

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE MADRID

ESCUELA POLITÉCNICA SUPERIOR



Proyecto Fin de Carrera

ANÁLISIS DE DATOS BIOLÓGICOS MEDIANTE
TOMOGRAFÍA

Javier Moreno Sainz-Pardo

Octubre 2014

Documento maquetado con T_EX_S v.1.0+.

Este documento está preparado para ser impreso a doble cara.

ANÁLISIS DE DATOS BIOLÓGICOS MEDIANTE TOMOGRAFÍA

AUTOR: Javier Moreno Sainz-Pardo

TUTOR: Carlos Aguirre Maeso



**Escuela Politécnica Superior
Universidad Autónoma de Madrid**

Octubre 2014

A vosotros, por hacerme sentir vivo.

Agradecimientos

*Mientras el azar me respete
y siga esquivando la mala suerte
mientras pueda seguir confiando en mi gente
seguiré firme en el camino que lleva a la muerte.*

Lo primero es empezar por el principio. Quiero dar las gracias a mis padres, hermano y abuelos por haberme criado y enseñado a dar mis primeros pasos en este mundo. Todo lo que soy os los debo a vosotros. Os quiero.

Quisiera también agradecer a Carlos Aguirre su paciencia, dedicación, empeño y ayuda a la hora de realizar este Proyecto Fin de Carrera. Sin duda, sin tu ayuda no habría conseguido lograr acabarlo. Es tan tuyo como mío.

A ti, I. por haber sido la primera en leer estas líneas. Por darme energías y no dejarme tirar la toalla. Por sostenerme en horas bajas y ser cómplice y partícipe de mi alegría. Por tantas y tantas cosas. Por caminar por los cielos.

A mis amigos eternos, A., D., N. porque la vida nos juntó y elegimos ser a pesar de todo. Habrá curvas en el camino pero sabremos encontrarnos siempre.

A mi Estrella Polar, que tanto me ha dado. Sois tantos que agotaría este folio nombrándoos. Por recordarme lo que es importante. Por inyectarme una dosis de vitalidad. Os llevo presentes.

A los que se fueron y dejaron en mi huella. Porque todo aprobado es sueño y los sueños, sueños son.

A Abades y mis hermanos postizos. A Estudios por lo que será.

A los que comparten mis días, brindo por vosotros. Os quiero de verdad.

Índice

Agradecimientos	VII
1. Introducción	1
1.1. Motivación y Objetivos	1
1.2. Metodología y Plan de trabajo	2
1.3. Estructura del documento	2
2. Transformadas Lineales y Bilineales	3
2.1. Transformadas lineales	4
2.1.1. Transformada de Fourier	4
2.1.2. Transformada de Laplace	6
2.1.3. Transformada de Fourier en Tiempo Corto	7
2.1.3.1. Principio de Incertidumbre de Heisenberg	9
2.1.4. Transformada de Wavelet	10
2.2. Transformadas bilineales	12
2.2.1. Análisis en Tiempo-Frecuencia	12
2.2.1.1. Propiedades	12
2.2.2. Distribución Wigner-Ville	15
2.2.3. Transformada Pseudo-Wigner-Ville	18
2.2.4. Tomogramas	19
3. Tomografía no conmutativa	21
3.1. Introducción	21
3.2. Transformada Radon-Wigner	22
3.3. Tomografía no conmutativa tiempo-frecuencia	22
3.3.1. Otros operadores no conmutativos	23
3.4. Análisis mediante Tomogramas NCT	24
3.4.1. Separación de Componentes	28
3.4.2. Filtrado componentes	32
4. Tomografía Adaptada	33
4.1. Introducción	33
4.2. Análisis mediante tomografía adaptada	33
4.3. Método de construcción del par adaptado	34
5. Señales Biológicas	35
5.1. Introducción	35

5.2. Comunicación celular	36
5.3. Sistema Nervioso	36
5.4. Neurona	37
5.4.1. Potencial de membrana en reposo	41
5.4.2. Potencial de acción	42
5.5. Sinapsis	45
5.6. Modelados Neuronales	47
5.6.1. Modelo Hodgkin-Huxley	47
5.6.2. Modelo Hindmarsh-Rose	48
6. Experimentos	49
6.1. Operador Tiempo-Datos	49
6.2. Experimento 1	49
6.3. Experimento 2	51
6.4. Experimento 3	52
6.5. Experimento 4	55
6.6. Experimento 5	58
7. Conclusiones y Trabajos Futuros	61
7.1. Conclusiones	61
7.2. Trabajos Futuros	62
A. Anexo I - Descripción Señales	63
A.1. Caracterización de una señal en tiempo	63
A.2. Caracterización de una señal en frecuencia	64
A.3. Función Característica	64
B. Anexo II - Fundamentos de fisiología	65
B.1. Conceptos	65
C. Presupuesto	69
D. Pliego de Condiciones	71
D.1. Condiciones Generales	71
D.2. Condiciones Particulares	73

