo en potencia de orden dos:

$$\vec{e}_t = \gamma \vec{E}_t; \quad e_z = E_z \quad (5.5)$$

$$\nabla_t \times (1/\mu_r \nabla_t \times \vec{e}_t) - \gamma^2 1/\mu_r (\nabla_t e_z + \vec{e}_t) = k_o^2 \epsilon_r \vec{e}_t \quad (5.6)$$

$$\gamma^2 \nabla_t \times [1/\mu_r (\nabla_t e_z + \vec{e}_t) \times \hat{z}] = \gamma^2 k_o^2 \epsilon_r e_z \hat{z}. \quad (5.7)$$

Para obtener las formas *débiles*, que permiten resolver el problema mediante el método de elementos finitos, se multiplican las expresiones anteriores por las funciones *test* y se integra en el dominio de cálculo.

$$\iint_{\Omega} T_s \cdot (\nabla_t \times (1/\mu_r \nabla_t \times \vec{e}_t)) ds - \gamma^2 / \mu_r \iint_{\Omega} T_s \cdot (\nabla_t e_z + \vec{e}_t) ds = k_o^2 \epsilon_r \iint_{\Omega} T_s \cdot \vec{e}_t ds \quad (5.8)$$

$$\gamma^2 \iint_{\Omega} \hat{z} T_s \cdot \nabla_t \times [1/\mu_r (\nabla_t e_z + \vec{e}_t) \times \hat{z}] ds = \gamma^2 k_o^2 \epsilon_r \iint_{\Omega} \hat{z} T_s \cdot e_z \hat{z} ds. \quad (5.9)$$

Discretizando el campo eléctrico de la misma manera que se ha realizado en la formulación escalar y en la formulación vectorial,  $e_z = \sum_i e_{zi} \alpha_{Li}$ ,  $\vec{e}_t = \sum_i e_{ti} \alpha_{\vec{N}i}$  y utilizando funciones test del mismo tipo que las utilizadas para la discretización del campo eléctrico, es decir,  $T_s = \alpha_{Lj}$  para el campo longitudinal y  $T_s = \alpha_{\vec{N}j}$  para el campo transversal, se obtiene

$$\begin{aligned} & \iint_{\Delta} \alpha_{\vec{N}j} \cdot (\nabla_t \times (1/\mu_r \nabla_t \times \sum_i e_{ti} \alpha_{\vec{N}i})) ds - \\ & \gamma^2 / \mu_r \iint_{\Delta} \alpha_{\vec{N}j} \cdot (\nabla_t \sum_i e_{zi} \alpha_{Li} + \sum_i e_{ti} \alpha_{\vec{N}i}) ds = \end{aligned} \quad (5.10)$$

$$k_o^2 \epsilon_r \iint_{\Delta} \alpha_{\vec{N}j} \cdot \sum_i e_{ti} \alpha_{\vec{N}i} ds$$

$$\begin{aligned} & \gamma^2 \iint_{\Delta} \hat{z} \alpha_{Lj} \cdot \nabla_t \times [1/\mu_r (\nabla_t \sum_i e_{zi} \alpha_{Li} + \sum_i e_{ti} \alpha_{\vec{N}i}) \times \hat{z}] ds = \\ & \gamma^2 k_o^2 \epsilon_r \iint_{\Delta} \hat{z} \alpha_{Lj} \cdot \sum_i e_{zi} \alpha_{Li} \hat{z} ds. \end{aligned} \quad (5.11)$$

Estas expresiones se pueden simplificar aplicando integración vectorial por partes

$$\iint_{\Omega} \vec{A} \cdot (\nabla \times \vec{B}) ds = \iint_{\Omega} (\nabla \times \vec{A}) \cdot \vec{B} ds - \int_{d\Omega} (\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \hat{n} dl$$

y el teorema de Green para un campo vectorial

$$\iint_{\Omega} \vec{A} \cdot (\nabla \times \nabla \times \vec{B}) ds = \iint_{\Omega} (\nabla \times \vec{A}) \cdot (\nabla \times \vec{B}) ds - \int_{d\Omega} (\vec{A} \times \nabla \times \vec{B}) \cdot \hat{n} dl$$

Con lo que obtenemos

$$\begin{aligned} & 1/\mu_r \sum_i e_{ti} \iint_{\Delta} (\nabla_t \times \alpha_{\vec{N}j}) \cdot (\nabla_t \times \alpha_{\vec{N}i}) ds - k_o^2 \epsilon_r \sum_i e_{ti} \iint_{\Delta} \alpha_{\vec{N}j} \cdot \alpha_{\vec{N}i} ds - \\ & - 1/\mu_r \sum_i e_{ti} \int_{d\Delta} (\alpha_{\vec{N}j} \times \nabla_t \times \alpha_{\vec{N}i}) dl - \\ & - \gamma^2 / \mu_r \sum_i e_{zi} \iint_{\Delta} \alpha_{\vec{N}j} \cdot \nabla_t \alpha_{Li} ds - \\ & - \gamma^2 / \mu_r \sum_i e_{ti} \iint_{\Delta} \alpha_{\vec{N}j} \cdot \alpha_{\vec{N}i} ds = 0 \end{aligned} \quad (5.12)$$

$$\begin{aligned}
 & \gamma^2/\mu_r \sum_i e_{zi} \iint_{\Delta} (\nabla_t \times \hat{z}\alpha_{Lj}) \cdot (\nabla_t \alpha_{Li} \times \hat{z}) ds + \\
 & + \gamma^2/\mu_r \sum_i e_{ti} \iint_{\Delta} (\nabla_t \times \hat{z}\alpha_{Lj}) \cdot (\alpha_{Ni} \times \hat{z}) ds - \\
 & - \gamma^2/\mu_r \sum_i e_{zi} \int_{d\Delta} \hat{z}\alpha_{Lj} \times \nabla_t \alpha_{Li} \times \hat{z} dl - \\
 & - \gamma^2/\mu_r \sum_i e_{ti} \int_{d\Delta} \hat{z}\alpha_{Lj} \times \alpha_{Ni} \times \hat{z} dl - \\
 & - \gamma^2 k_o^2 \epsilon_r \sum_i e_{zi} \iint_{\Delta} \hat{z}\alpha_{Lj} \cdot \alpha_{Li} \hat{z} ds = 0
 \end{aligned} \tag{5.13}$$

Donde los términos con integrales de línea, sobre el contorno de los elementos, se anulan debido a que sus contribuciones se contrarrestan con las contribuciones de los elementos adyacentes, o, en el caso de que un lado del elemento coincida con el borde del dominio, se anulará por las condiciones de contorno. Reorganizando los términos y escribiendo en forma matricial obtenemos el problema de autovalores mediante el cual se calcula la constante de propagación,

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1/\mu_r[S_t] - k_o^2 \epsilon_r [T_t] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_z \\ e_t \end{bmatrix} = -\gamma^2 \begin{bmatrix} 1/\mu_r[S_z] - k_o^2 \epsilon_r [T_z] & 1/\mu_r[B_{zt}] \\ 1/\mu_r[B_{tz}] & 1/\mu_r[T_t] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_z \\ e_t \end{bmatrix} \tag{5.14}$$

Donde

$$S_t = \iint_{\Delta} (\nabla_t \times \vec{\alpha}_{Ni}) \cdot (\nabla_t \times \vec{\alpha}_{Nj}) ds \tag{5.15a}$$

$$T_t = \iint_{\Delta} \vec{\alpha}_{Ni} \cdot \vec{\alpha}_{Nj} ds \tag{5.15b}$$

$$S_z = \iint_{\Delta} \nabla_t \alpha_{Li} \cdot \nabla_t \alpha_{Lj} ds \tag{5.15c}$$

$$T_z = \iint_{\Delta} \alpha_{Li} \cdot \alpha_{Lj} ds \tag{5.15d}$$

$$B_{tz} = \iint_{\Delta} \vec{\alpha}_{Ni} \cdot \nabla_t \alpha_{Lj} ds \tag{5.15e}$$

$$B_{zt} = \iint_{\Delta} \nabla_t \times \vec{\alpha}_{Ni} \cdot \alpha_{Lj} ds \tag{5.15f}$$

Mediante este sistema de autovalores se calcula la constante de propagación para una estructura dada, con las condiciones de contorno necesarias.

Un problema que aparece a la hora de obtener los resultados con este sistema, como se ha podido comprobar en la realización de este proyecto, es la aparición de modos espurios que no tienen sentido físico. Un método para solucionar los problemas de los modos espurios es realizar un escalado al sistema, de forma que los modos dominantes correspondan a los autovalores de mayor valor [6]. Escalando el sistema de autovalores asociado al análisis de dispersión se obtiene,

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} 1/\mu_r[T_t] & 1/\mu_r[B_{tz}] \\ 1/\mu_r[B_{zt}] & 1/\mu_r[S_z] - k_o^2 \epsilon_r [T_z] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_z \\ e_t \end{bmatrix} = \\
 & \frac{\theta^2}{\theta^2 - \gamma^2} \begin{bmatrix} 1/\mu_r[T_t] + (1/\mu_r[S_t] - k_o^2 \epsilon_r [T_t])/\theta^2 & 1/\mu_r[B_{tz}] \\ 1/\mu_r[B_{zt}] & 1/\mu_r[S_z] - k_o^2 \epsilon_r [T_z] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_z \\ e_t \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{5.16}$$

con  $\theta^2 = k_o^2 \mu_r^{(max)} \epsilon_r^{(max)}$  como limite superior de la constante de propagación al cuadrado  $\gamma^2$ ,  $\mu_r^{(max)}$  y  $\epsilon_r^{(max)}$  los limites superiores de la permitividad y permeabilidad relativa definidos en el

dominio. A partir del sistema escalado podemos obtener los valores de la constante de propagación mediante la siguiente expresión

$$\gamma^2 = \frac{1 - \lambda}{\lambda} \theta^2 \quad (5.17)$$

siendo  $\lambda$  el autovalor del sistema escalado.

Como en las anteriores formulaciones, el proceso anterior se puede realizar de la misma manera para el campo  $\vec{H}$  obteniendo un sistema formado por las mismas matrices  $S_t, T_t, S_z, T_z, B_{tz}$  y  $B_{zt}$ . Posteriormente habrá que aplicar las condiciones de contorno esenciales oportunas.

## 5.2. Formulación simplificada para medios homogéneos

Una simplificación de la formulación inhomogénea, igualando la constante de propagación a cero  $\gamma = 0$ , nos permite obtener la formulación combinada, en la que, debido a que  $\gamma^2 = k_c^2 - k_o^2$ , el autovalor a calcular pasa a ser el número de onda de corte  $k_c^2$ . Partiendo del sistema de ecuaciones para el  $E_z$  y  $\vec{E}_t$  e igualando la constante de propagación a cero, obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\nabla_t \times (1/\mu_r \nabla_t \times \vec{E}_t) = k_c^2 \epsilon_r \vec{E}_t \quad (5.18a)$$

$$\nabla_t \times (1/\mu_r \nabla_t E_z \times \hat{z}) = k_c^2 \epsilon_r E_z \hat{z} \quad (5.18b)$$

Aplicando el método para obtener la forma variacional como en las formulaciones anteriores, multiplicando por una función test e integrando en todo el dominio obtenemos:

$$\iint_{\Omega} T_s \cdot (\nabla_t \times (1/\mu_r \nabla_t \times \vec{E}_t)) ds = k_c^2 \epsilon_r \iint_{\Omega} T_s \cdot \vec{E}_t ds \quad (5.19)$$

$$\iint_{\Omega} \hat{z} T_s \cdot \nabla_t \times (1/\mu_r (\nabla_t E_z) \times \hat{z}) ds = k_c^2 \epsilon_r \iint_{\Omega} \hat{z} T_s \cdot E_z \hat{z} ds. \quad (5.20)$$

Aplicando la discretización de la misma manera que en el caso inhomogéneo, es decir,  $E_z = \sum_i E_{zi} \alpha_{Li}$ ,  $\vec{E}_t = \sum_i E_{ti} \alpha_{\vec{N}i}$  y utilizando funciones test del mismo tipo que las utilizadas para la discretización del campo eléctrico, es decir,  $T_s = \alpha_{Lj}$  para el campo longitudinal y  $T_s = \alpha_{\vec{N}j}$  para el campo transversal,

$$\iint_{\Delta} \alpha_{\vec{N}j} \cdot (\nabla_t \times (1/\mu_r \nabla_t \times \sum_i E_{ti} \alpha_{\vec{N}i})) ds = k_c^2 \epsilon_r \iint_{\Delta} \alpha_{\vec{N}j} \cdot \sum_i E_{ti} \alpha_{\vec{N}i} ds \quad (5.21)$$

$$\iint_{\Delta} \hat{z} \alpha_{Lj} \cdot \nabla_t \times [1/\mu_r (\nabla_t \sum_i E_{zi} \alpha_{Li}) \times \hat{z}] ds = k_c^2 \epsilon_r \iint_{\Delta} \hat{z} \alpha_{Lj} \cdot \sum_i E_{zi} \alpha_{Li} \hat{z} ds. \quad (5.22)$$

Este sistema puede reducirse aplicando las propiedades vectoriales realizadas en el problema inhomogéneo,

$$\begin{aligned} 1/\mu_r \sum_i E_{ti} \iint_{\Delta} (\nabla_t \times \alpha_{\vec{N}j}) \cdot (\nabla_t \times \alpha_{\vec{N}i}) ds - k_c^2 \epsilon_r \sum_i E_{ti} \iint_{\Delta} \alpha_{\vec{N}j} \cdot \alpha_{\vec{N}i} ds - \\ - 1/\mu_r \sum_i E_{ti} \int_{d\Delta} (\alpha_{\vec{N}j} \times \nabla_t \times \alpha_{\vec{N}i}) dl = 0 \end{aligned} \quad (5.23)$$

$$\begin{aligned} 1/\mu_r \sum_i E_{zi} \iint_{\Delta} (\nabla_t \times \hat{z} \alpha_{Lj}) \cdot (\nabla_t \alpha_{Li} \times \hat{z}) ds - 1/\mu_r \sum_i E_{zi} \int_{d\Delta} \hat{z} \alpha_{Lj} \times \nabla_t \alpha_{Li} \times \hat{z} dl \\ - k_c^2 \epsilon_r \sum_i E_{zi} \iint_{\Delta} \hat{z} \alpha_{Lj} \cdot \alpha_{Li} \hat{z} ds = 0 \end{aligned} \quad (5.24)$$

De la misma manera que en el problema inhomogéneo, los términos con integrales de línea se anulan, con lo que obtenemos,

$$1/\mu_r \sum_i E_{ti} \iint_{\Delta} (\nabla_t \times \alpha_{N_j}) \cdot (\nabla_t \times \alpha_{N_i}) ds - k_c^2 \epsilon_r \sum_i E_{ti} \iint_{\Delta} \alpha_{N_j} \cdot \alpha_{N_i} ds = 0 \quad (5.25)$$

$$1/\mu_r \sum_i E_{zi} \iint_{\Delta} (\nabla_t \times \hat{z} \alpha_{L_j}) \cdot (\nabla_t \alpha_{L_i} \times \hat{z}) ds - k_c^2 \epsilon_r \sum_i E_{zi} \iint_{\Delta} \hat{z} \alpha_{L_j} \cdot \alpha_{L_i} \hat{z} ds = 0 \quad (5.26)$$

Estas expresiones pueden escribirse en forma matricial,

$$\begin{bmatrix} 1/\mu_r [S_t] & 0 \\ 0 & 1/\mu_r [S_z] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_t \\ E_z \end{bmatrix} = k_c^2 \begin{bmatrix} \epsilon_r [T_t] & 0 \\ 0 & \epsilon_r [T_z] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_t \\ E_z \end{bmatrix} \quad (5.27)$$

Donde los términos  $[S_t]$ ,  $[S_z]$ ,  $[T_t]$ ,  $[T_z]$  son los mismos que los utilizados en la formulación homogénea. Resolviendo este problema matricial se obtienen los autovalores  $k_c^2$  y las componentes del campo longitudinal y transversal.

En el caso de haber realizado el procedimiento anterior utilizando el campo  $\vec{H}$ , las matrices  $[S_t]$ ,  $[S_z]$ ,  $[T_t]$ ,  $[T_z]$  serán las mismas a las obtenidas para el campo  $\vec{E}$ .

### 5.3. Modos según las condiciones de contorno

#### 5.3.1. Condiciones de contorno en la formulación simplificada para medios homogéneos

Como en las anteriores formulaciones presentadas, para resolver el problema de autovalores, tanto en la formulación simplificada como en la formulación general, es necesario imponer las condiciones de contorno convenientes.

De ésta manera, en un medio de transmisión formado por conductores perfectos y relleno de dieléctrico de forma homogénea, si se utiliza la formulación general para el campo  $E$ , será necesario imponer condiciones de contorno tipo Dirichlet  $\hat{n} \times \vec{E} = 0$  para obtener el campo eléctrico y utilizando la formulación general para el campo  $H$  será necesario aplicar condiciones de contorno tipo Neumann  $\hat{n} \times \nabla \times \vec{H} = 0$  para obtener el campo magnético.

Sin embargo, ya que en modos TE el campo eléctrico es nulo en la componente longitudinal pero no es nulo el campo magnético en la componente longitudinal, y en modos TM ocurre lo contrario, la componente longitudinal del campo magnético es nula pero no lo es la componente longitudinal del campo eléctrico, utilizando la formulación para el campo  $\vec{E}$  o para el campo  $\vec{H}$ , se obtiene el número de onda de corte de todos los modos TE y TM, pero con campos asociados diferentes.

Utilizando la formulación para el campo  $\vec{E}$  obtendremos la componente transversal del campo eléctrico de los modos TE y la componente longitudinal del campo eléctrico de los modos TM. Utilizando la formulación para el campo  $\vec{H}$  obtendremos la componente longitudinal del campo magnético de los modos TE y la componente transversal del campo magnético de los modos TM. Una forma de comprobar la bondad de la aplicación del método es analizar si en las componentes longitudinales que no existen los resultados del método arrojan un valor casi nulo.

#### 5.3.2. Condiciones de contorno en la formulación general

En una guía rectangular formada por un conductor perfecto y rellena por un dieléctrico hasta la mitad y la otra mitad rellena de aire, como indica [4], no se dan modos TE ni modos TM sino modos híbridos EH y HE. En estos modos no es nula la componente longitudinal de los

campos eléctrico y magnético excepto en un caso, a la frecuencia de corte. A esta frecuencia un campo predomina frente al otro, anulándose la componente longitudinal del campo magnético en el caso de los modos híbridos EH y la componente longitudinal del campo eléctrico en el caso de los modos híbridos HE.

Debido a la aparición de modos híbridos en una guía inhomogénea, utilizando la formulación para el campo  $\vec{E}$  con condiciones de contorno tipo Dirichlet  $\hat{n} \times \vec{E} = 0$  se obtiene la constante de propagación de todos los modos, tanto los híbridos EH como los HE, y los campos asociados son todas las componentes del campo eléctrico de todos los modos. Si utilizamos la formulación para el campo  $\vec{H}$  y aplicamos condiciones de contorno tipo Neumann  $\hat{n} \times \nabla \times \vec{H} = 0$  también se obtiene la constante de propagación de todos los modos y los campos asociados son todas las componentes del campo magnético de todos los modos, tanto los híbridos EH como los híbridos HE.



## 5.4. Resultados para guías homogéneas

En la siguiente sección se presentan los resultados obtenidos mediante la formulación general simplificada para guías homogéneas. Las tres primeras guías, las dos guías rectangulares y la guía circular, tienen resultado analítico y se presentan a modo de verificación del método. Las dos últimas guías, la guía tipo Ridge y tipo Double-Ridge, no tienen resultado analítico y han de analizarse mediante un método numérico, lo que presenta una aplicación práctica del método FEM.

### 5.4.1. Guía rectangular de prueba: formulación general vs simplificada

En las tablas 5.1, 5.2, 5.3, 5.4, 5.5, 5.6, 5.7, 5.8, 5.9 se muestra el valor del número de onda de corte para una guía de onda rectangular homogénea con dimensiones  $a=1\text{ m}$  y  $b=0.5\text{ m}$  utilizando la formulación general simplificada.

La figura 5.1 muestra el error relativo frente a los grados de libertad del problema. En las figuras 5.2, 5.3, 5.4, 5.5, 5.6, 5.7, 5.8, 5.9, 5.10 se representan las componentes longitudinales y transversales de los primeros modos en una guía rectangular.

Orden del elemento	número de celdas	Grados de libertad	Valor calculado [ $m^{-1}$ ]	Error relativo
1	100	231	3.13727670139	1.373810e-03
2	100	761	3.14159358983	2.980138e-07
3	100	1591	3.14159265609	7.944176e-10
1	400	861	3.14051545461	3.428831e-04
2	400	2921	3.14159271253	1.876065e-08

Tabla 5.1: Resultados para el modo  $TE_{10}$  con valor analítico  $\pi=3.14159265359\text{ m}^{-1}$ , utilizando la formulación para el campo  $\vec{E}$ .

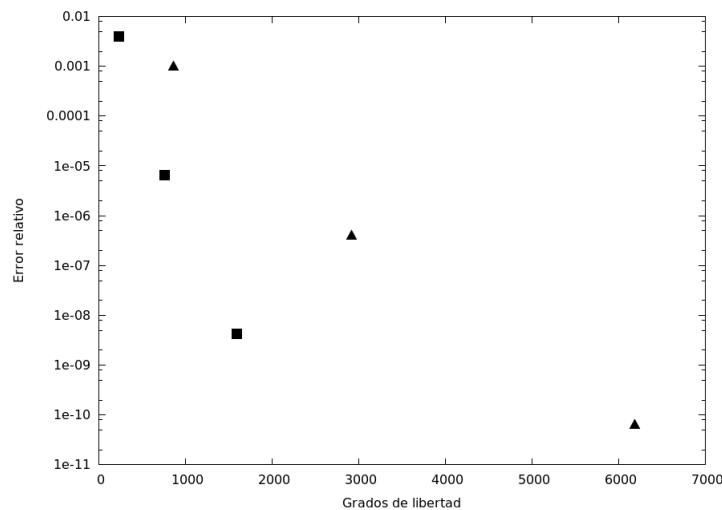


Figura 5.1: Error relativo frente a los grados de libertad del problema al aumentar el orden del elemento. Los valores representados mediante cuadrados corresponden al mallado de 100 elementos, los valores representados mediante triángulos corresponden al mallado de 400 elementos.

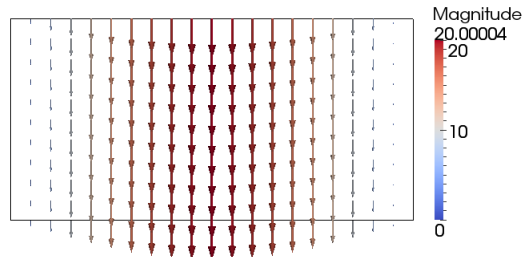


Figura 5.2: Componente transversal del campo eléctrico del modo  $TE_{10}$ .

Orden del elemento	número de celdas	Grados de libertad	Valor calculado [ $m^{-1}$ ]	Error relativo
1	100	231	3.15420482676	4.014579e-03
2	100	761	3.14161283809	6.424925e-06
3	100	1591	3.14159266689	4.232596e-09
1	400	861	3.14479820163	1.020358e-03
2	400	2921	3.1415939501	4.126912e-07
3	400	6181	3.1415926538	6.583720e-11

Tabla 5.2: Resultados para el modo  $TE_{10}$  con valor analítico  $\pi=3.14159265359 m^{-1}$ , utilizando la formulación para el campo  $\vec{H}$ .