Índice de figuras

2.1. Representación temporal de ambas señales	5
2.2. Transformada de Fourier de ambas señales	6
2.3. STFT señal Chirp	8
2.4. STFT señal Senos	8
2.5. Espectogramas señal Chirp	9
2.6. Espectograma señal Senos	9
2.7. Señal y Espectrograma	11
2.8. CWT Señal	11
2.9. Distribución Wigner-Ville	17
2.10. Distribución Pseudo Wigner-Ville	19
3.1. Señal y Componentes	24
3.2. Señal con ruido	24
3.3. Tomograma señal 3.9	26
3.4. Tomograma señal 3.9 con ruido	27
3.5. Tomograma señal 3.9	27
3.6. Tomograma señal 3.9	28
3.7. Tomograma señal 3.9	28
3.8. Tomograma señal con ruido	28
3.9. Zoom Tomograma señal para $\theta = \frac{\pi}{4}$	29
3.10. Reconstrucción componentes de la señal	29
3.11. Reconstrucción componentes de la señal	30
3.12. Reconstrucción señal a partir de sus componentes	30
3.13. Señal con componente filtrada	32
5.1. Organización sistema nervioso	37
5.2. Tipos de células glía	38
5.3. Clasificación Neuronal	39
5.4. Dibujo Neurona Modelo	39
5.5. Iones más comunes	41
5.6. Potencial escalonado subumbral y supraumbral	43
5.7. Fases del potencial de acción	43
5.8. Codificación del estímulo	45
5.9. Transporte del potencial de acción	45
5.10. Eventos en una sinapsis	46
5.11. Modelo Hodgkin-Huxley	47

5.12. Fórmulas modelo Hodgkin-Huxley	47
5.13. Ecuaciones modelo Hindmarsh-Rose	48
6.1. Señal de Prueba	50
6.2. Tomografía Tiempo-Frecuencia Stest1	50
6.3. Tomograma Tiempo-Datos Experimento 1	50
6.4. Señal de Prueba	51
6.5. Tomografía Tiempo-Frecuencia	51
6.6. Reconstrucción a partir de Coeficientes	52
6.7. Tomograma Tiempo-Datos	52
6.8. Fórmulas Modelo Izhikevich	52
6.9. Señal de Prueba	53
6.10. Tomografía Tiempo-Frecuencia	53
6.11. Extracción de componentes	54
6.12. Tomograma Tiempo-Datos	54
6.13. Señales de Prueba	55
6.14. Tomografía Tiempo-Frecuencia	56
6.15. Tomografía Tiempo-Datos	57
6.16. Señal de Prueba con Ruido	58
6.17. Tomografía Tiempo-Frecuencia	59
6.18. Tomografía Tiempo-Datos	60

Índice de Tablas

2.1. Propiedades del kernel	15
3.1. Tabla Errores Cuadráticos Medio	31

Capítulo 1

Introducción

*La vitalidad se revela
no solamente en la capacidad de persistir
sino en la de volver a empezar.*

Francis Scott Fitzgerald

RESUMEN: En este capítulo se presenta la motivación, circunstancias y contexto en que se desarrolla este PFC. A continuación, se definirán los objetivos generales y específicos del mismo. Por último, se presenta la organización del presente documento, describiendo brevemente el contenido de cada capítulo que lo integra.

1.1. Motivación y Objetivos

Este PFC se centra en el análisis de señales biológicas mediante el uso de Tomografía. De todas las señales biológicas, nos hemos centrado en las señales pertenecientes a la neurocrina, las principales señales que hay en el sistema nervioso. El **objetivo** de este proyecto es determinar si la tomografía es una buena herramienta para el estudio y localización de eventos transitorios en señales biológicas. Estudiaremos la naturaleza física de estas señales y cómo se originan. De manera breve, ya que se detallará en el capítulo V, nuestras neuronas funcionan de la siguiente manera: Una neurona mediante un evento electroquímico es excitada. Al alcanzar un valor umbral, la neurona se activa y dispara una señal que pasa hacia el axón. Esta señal será recibida por otra neurona y así sucesivamente.