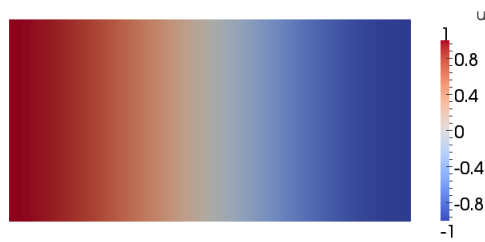


Figura 5.3: Componente longitudinal del campo magnético modo  $TE_{10}$ .

Orden del elemento	número de celdas	Grados de libertad	Valor calculado [ $m^{-1}$ ]	Error relativo
1	100	231	6.24793935165	5.609568e-03
2	100	761	6.28321439972	4.630221e-06
3	100	1591	6.28318562154	5.003229e-08
1	400	861	6.27457940688	1.369672e-03
2	400	2921	6.28318718386	2.986834e-07

Tabla 5.3: Resultados para el modo  $TE_{20}$  con valor analítico  $2\pi=6.28318530718 m^{-1}$ , utilizando la formulación para el campo  $\vec{E}$ .

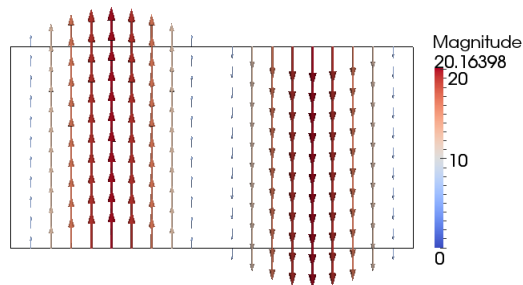


Figura 5.4: Componente transversal del campo eléctrico del modo  $TE_{20}$ .

Orden del elemento	número de celdas	Grados de libertad	Valor calculado [ $m^{-1}$ ]	Error relativo
1	100	231	6.38331559029	1.593623e-02
2	100	761	6.28382080654	1.011429e-04
3	100	1591	6.28318699516	2.686501e-07
1	400	861	6.3087756338	4.072827e-03
2	400	2921	6.28322662192	6.575445e-06

Tabla 5.4: Resultados para el modo  $TE_{20}$  con valor analítico  $2\pi=6.28318530718 m^{-1}$ , utilizando la formulación para el campo  $\vec{H}$ .

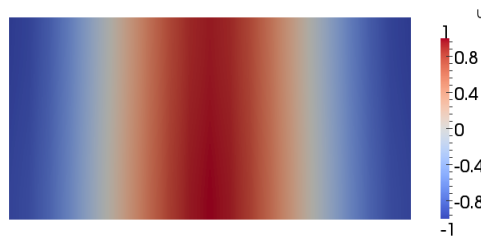


Figura 5.5: Componente longitudinal del campo magnético del modo  $TE_{20}$ .

Orden del elemento	número de celdas	Grados de libertad	Valor calculado [ $m^{-1}$ ]	Error relativo
1	100	231	6.24882121789	5.469215e-03
2	100	761	6.2832143633	4.624425e-06
3	100	1591	6.28318561735	4.936473e-08
1	400	861	6.27451981354	1.379156e-03
2	400	2921	6.2831871834	2.986090e-07

Tabla 5.5: Resultados para el modo  $TE_{01}$  con valor analítico  $2\pi=6.28318530718 m^{-1}$ , utilizando la formulación para el campo  $\vec{E}$ .

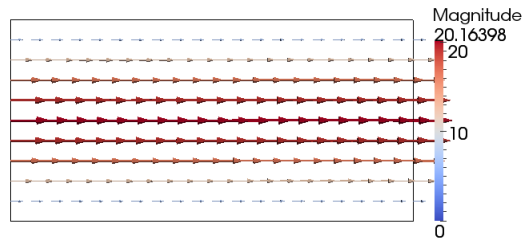


Figura 5.6: Componente transversal del campo eléctrico del modo  $TE_{01}$ .

Orden del elemento	número de celdas	Grados de libertad	Valor calculado [ $m^{-1}$ ]	Error relativo
1	100	231	6.38485454716	1.618116e-02
2	100	761	6.28383536114	1.034593e-04
3	100	1591	6.28318703089	2.743365e-07
1	400	861	6.30887858318	4.089212e-03
2	400	2921	6.28322709304	6.650426e-06

Tabla 5.6: Resultados para el modo  $TE_{01}$  con valor analítico  $2\pi=6.28318530718 m^{-1}$ , utilizando la formulación para el campo  $\vec{H}$ .

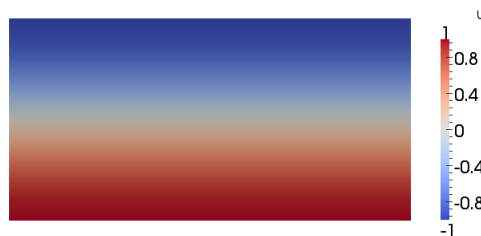


Figura 5.7: Componente longitudinal campo magnético del modo  $TE_{01}$ .

Orden del elemento	número de celdas	Grados de libertad	Valor calculado [ $m^{-1}$ ]	Error relativo
1	100	231	7.02266406197	3.061531e-04
2	100	761	7.0251720508	5.086536e-05
3	100	1591	7.02481718703	3.496158e-07
1	400	861	7.02432044536	7.036281e-05
2	400	2921	7.02483721227	3.200259e-06

Tabla 5.7: Resultados para el modo  $TM_{11}$  con valor analítico  $\sqrt{\pi^2 + 4\pi^2} = 7.02481473104 m^{-1}$ , utilizando la formulación para el campo  $\vec{E}$ .

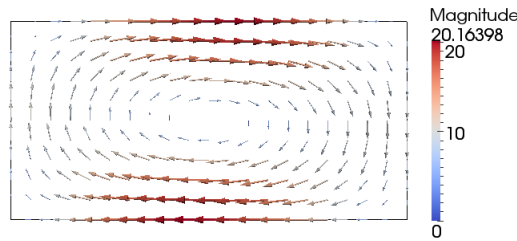


Figura 5.8: Componente transversal del campo magnético del modo  $TM_{11}$ .

Orden del elemento	número de celdas	Grados de libertad	Valor calculado [ $m^{-1}$ ]	Error relativo
1	100	231	7.02346520201	1.921088e-04
2	100	761	7.02516115871	4.931485e-05
3	100	1591	7.0248171518	3.446015e-07
1	400	861	7.02437609295	6.244123e-05
2	400	2921	7.02483687612	3.152408e-06

Tabla 5.8: Resultados para el modo  $TE_{11}$  con valor analítico  $\sqrt{\pi^2 + 4\pi^2} = 7.02481473104 m^{-1}$ , utilizando la formulación para el campo  $\vec{E}$ .

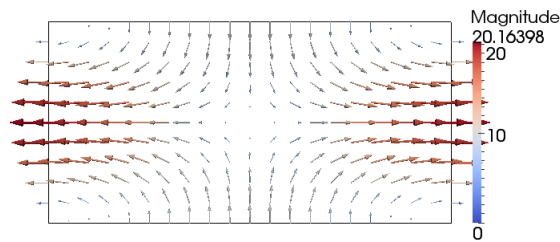


Figura 5.9: Componente transversal del campo eléctrico del modo  $TE_{11}$ .

Orden del elemento	número de celdas	Grados de libertad	Valor calculado [ $m^{-1}$ ]	Error relativo
1	100	231	7.21014606427	2.638238e-02
2	100	761	7.02644348725	2.318575e-04
3	100	1591	7.0248210564	9.004307e-07
1	400	861	7.07202543036	6.720561e-03
2	400	2921	7.02492151593	1.520110e-05

Tabla 5.9: Resultados para el modo  $TE_{11}$  con valor analítico  $\sqrt{\pi^2 + 4\pi^2} = 7.02481473104 \text{ m}^{-1}$ , utilizando la formulación para el campo  $\vec{H}$ .

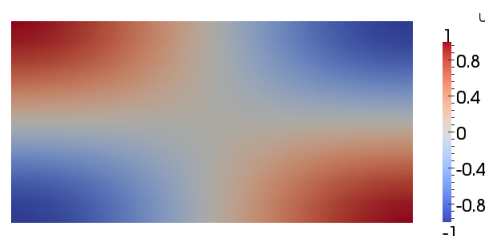


Figura 5.10: Componente longitudinal del campo magnético del modo  $TE_{11}$ .

### 5.4.2. Guía WR-90

En las tablas 5.10, 5.11 se muestra el valor de las frecuencias de corte en una guía rectangular tipo WR-90 rellena de aire, calculadas utilizando la formulación general.

En las figuras 5.11, 5.12 se representan las componentes longitudinales y transversales de los primeros modos en una guía rectangular tipo WR-90.

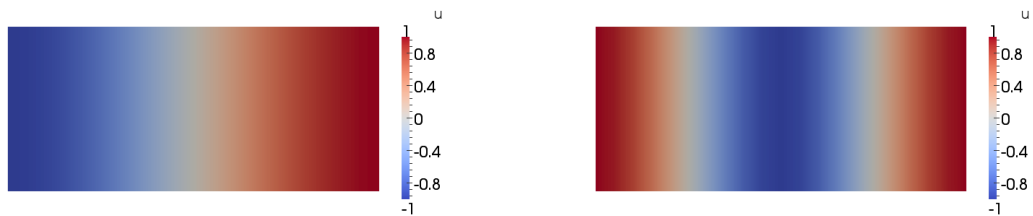
Modo	Orden del elemento	número de celdas	Grados de libertad	Valor calculado [Hz]
$TE_{10}$	1	100	231	6.58367e+09
$TE_{20}$	1	100	231	1.33247e+10
$TE_{10}$	1	400	861	6.56397e+09
$TE_{20}$	1	400	861	1.31680e+10
$TE_{10}$	2	100	761	6.55731e+09
$TE_{20}$	2	100	761	1.31159e+10
$TE_{10}$	2	400	2921	6.55727e+09
$TE_{20}$	2	400	2921	1.31146e+10

Tabla 5.10: Resultados de las frecuencias de corte para una guía WR-90, cuyos valores analíticos son  $6.5571e+09$  Hz para el modo  $TE_{10}$  y  $1.3114e+10$  Hz para el modo  $TE_{20}$ , utilizando la formulación para el campo  $\vec{H}$ .

Modo	Orden del elemento	número de celdas	Grados de libertad	Valor calculado [Hz]
$TE_{10}$	1	100	231	6.55108e+09
$TE_{20}$	1	100	231	1.30640e+10
$TE_{10}$	1	400	861	6.55573e+09
$TE_{20}$	1	400	861	1.31021e+10
$TE_{10}$	2	100	761	6.55728e+09
$TE_{20}$	2	100	761	1.31147e+10
$TE_{10}$	2	400	2921	6.55727e+09
$TE_{20}$	2	400	2921	1.31146e+10

Tabla 5.11: Resultados de las frecuencias de corte para una guía WR-90, cuyos valores analíticos son  $6.5571e+09$  Hz para el modo  $TE_{10}$  y  $1.3114e+10$  Hz para el modo  $TE_{20}$ , utilizando la formulación para el campo  $\vec{E}$ .

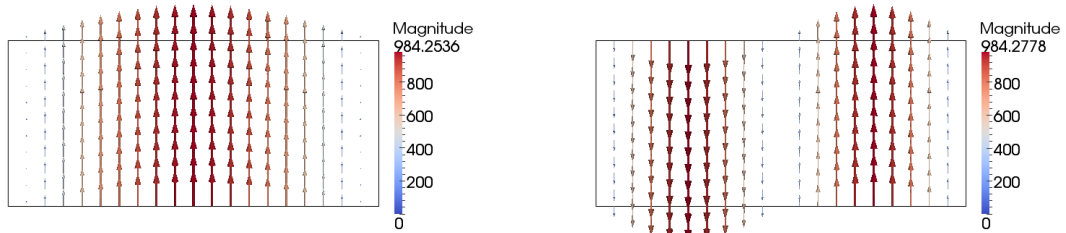




(a) Modo  $TE_{10}$

(b) Modo  $TE_{20}$

Figura 5.11: Componentes longitudinales del campo magnético en una guía tipo WR-90.



(a) Modo  $TE_{10}$

(b) Modo  $TE_{20}$

Figura 5.12: Componentes transversales del campo eléctrico en una guía tipo WR-90.

### 5.4.3. Guía circular en la banda X

En las tablas 5.12, 5.13 se muestra el valor de la frecuencia de corte de los primeros modos en una guía circular para la banda X rellena de aire, calculadas utilizando la formulación general simplificada.

En las figuras 5.13, 5.14 se representan las componentes longitudinales y transversales de los primeros modos en una guía circular.

Como se observa en las figuras 5.13a y 5.13b y en las figuras 5.14a y 5.14b, mediante la formulación general simplificada se obtienen modos degenerados.

Modo	Orden del elemento	número de celdas	Grados de libertad	Valor calculado [Hz]
$TE_{11a}$	1	100	232	7.46707e+09
$TE_{11b}$	1	100	232	7.46913e+09
$TM_{01}$	1	100	232	9.75857e+09
$TE_{21}$	1	100	232	1.25355e+10
$TE_{11a}$	2	100	772	7.41934e+09
$TE_{11b}$	2	100	772	7.41938e+09
$TM_{01}$	2	100	772	9.69050e+09
$TE_{21}$	2	100	772	1.23102e+10
$TE_{11a}$	1	400	888	7.39622e+09
$TE_{11b}$	1	400	888	7.39647e+09
$TM_{01}$	1	400	888	9.66151e+09
$TE_{21}$	1	400	888	1.23086e+10
$TE_{11a}$	2	400	3038	7.38505e+09
$TE_{11b}$	2	400	3038	7.38505e+09
$TM_{01}$	2	400	3038	9.64581e+09
$TE_{21}$	2	400	3038	1.22508e+10

Tabla 5.12: Resultados de las frecuencias de corte para una guía circular, cuyos valores analíticos son  $7.3723e+09$  Hz para el modo  $TE_{11}$ ,  $9.6308e+09$  Hz para el modo  $TM_{01}$  y  $1.223e+10$  Hz para el modo  $TE_{21}$ , utilizando la formulación para el campo  $\vec{H}$ .

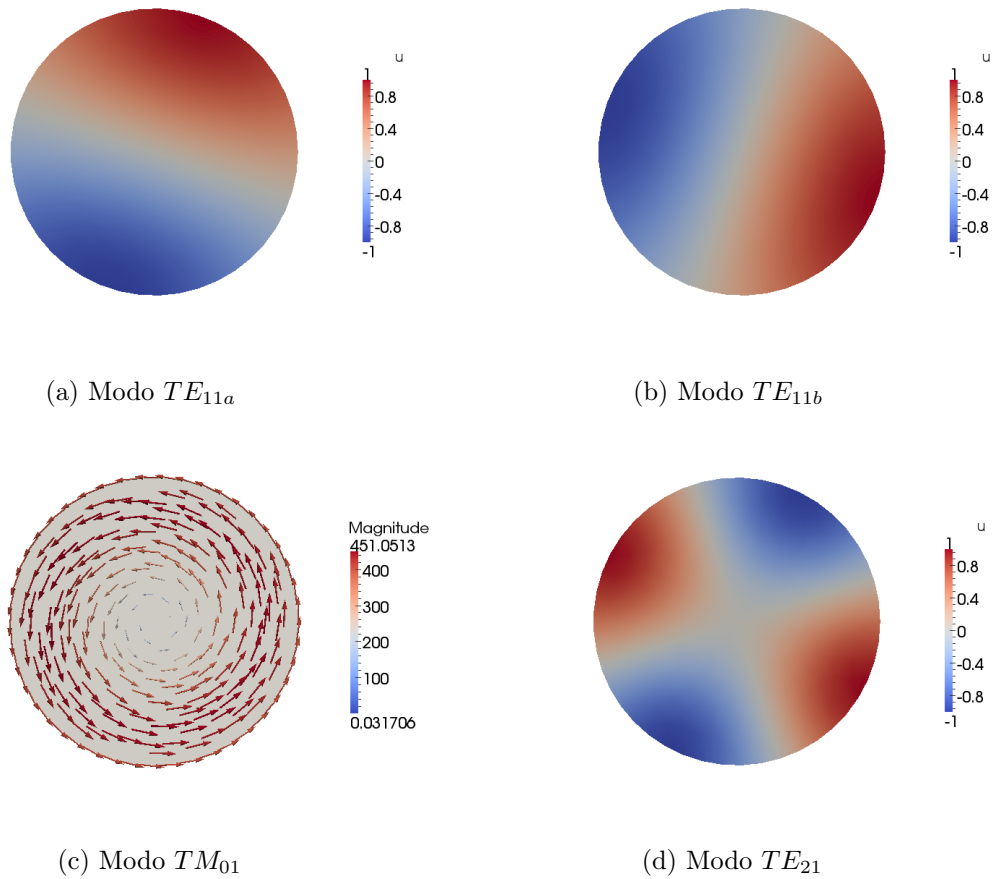


Figura 5.13: Resultados para una guía circular sin imponer condiciones de contorno. Componente longitudinal del campo magnético para los modos TE y componente transversal del campo magnético para los modos TM.

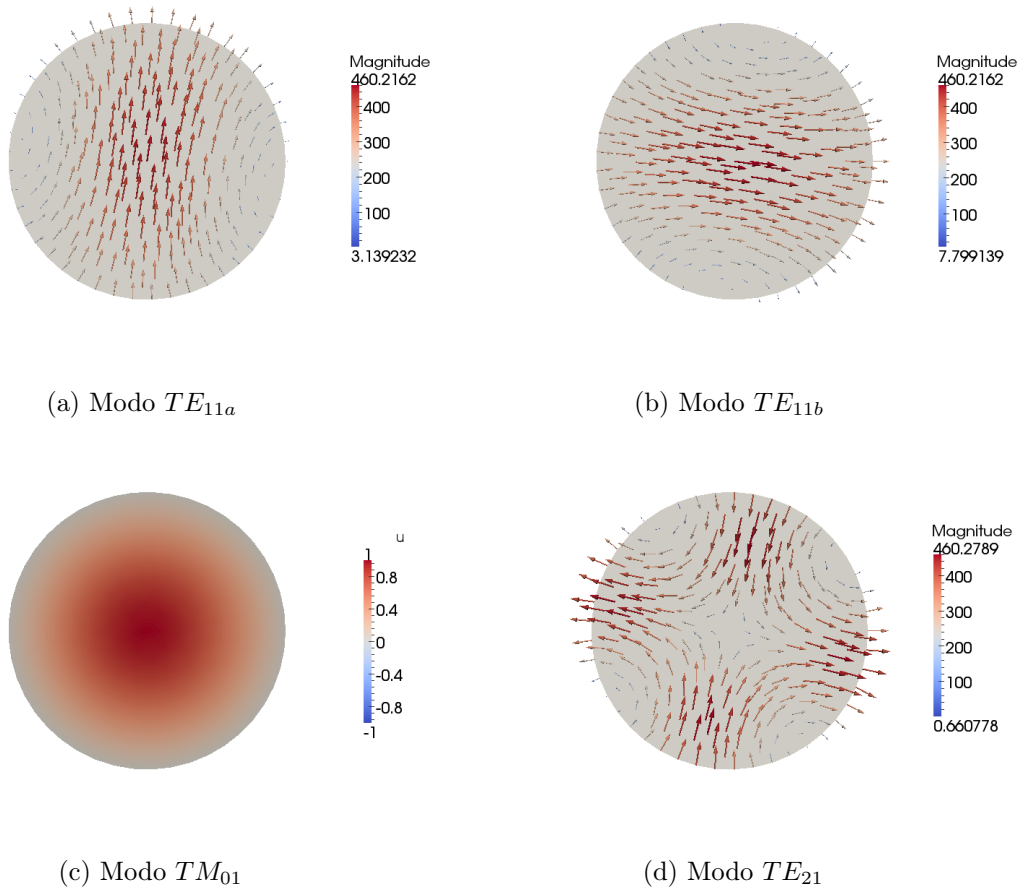


Figura 5.14: Resultados para una guía circular cuando se imponen condiciones de contorno tipo Dirichlet. Componente transversal del campo eléctrico para los modos TE y componente longitudinal del campo eléctrico para los modos TM.

Modo	Orden del elemento	número de celdas	Grados de libertad	Valor calculado [Hz]
$TE_{11a}$	1	100	232	7.43560e+09
$TE_{11b}$	1	100	232	7.43638e+09
$TM_{01}$	1	100	232	9.76389e+09
$TE_{21}$	1	100	232	1.23514e+10
$TE_{11a}$	2	100	772	7.41758e+09
$TE_{11b}$	2	100	772	7.41778e+09
$TM_{01}$	2	100	772	9.69659e+09
$TE_{21}$	2	100	772	1.23032e+10
$TE_{11a}$	1	400	888	7.38957e+09
$TE_{11b}$	1	400	888	7.39033e+09
$TM_{01}$	1	400	888	9.66652e+09
$TE_{21}$	1	400	888	1.22625e+10
$TE_{11a}$	2	400	3038	7.38483e+09
$TE_{11b}$	2	400	3038	7.38484e+09
$TM_{01}$	2	400	3038	9.64651e+09
$TE_{21}$	2	400	3038	1.22501e+10

Tabla 5.13: Resultados de las frecuencias de corte para una guía circular, cuyos valores analíticos son  $7.3723e+09$  Hz para el modo  $TE_{11}$ ,  $9.6308e+09$  Hz para el modo  $TM_{01}$  y  $1.223e+10$  Hz para el modo  $TE_{21}$ , utilizando la formulación para el campo  $\vec{E}$ .

### 5.4.4. Guía Ridge

En las tablas 5.14, 5.15, 5.16, 5.17 se muestra el valor de las frecuencias de corte de los primeros modos en una guía tipo Ridge para la banda X rellena de aire, utilizando la formulación general. En la última columna de la tabla se ha añadido los valores obtenidos utilizando el método GTR [9], como referencia.

En la figura 5.15, 5.16 se representan las componentes longitudinales y transversales de los primeros modos en una guía tipo Ridge.

En las figuras 5.16a y 5.16b se observan aproximaciones erróneas del campo eléctrico en la esquina interior de la guía, como se ha observado en los resultados de la formulación vectorial.

Modo	Orden del elemento	número de celdas	Grados de libertad	Valor calculado [Hz]	Valor de referencia [Hz]
$TE_1$	1	319	702	4.80922e+09	4.78414e+09
$TE_2$	1	319	702	1.50936e+10	1.49897e+10
$TE_3$	1	319	702	2.16361e+10	2.14809e+10
$TE_4$	1	319	702	2.16426e+10	2.14809e+10
$TE_5$	1	319	702	2.22485e+10	2.21023e+10
$TE_6$	1	319	702	2.58462e+10	2.55325e+10
$TE_7$	1	319	702	2.99687e+10	2.95533e+10
$TE_1$	2	319	2360	4.79910e+09	4.78414e+09
$TE_2$	2	319	2360	1.50381e+10	1.49897e+10
$TE_3$	2	319	2360	2.14854e+10	2.14809e+10
$TE_4$	2	319	2360	2.14894e+10	2.14809e+10
$TE_5$	2	319	2360	2.21036e+10	2.21023e+10
$TE_6$	2	319	2360	2.55476e+10	2.55325e+10
$TE_7$	2	319	2360	2.95685e+10	2.95533e+10

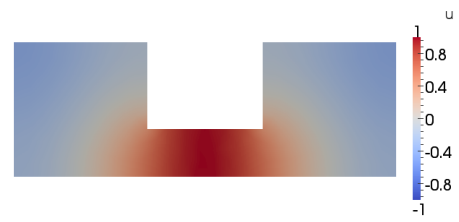
Tabla 5.14: Resultados de las frecuencias de corte de los modos TE para una guía Ridge, utilizando la formulación para el campo  $\vec{H}$ .

Modo	Orden del elemento	número de celdas	Grados de libertad	Valor calculado [Hz]	Valor de referencia [Hz]
$TM_1$	1	319	702	3.00234e+10	3.00817e+10
$TM_2$	1	319	702	3.00248e+10	3.00817e+10
$TM_1$	2	319	2360	3.00716e+10	3.00817e+10
$TM_2$	2	319	2360	3.00722e+10	3.00817e+10

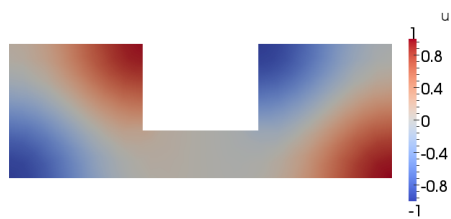
Tabla 5.15: Resultados de las frecuencias de corte de los modos TM para una guía Ridge, utilizando la formulación para el campo  $\vec{H}$ .



(a) Modo  $TE_1$



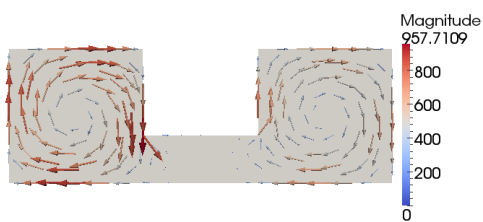
(b) Modo  $TE_2$



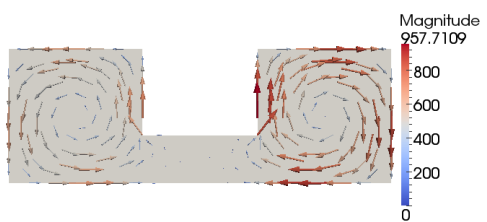
(c) Modo  $TE_3$



(d) Modo  $TE_4$



(e) Modo  $TM_1$



(f) Modo  $TM_2$

Figura 5.15: Resultados para una guía Ridge utilizando la formulación para el campo  $\vec{H}$ . Componente longitudinal del campo magnético para los modos TE y componente transversal del campo magnético para los modos TM.

Modo	Orden del elemento	número de celdas	Grados de libertad	Valor calculado [Hz]	Valor de referencia [Hz]
$TE_1$	1	319	702	4.75575e+09	4.78414e+9
$TE_2$	1	319	702	1.48753e+10	1.49897e+10
$TE_3$	1	319	702	2.14529e+10	2.14809e+10
$TE_4$	1	319	702	2.14543e+10	2.14809e+10
$TE_5$	1	319	702	2.21058e+10	2.21023e+10
$TE_6$	1	319	702	2.54102e+10	2.55325e+10
$TE_7$	1	319	702	2.94606e+10	2.95533e+10
$TE_1$	2	319	2360	4.77455e+09	4.78414e+9
$TE_2$	2	319	2360	1.49204e+10	1.49897e+10
$TE_3$	2	319	2360	2.14767e+10	2.14809e+10
$TE_4$	2	319	2360	2.14798e+10	2.14809e+10
$TE_5$	2	319	2360	2.21019e+10	2.21023e+10
$TE_6$	2	319	2360	2.55111e+10	2.55325e+10
$TE_7$	2	319	2360	2.95370e+10	2.95533e+10

Tabla 5.16: Resultados de las frecuencias de corte de los modos TE para una guía Ridge, utilizando la formulación para el campo  $\vec{E}$ .

Modo	Orden del elemento	número de celdas	Grados de libertad	Valor calculado [Hz]	Valor de referencia [Hz]
$TM_1$	1	319	702	3.04878e+10	3.00817e+10
$TM_2$	1	319	702	3.04894e+10	3.00817e+10
$TM_1$	2	319	2360	3.00978e+10	3.00817e+10
$TM_2$	2	319	2360	3.00983e+10	3.00817e+10

Tabla 5.17: Resultados de las frecuencias de corte de los modo TM para una guía Ridge, utilizando la formulación para el campo  $\vec{E}$ .



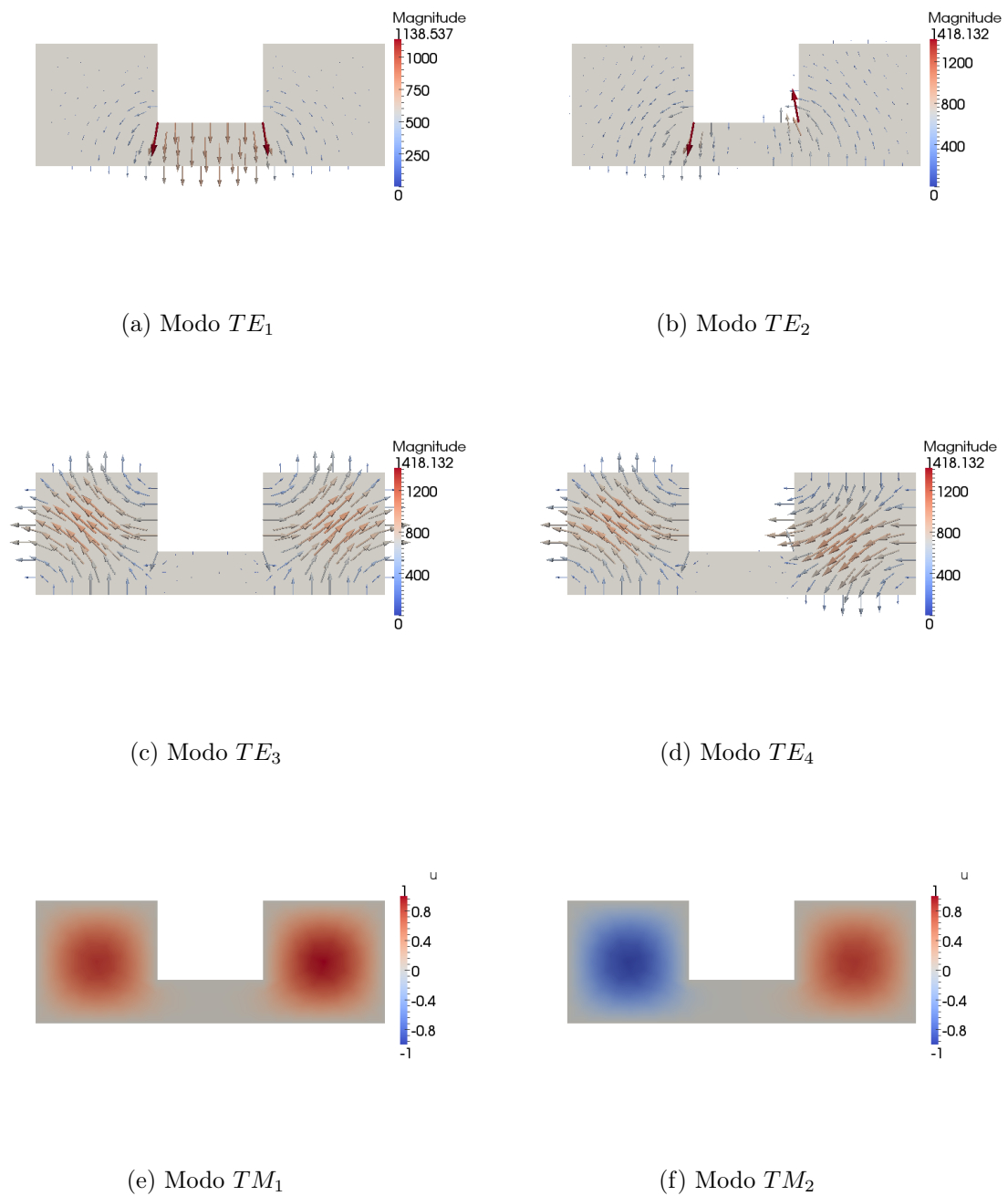


Figura 5.16: Resultados para una guía Ridge cuando se imponen condiciones de contorno tipo Dirichlet. Componente transversal del campo eléctrico para los modos TE y componente longitudinal del campo eléctrico para los modos TM.

### 5.4.5. Guía Double-Ridge

En las tablas 5.18, 5.19, 5.20, 5.21 se muestra el valor de la frecuencia de corte de los primeros modos en una guía tipo Double-Ridge para la banda X rellena de aire, calculadas utilizando la formulación general. En la última columna de la tabla se ha añadido los valores obtenidos utilizando el método GTR [9], como referencia.

En las figuras 5.17 5.18 se representan las componentes longitudinales y transversales de los primeros modos en una guía tipo Double-Ridge. Como se observa en las componentes transversales, el método obtiene aproximaciones erróneas del campo en la esquina interior de la guía, como se ha observado en los resultados de la formulación vectorial.

Modo	Orden del elemento	número de celdas	Grados de libertad	Valor calculado [Hz]	Valor de referencia [Hz]
$TE_1$	1	736	1569	4.82798e+09	4.786364e+09
$TE_2$	1	736	1569	1.11446e+10	1.1087171e+10
$TE_3$	1	736	1569	1.11752e+10	1.1114199e+10
$TE_4$	1	736	1569	1.51833e+10	1.4989748e+10
$TE_5$	1	736	1569	2.16126e+10	
$TE_6$	1	736	1569	2.16205e+10	
$TE_7$	1	736	1569	2.16949e+10	
$TE_8$	1	736	1569	2.43562e+10	
$TE_9$	1	736	1569	2.44398e+10	
$TE_{10}$	1	736	1569	2.58312e+10	
$TE_1$	2	736	5345	4.79125e+09	4.786364e+09
$TE_2$	2	736	5345	1.10937e+10	1.1087171e+10
$TE_3$	2	736	5345	1.11210e+10	1.1114199e+10
$TE_4$	2	736	5345	1.50092e+10	1.4989748e+10
$TE_5$	2	736	5345	2.14856e+10	
$TE_6$	2	736	5345	2.14897e+10	
$TE_7$	2	736	5345	2.18738e+10	
$TE_8$	2	736	5345	2.41727e+10	
$TE_9$	2	736	5345	2.42452e+10	
$TE_{10}$	2	736	5345	2.55489e+10	

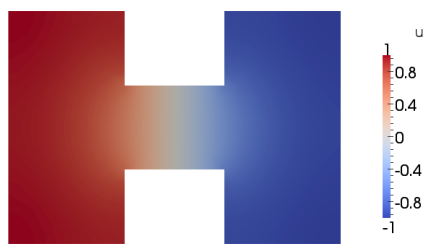
Tabla 5.18: Resultados de las frecuencias de corte para una guía Double-Ridge, utilizando la formulación para el campo  $\vec{H}$ .

Modo	Orden del elemento	número de celdas	Grados de libertad	Valor calculado [Hz]	Valor de referencia [Hz]
$TM_1$	1	736	1569	2.19877e+10	2.18991256e+10
$TM_2$	1	736	1569	2.22248e+10	2.21698466e+10
$TM_3$	1	736	1569	2.99452e+10	3.0081782e+10
$TE_4$	1	736	1569	3.00258e+10	3.0082352e+10
$TM_1$	2	736	5345	2.21035e+10	2.18991256e+10
$TM_2$	2	736	5345	2.21460e+10	2.21698466e+10
$TM_3$	2	736	5345	2.95690e+10	3.0081782e+10
$TM_4$	2	736	5345	3.00706e+10	3.0082352e+10

Tabla 5.19: Resultados de las frecuencias de corte para una guía Double-Ridge, utilizando la formulación para el campo  $\vec{H}$ .

Modo	Orden del elemento	número de celdas	Grados de libertad	Valor calculado [Hz]	Valor de referencia [Hz]
$TE_1$	1	736	1569	4.74027e+09	4.786364e+09
$TE_2$	1	736	1569	1.10424e+10	1.1087171e+10
$TE_3$	1	736	1569	1.10660e+10	1.1114199e+10
$TE_4$	1	736	1569	1.48142e+10	1.4989748e+10
$TE_5$	1	736	1569	2.14570e+10	
$TE_6$	1	736	1569	2.14597e+10	
$TE_7$	1	736	1569	2.21024e+10	
$TE_8$	1	736	1569	2.41343e+10	
$TE_9$	1	736	1569	2.41962e+10	
$TE_{10}$	1	736	1569	2.54337e+10	
$TE_1$	2	736	5345	4.77526e+09	4.786364e+09
$TE_2$	2	736	5345	1.10776e+10	1.1087171e+10
$TE_3$	2	736	5345	1.11038e+10	1.1114199e+10
$TE_4$	2	736	5345	1.49495e+10	1.4989748e+10
$TE_5$	2	736	5345	2.14768e+10	
$TE_6$	2	736	5345	2.14799e+10	
$TE_7$	2	736	5345	2.19490e+10	
$TE_8$	2	736	5345	2.41620e+10	
$TE_9$	2	736	5345	2.42315e+10	
$TE_{10}$	2	736	5345	2.55127e+10	

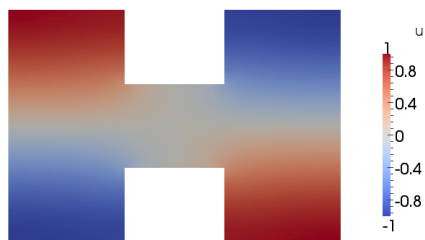
Tabla 5.20: Resultados de las frecuencias de corte para una guía Double-Ridge, utilizando la formulación para el campo  $\vec{E}$ .



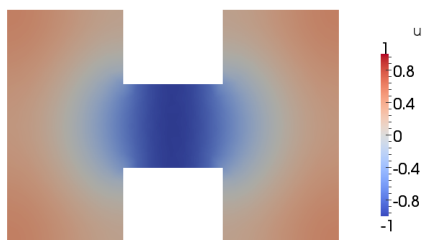
(a) Modo  $TE_1$



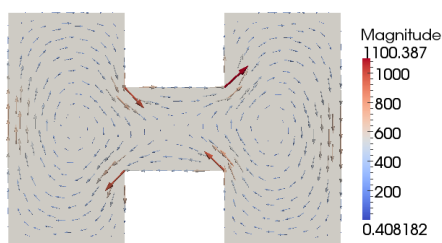
(b) Modo  $TE_2$



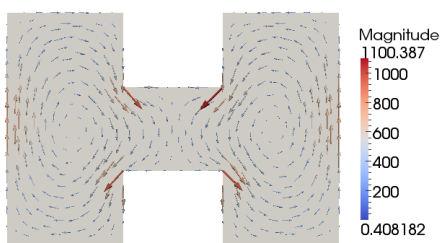
(c) Modo  $TE_3$



(d) Modo  $TE_4$

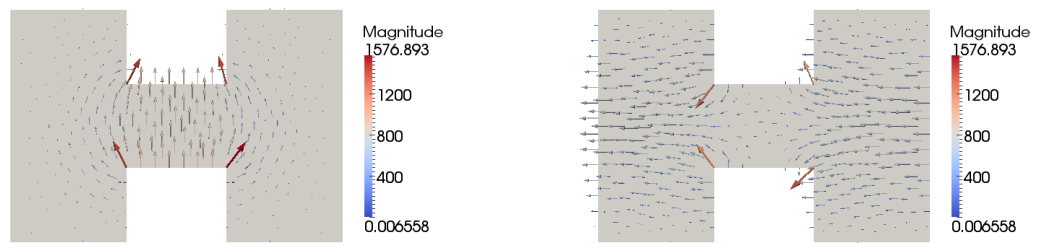


(e) Modo  $TM_1$



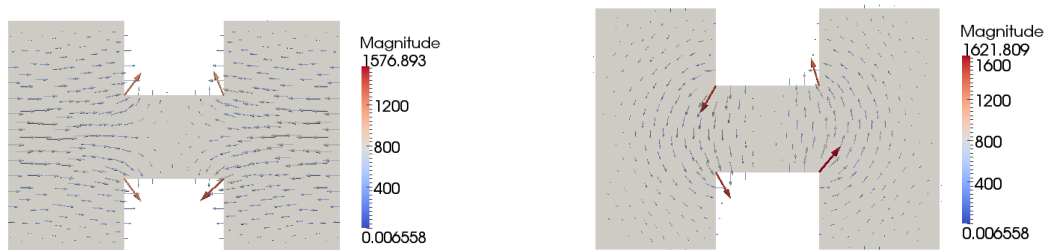
(f) Modo  $TM_2$

Figura 5.17: Resultados para una guía Double-Ridge utilizando la formulación para el campo  $\vec{H}$ . Componente longitudinal del campo magnético para los modos TE y componente transversal del campo magnético para los modos TM.



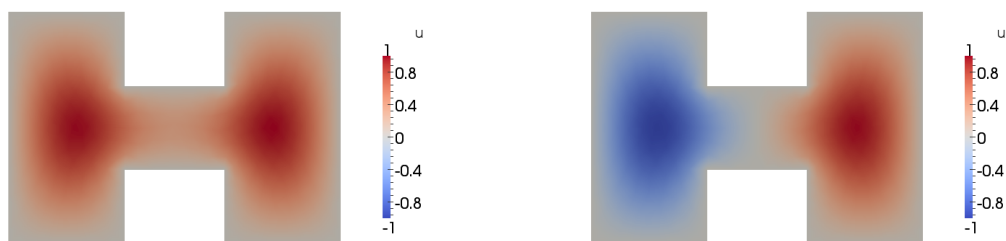
(a) Modo  $TE_1$

(b) Modo  $TE_2$



(c) Modo  $TE_3$

(d) Modo  $TE_4$



(e) Modo  $TM_1$

(f) Modo  $TM_2$

Figura 5.18: Resultados para una guía Double-Ridge utilizando la formulación para el campo  $\vec{E}$ . Componente transversal del campo eléctrico para los modos TE y componente longitudinal del campo eléctrico para los modos TM.

Modo	Orden del elemento	número de celdas	Grados de libertad	Valor calculado [Hz]	Valor de referencia [Hz]
$TM_1$	1	736	1569	2.22459e+10	2.18991256e+10
$TM_2$	1	736	1569	2.24968e+10	2.21698466e+10
$TM_3$	1	736	1569	2.94520e+10	3.0081782e+10
$TM_4$	1	736	1569	3.04507e+10	3.0082352e+10
$TM_1$	2	736	5345	2.21018e+10	2.18991256e+10
$TM_2$	2	736	5345	2.22130e+10	2.21698466e+10
$TM_3$	2	736	5345	2.95379e+10	3.0081782e+10
$TM_4$	2	736	5345	3.00967e+10	3.0081782e+10

Tabla 5.21: Resultados de las frecuencias de corte para una guía Double-Ridge, utilizando la formulación para el campo  $\vec{E}$ .

## 5.5. Resultados para guías inhomogéneas

Utilizando la formulación general se han obtenido las curvas de dispersión de tres estructuras, una guía rectangular vacía con dimensiones  $a=1\text{ m}$  y  $b=0.5\text{ m}$  como la que se muestra en la figura 5.19, una guía rectangular rellena de dieléctrico hasta la mitad con dimensiones  $a=1\text{ m}$  y  $b=0.5\text{ m}$  como la que se muestra en la figura 5.20 y una línea microstrip como la que se muestra en la figura 5.21.

En las figuras 5.22, 5.23, 5.24 se muestran las curvas de dispersión de estas tres estructuras, calculadas mediante la formulación general. Las curvas de dispersión representan el valor de la constante de propagación compleja  $\gamma$  descompuesta en su parte real  $\alpha$  y su parte imaginaria  $\beta$ . Ya que no se han tenido en cuenta las pérdidas de los conductores ni en el dieléctrico, valores de  $\alpha$  distintos de cero indican que los modos no se propagan y valores distintos de cero de  $\beta$  indican que los modos se propagan por el medio de transmisión.

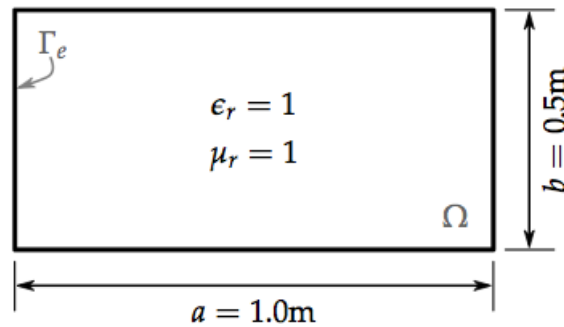


Figura 5.19: Esquema de la guía rectangular vacía empleada en la simulación. Imagen obtenida de [1].

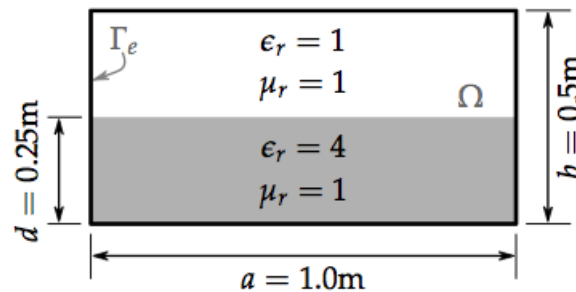


Figura 5.20: Esquema de la guía rectangular rellena hasta la mitad empleada en la simulación. Imagen obtenida de [1].

En las figuras 5.25, 5.26 se muestran las componentes del campo eléctrico del primer modo a diferentes frecuencias en la guía rectangular inhomogénea, calculadas mediante la formulación general.

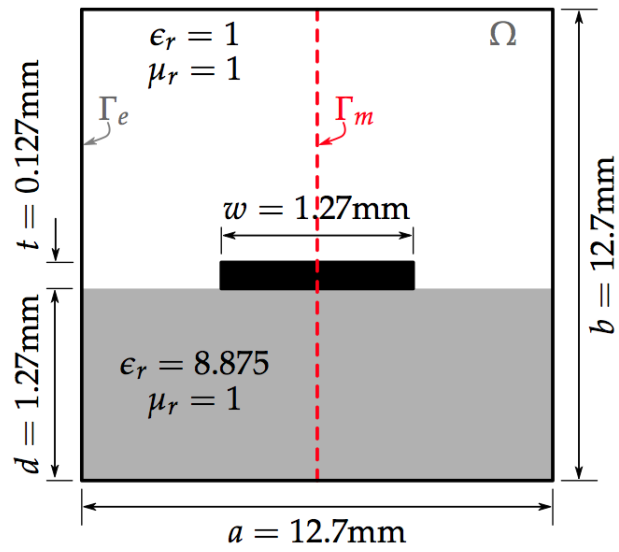


Figura 5.21: Esquema de la línea microstrip empleada en la simulación. Imagen obtenida de [1].

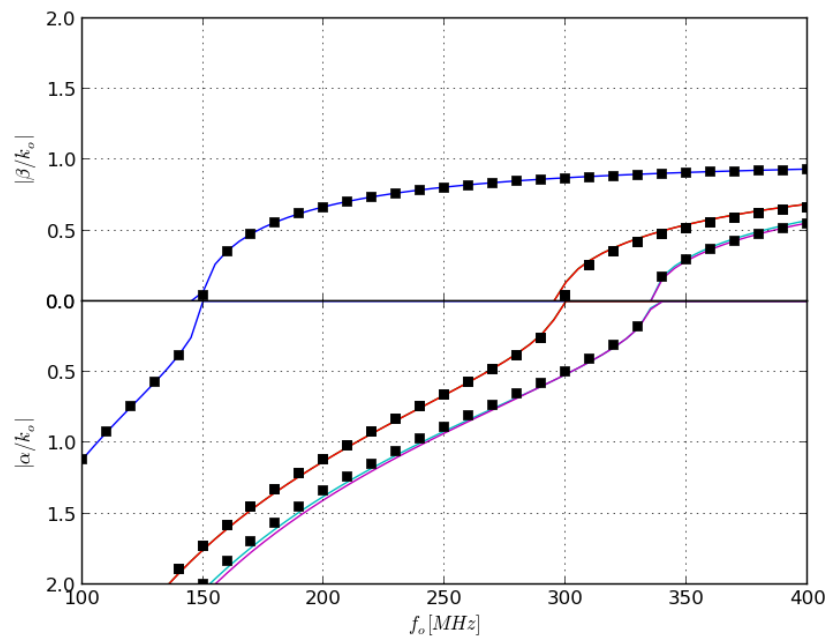


Figura 5.22: Curva de dispersión calculada para los cinco primeros modos de una guía rectangular vacía. Los puntos ■ representan los valores analíticos.



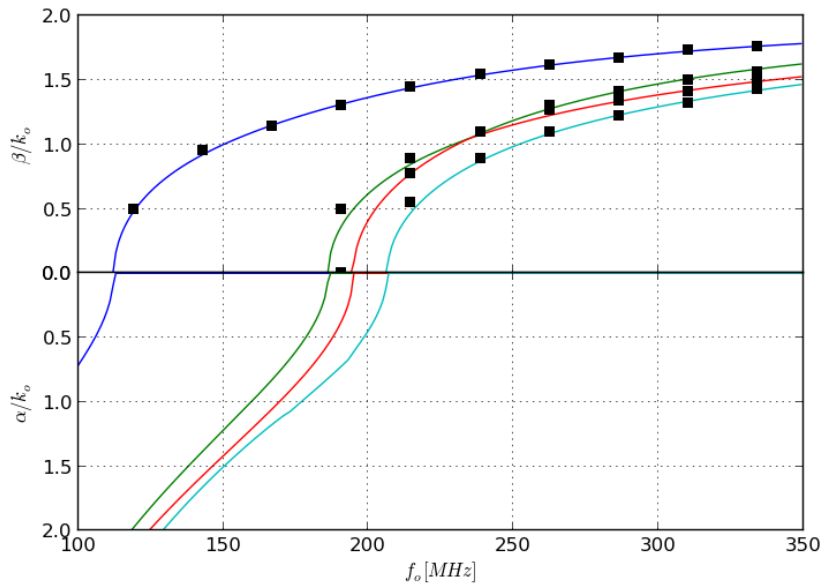


Figura 5.23: Curva de dispersión calculada para los cuatro primeros modos de una guía rectangular rellena de dieléctrico hasta la mitad. Los puntos ■ representan los valores de referencia obtenidos por [4].

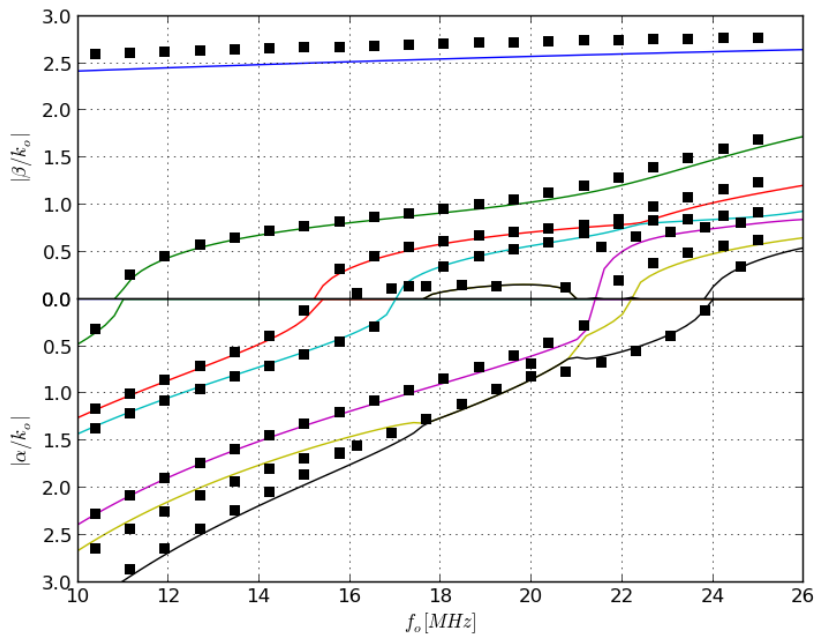
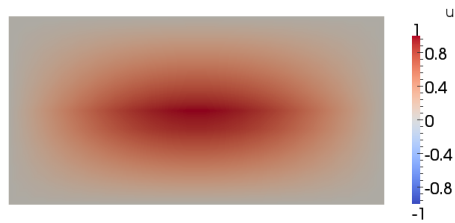
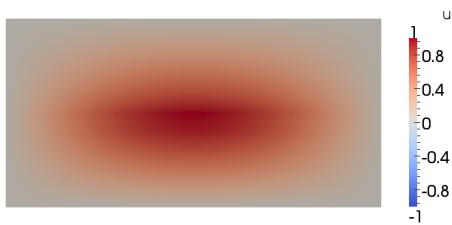


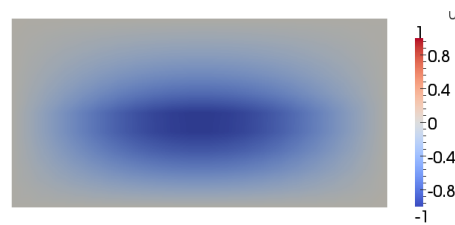
Figura 5.24: Curva de dispersión calculada para los siete primeros modos de una línea microstrip. Los puntos ■ representan los valores de referencia obtenidos por [8].



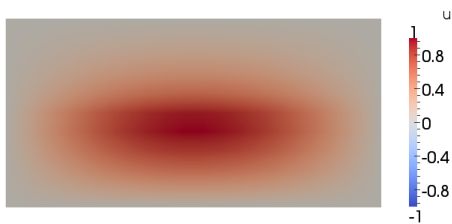
(a) Frecuencia 100 MHz



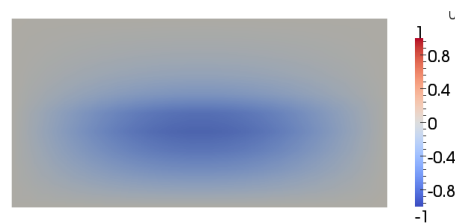
(b) Frecuencia 160 MHz



(c) Frecuencia 220 MHz

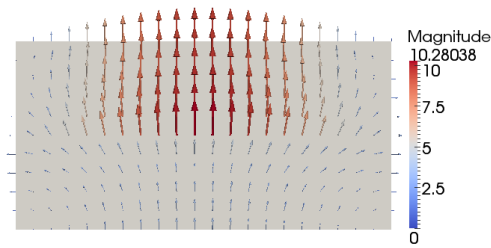


(d) Frecuencia 280 MHz

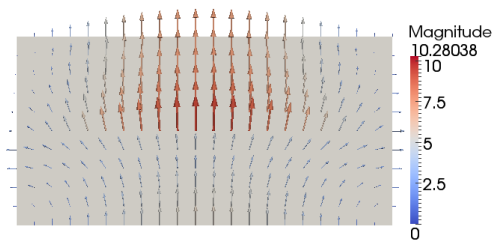


(e) Frecuencia 340 MHz

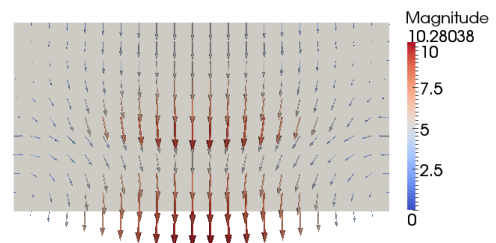
Figura 5.25: Componente longitudinal del campo eléctrico del primer modo a diferentes frecuencias en la guía rectangular inhomogénea.



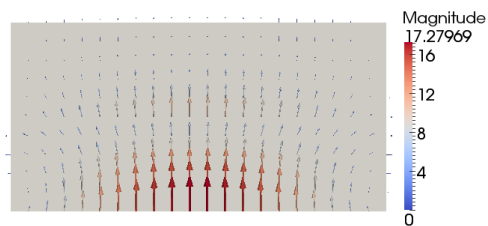
(a) Frecuencia 100 MHz



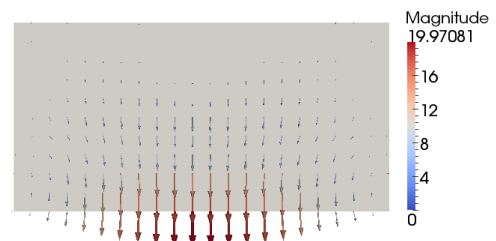
(b) Frecuencia 160 MHz



(c) Frecuencia 220 MHz



(d) Frecuencia 280 MHz



(e) Frecuencia 340 MHz

Figura 5.26: Componente transversal del campo eléctrico del primer modo a diferentes frecuencias en la guía rectangular inhomogénea.



# 6

## Conclusiones y Trabajo futuro

### 6.1. Conclusiones

Como se puede observar en las tablas de resultados, mediante el método FEM se obtienen aproximaciones muy cercanas a los resultados analíticos, con un error relativo inferior a  $10^{-9}$  utilizando elementos de orden 3. Las representaciones de los campos eléctrico y magnético coinciden con las que aparecen en la literatura de medios de transmisión [3].

En las curvas de dispersión, calculadas mediante la formulación inhomogénea en el capítulo 5, se puede observar como el método proporciona una buena aproximación a los resultados analíticos, en el caso de la guía rectangular vacía. En el caso de la guía inhomogénea y la línea microstrip, las curvas de dispersión concuerdan con los resultados de referencia de [8] y [10].

Mediante las simulaciones realizadas en este proyecto de fin de carrera también se han podido comprobar, de manera simulada, la aparición de modos híbridos en guías de onda inhomogéneas, el comportamiento quasi-TEM del modo fundamental así como la obtención de valores complejos en la constante de propagación en una línea microstrip, que se observan en las curvas de dispersión obtenidas para esta estructura. Como indica [8], esto se debe a que en estructuras sin pérdidas, las matrices globales son reales y simétricas cuyos autovalores han de ser reales o pares complejos conjugados.

### 6.2. Trabajo futuro

En las publicaciones de [4], [8], [6], se recoge la formulación en tres dimensiones, cuya implementación queda como trabajo futuro. Mediante esta formulación se pueden analizar estructuras de gran interés en microondas como filtros resonantes y otros dispositivos pasivos.

Como indica [6], para el análisis de antenas, un aspecto de gran interés, es necesario incluir la condición de radiación que no está implementada en elementos finitos, lo que requiere la mezcla del método FEM con otros métodos numéricos que si implementen la condición de radiación. Esta tarea puede realizarse como continuación de este trabajo con el incentivo de crear una potente herramienta para el diseño y análisis de dispositivos de gran interés en microondas.



## Glosario de acrónimos

- **FEM:** Finite Element Method
- **FEM-2D:** FEM bidimensional
- **MKS:** Metros Kilos Segundos
- **TEM:** Transversal Electromagnético
- **TE:** Transversal Eléctrico
- **TM:** Transversal Magnético
- **EDP:** Ecuaciones en Derivadas Parciales
- **GTR:** Generalized Transverse Resonance





## Bibliografía

- [1] Anders Logg, Kent-Andre Mardal, and Garth Wells. *Automated solution of differential equations by the finite element method: The FEniCS book*, volume 84. Springer Science & Business Media, 2012.
- [2] Christophe Geuzaine and Jean-François Remacle. Gmsh: A 3-d finite element mesh generator with built-in pre-and post-processing facilities. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 79(11):1309–1331, 2009.
- [3] David M Pozar. *Microwave engineering*. John Wiley & Sons, 2009.
- [4] Jian-Ming Jin. *Theory and computation of electromagnetic fields*. John Wiley & Sons, 2011.
- [5] Constantine A Balanis. *Advanced engineering electromagnetics*, volume 20. Wiley New York, 1989.
- [6] David B Davidson. *Computational electromagnetics for RF and microwave engineering*. Cambridge University Press, 2010.
- [7] AJ Otto, N Marais, E Lezar, and DB Davidson. Using the fenics package for fem solutions in electromagnetics. *Antennas and Propagation Magazine, IEEE*, 54(4):206–223, 2012.
- [8] Giuseppe Pelosi, Roberto Coccioli, and Stefano Selleri. *Quick finite elements for electromagnetic waves*. Artech House, 2009.
- [9] Tatsuo Itoh et al. *Numerical techniques for microwave and millimeter-wave passive structures*. Wiley New York, 1989.
- [10] Jianming Jin. *The finite element method in electromagnetics*. John Wiley & Sons, 2014.



# Presupuesto

<b>1) Ejecución Material</b>	
▪ Compra de ordenador personal (Software incluido)	1199 €
▪ Alquiler de impresora láser durante 6 meses	60 €
▪ Material de oficina	25 €
▪ Total de ejecución material	1284 €
<b>2) Gastos generales</b>	
▪ 16 % sobre Ejecución Material	235.84 €
<b>3) Beneficio Industrial</b>	
▪ 6 % sobre Ejecución Material	88.44 €
<b>4) Honorarios Proyecto</b>	
▪ 1000 horas a 15 €/ hora	15000 €
<b>5) Material fungible</b>	
▪ Gastos de impresión	150 €
▪ Encuadernación	10 €
<b>6) Subtotal del presupuesto</b>	
▪ Subtotal Presupuesto	16768.28 €
<b>7) I.V.A. aplicable</b>	
▪ 21 % Subtotal Presupuesto	3521.34 €
<b>8) Total presupuesto</b>	
▪ Total Presupuesto	20289.62 €

Madrid, Junio de 2015  
El Ingeniero Jefe de Proyecto

Fdo.: Carlos Revillas Sánchez  
Ingeniero de Telecomunicación



# Pliego de condiciones

## Pliego de condiciones

Este documento contiene las condiciones legales que guiarán la realización, en este proyecto, de la *Simulación de medios de transmisión mediante el método de elementos finitos*. En lo que sigue, se supondrá que el proyecto ha sido encargado por una empresa cliente a una empresa consultora con la finalidad de realizar dicho sistema. Dicha empresa ha debido desarrollar una línea de investigación con objeto de elaborar el proyecto. Esta línea de investigación, junto con el posterior desarrollo de los programas está amparada por las condiciones particulares del siguiente pliego.

Supuesto que la utilización industrial de los métodos recogidos en el presente proyecto ha sido decidida por parte de la empresa cliente o de otras, la obra a realizar se regulará por las siguientes:

### *Condiciones generales.*

1. La modalidad de contratación será el concurso. La adjudicación se hará, por tanto, a la proposición más favorable sin atender exclusivamente al valor económico, dependiendo de las mayores garantías ofrecidas. La empresa que somete el proyecto a concurso se reserva el derecho a declararlo desierto.
2. El montaje y mecanización completa de los equipos que intervengan será realizado totalmente por la empresa licitadora.
3. En la oferta, se hará constar el precio total por el que se compromete a realizar la obra y el tanto por ciento de baja que supone este precio, en relación con un importe límite si este se hubiera fijado.
4. La obra se realizará bajo la dirección técnica de un Ingeniero Superior de Telecomunicación, auxiliado por el número de Ingenieros Técnicos y Programadores que se estime preciso para el desarrollo de la misma.
5. Aparte del Ingeniero Director, el contratista tendrá derecho a contratar al resto del personal, pudiendo ceder esta prerrogativa a favor del Ingeniero Director, quien no estará obligado a aceptarla.
6. El contratista tiene derecho de hacer copias a su costa de los planos, pliego de condiciones y presupuestos. El Ingeniero autor del proyecto autorizará con su firma las copias solicitadas por el contratista después de confrontarlas.
7. Se abonará al contratista la obra que realmente ejecute con sujeción al proyecto que sirvió de base para la contratación, a las modificaciones autorizadas por la superioridad, o a las órdenes que con arreglo a sus facultades, le hayan comunicado por escrito al Ingeniero Director de obras siempre que dicha obra se haya ajustado a los preceptos de los pliegos de condiciones, con arreglo a los cuales, se harán las modificaciones y la valoración de las

- diversas unidades sin que el importe total pueda exceder de los presupuestos aprobados. Por consiguiente, el número de unidades que se consignan en el proyecto o en el presupuesto, no podrá servirle de fundamento para entablar reclamaciones de ninguna clase, salvo en los casos de rescisión.
8. Tanto en las certificaciones de obras como en la liquidación final, se abonarán los trabajos realizados por el contratista a los precios de ejecución material que figuran en el presupuesto para cada unidad de la obra.
  9. Si excepcionalmente se hubiera ejecutado algún trabajo que no se ajustase a las condiciones de la contrata pero que sin embargo es admisible a juicio del Ingeniero Director de obras, se dará conocimiento a la Dirección, proponiendo a la vez la rebaja de precios que el Ingeniero estime justa y si la Dirección resolviera aceptar la obra, quedará el contratista obligado a aceptar con la rebaja acordada.
  10. Cuando se juzgue necesario emplear materiales o ejecutar obras que no figuren en el presupuesto de la contrata, se evaluará su importe a los precios asignados a otras obras o materiales análogos si los hubiere y cuando no, se discutirán entre el Ingeniero Director y el contratista, sometiéndolos a la aprobación de la Dirección. Los nuevos precios convenidos por uno u otro procedimiento, se sujetarán siempre al establecido en el punto anterior.
  11. Cuando el contratista, con autorización del Ingeniero Director de obras, emplee materiales de calidad más elevada o de mayores dimensiones de lo estipulado en el proyecto, o sustituya una clase de fabricación por otra que tenga asignado mayor precio o ejecute con mayores dimensiones cualquier otra parte de las obras, o en general, introduzca en ellas cualquier modificación que sea beneficiosa a juicio del Ingeniero Director de obras, no tendrá derecho sin embargo, sino a lo que le correspondería si hubiera realizado la obra con estricta sujeción a lo proyectado y contratado.
  12. Las cantidades calculadas para obras accesorias, aunque figuren por partidaalzada en el presupuesto final (general), no serán abonadas sino a los precios de la contrata, según las condiciones de la misma y los proyectos particulares que para ellas se formen, o en su defecto, por lo que resulte de su medición final.
  13. El contratista queda obligado a abonar al Ingeniero autor del proyecto y director de obras así como a los Ingenieros Técnicos, el importe de sus respectivos honorarios facultativos por formación del proyecto, dirección técnica y administración en su caso, con arreglo a las tarifas y honorarios vigentes.
  14. Concluida la ejecución de la obra, será reconocida por el Ingeniero Director que a tal efecto designe la empresa.
  15. La garantía definitiva será del 4% del presupuesto y la provisional del 2%.
  16. La forma de pago será por certificaciones mensuales de la obra ejecutada, de acuerdo con los precios del presupuesto, deducida la baja si la hubiera.
  17. La fecha de comienzo de las obras será a partir de los 15 días naturales del replanteo oficial de las mismas y la definitiva, al año de haber ejecutado la provisional, procediéndose si no existe reclamación alguna, a la reclamación de la fianza.
  18. Si el contratista al efectuar el replanteo, observase algún error en el proyecto, deberá comunicarlo en el plazo de quince días al Ingeniero Director de obras, pues transcurrido ese plazo será responsable de la exactitud del proyecto.

19. El contratista está obligado a designar una persona responsable que se entenderá con el Ingeniero Director de obras, o con el delegado que éste designe, para todo relacionado con ella. Al ser el Ingeniero Director de obras el que interpreta el proyecto, el contratista deberá consultarle cualquier duda que surja en su realización.
20. Durante la realización de la obra, se girarán visitas de inspección por personal facultativo de la empresa cliente, para hacer las comprobaciones que se crean oportunas. Es obligación del contratista, la conservación de la obra ya ejecutada hasta la recepción de la misma, por lo que el deterioro parcial o total de ella, aunque sea por agentes atmosféricos u otras causas, deberá ser reparado o reconstruido por su cuenta.
21. El contratista, deberá realizar la obra en el plazo mencionado a partir de la fecha del contrato, incurriendo en multa, por retraso de la ejecución siempre que éste no sea debido a causas de fuerza mayor. A la terminación de la obra, se hará una recepción provisional previo reconocimiento y examen por la dirección técnica, el depositario de efectos, el interventor y el jefe de servicio o un representante, estampando su conformidad el contratista.
22. Hecha la recepción provisional, se certificará al contratista el resto de la obra, reservándose la administración el importe de los gastos de conservación de la misma hasta su recepción definitiva y la fianza durante el tiempo señalado como plazo de garantía. La recepción definitiva se hará en las mismas condiciones que la provisional, extendiéndose el acta correspondiente. El Director Técnico propondrá a la Junta Económica la devolución de la fianza al contratista de acuerdo con las condiciones económicas legales establecidas.
23. Las tarifas para la determinación de honorarios, reguladas por orden de la Presidencia del Gobierno el 19 de Octubre de 1961, se aplicarán sobre el denominado en la actualidad "Presupuesto de Ejecución de Contrata" y anteriormente llamado "Presupuesto de Ejecución Material" que hoy designa otro concepto.

### ***Condiciones particulares.***

La empresa consultora, que ha desarrollado el presente proyecto, lo entregará a la empresa cliente bajo las condiciones generales ya formuladas, debiendo añadirse las siguientes condiciones particulares:

1. La propiedad intelectual de los procesos descritos y analizados en el presente trabajo, pertenece por entero a la empresa consultora representada por el Ingeniero Director del Proyecto.
2. La empresa consultora se reserva el derecho a la utilización total o parcial de los resultados de la investigación realizada para desarrollar el siguiente proyecto, bien para su publicación o bien para su uso en trabajos o proyectos posteriores, para la misma empresa cliente o para otra.
3. Cualquier tipo de reproducción aparte de las reseñadas en las condiciones generales, bien sea para uso particular de la empresa cliente, o para cualquier otra aplicación, contará con autorización expresa y por escrito del Ingeniero Director del Proyecto, que actuará en representación de la empresa consultora.
4. En la autorización se ha de hacer constar la aplicación a que se destinan sus reproducciones así como su cantidad.
5. En todas las reproducciones se indicará su procedencia, explicitando el nombre del proyecto, nombre del Ingeniero Director y de la empresa consultora.

6. Si el proyecto pasa la etapa de desarrollo, cualquier modificación que se realice sobre él, deberá ser notificada al Ingeniero Director del Proyecto y a criterio de éste, la empresa consultora decidirá aceptar o no la modificación propuesta.
7. Si la modificación se acepta, la empresa consultora se hará responsable al mismo nivel que el proyecto inicial del que resulta el añadirla.
8. Si la modificación no es aceptada, por el contrario, la empresa consultora declinará toda responsabilidad que se derive de la aplicación o influencia de la misma.
9. Si la empresa cliente decide desarrollar industrialmente uno o varios productos en los que resulte parcial o totalmente aplicable el estudio de este proyecto, deberá comunicarlo a la empresa consultora.
10. La empresa consultora no se responsabiliza de los efectos laterales que se puedan producir en el momento en que se utilice la herramienta objeto del presente proyecto para la realización de otras aplicaciones.
11. La empresa consultora tendrá prioridad respecto a otras en la elaboración de los proyectos auxiliares que fuese necesario desarrollar para dicha aplicación industrial, siempre que no haga explícita renuncia a este hecho. En este caso, deberá autorizar expresamente los proyectos presentados por otros.
12. El Ingeniero Director del presente proyecto, será el responsable de la dirección de la aplicación industrial siempre que la empresa consultora lo estime oportuno. En caso contrario, la persona designada deberá contar con la autorización del mismo, quien delegará en él las responsabilidades que ostente.