La codificación de la información en las neuronas no reside en la amplitud de sus respuestas, si no en la frecuencia. Cada neurona tiene un potencial de acción único, dando igual la intensidad del estímulo al que sea sometido. Por lo tanto es la frecuencia a la que dispara potenciales de acción la neurona donde reside la información relevante. La búsqueda de **patrones o firmas neuronales** en este tipo de señales resulta de gran importancia a la hora de ciertas aplicaciones. El poder ser capaz de identificar estos patrones en señales neuronales nos hace detectar y prevenir eventualidades. El método de reconocimiento de patrones consta de tres fases diferenciadas:

- Captación de la señal mediante sensores (electrodos)
- Extracción de características (patrones, información relevante)
- Clasificación y toma de decisiones

En este proyecto nos centraremos en la extracción de características de la señal: realizando un análisis y detección de eventos transitorios en ella. Se hará un barrido histórico por las diferentes herramientas matemáticas utilizadas para analizar señales. El grueso central estará dedicado a la tomografía. La tomografía es una herramienta, que a diferencia de la transformada de Fourier, permite extraer componentes de frecuencia similares en intervalos temporales distintos sin pérdida de información y por lo tanto resulta de gran utilidad a la hora de detectar patrones transitorios de la señal. El análisis tomográfico consiste en utilizar como base los autovectores de combinaciones lineales de los operadores para poder aislar e identificar las componentes relevantes de la señal.

1.2. Metodología y Plan de trabajo

Para llevar a cabo esta tarea trabajaremos con modelos neuronales y señales artificiales. Estas señales serán analizadas mediante Matlab donde implementaremos la técnica de la tomografía comparando las ventajas de cálculo frente a otro tipo de técnicas. A continuación está esbozado el plan de trabajo que se ha seguido a la largo del proyecto.

- Estudio de la técnica de tomografía y sus desarrollos matemáticos.
- Implementación en Matlab.
- Estudio y localización eventos transitorios en señales biológicas.
- Extracción de Conclusiones.
- Trabajos futuros/Aplicaciones.

1.3. Estructura del documento

Este documento cuenta con VII capítulo. Un primer capítulo introductorio donde se expone una presentación y los objetivos de este PFC. En el capítulo II se analizará tipos de transformadas lineales y bilineales. En los capítulos III y IV detallaremos la tomografía. Se enumerarán en el capítulo V los distintos tipos de señales y comunicación que muestra el cuerpo humano haciendo énfasis en la comunicación neurocrina. Por último, en los capítulos VI y VII, se realizarán una serie de experimentos sobre señales artificiales y se analizarán los resultados y posibles mejoras. Adicionalmente hay tres anexos: dos para complementar las partes matemáticas y biológica y un presupuesto detallado del coste de este PFC.

Capítulo 2

Transformadas Lineales y Bilineales

Pero existe otra razón para la gran reputación de la Matemática: la de que la Matemática ofrece a las ciencias naturales exactas un cierto grado de seguridad que sin ella no podrían alcanzar

Albert Einstein

RESUMEN: En este capítulo desglosaremos los fundamentos matemáticos en los que se apoyará este PFC. Nos centraremos en las herramientas que son más utilizadas en el análisis de la señal. Abarcaremos desde la transformada de Fourier hasta la transformada de Radon-Wigner. Veremos como ha ido evolucionando la técnica gracias al avance matemático. Analizaremos las aplicaciones y limitaciones de cada transformada.

Existen distintas maneras de clasificar las transformadas. Empezaremos dividiendo las transformadas en dos clases: *lineales y bilineales*.

- Lineales: Fourier, Fourier en tiempo corto, Wavelets...
- Bilineales: Wigner-Ville, Tomogramas...

A lo largo de los siguientes capítulos agruparemos esas transformadas en tres tipos

- Tipo-Wavelets
- Cuasi-distribuciones
- Transformadas Tomográficas / Tomogramas

2.1. Transformadas lineales

Partiremos de la definición de una aplicación lineal.

Definición

Sean V y W dos espacios vectoriales. Una transformación lineal de V a W es una función $T: V \rightarrow W$ tal que para todos los vectores u y v de V y cualquier escalar c se cumple: (1)

$$T(u + v) = T(u) + T(v) \quad (2.1)$$

$$T(cu) = cT(u) \quad (2.2)$$

2.1.1. Transformada de Fourier

La transformada de Fourier toma como punto de partida la serie de Fourier y a diferencia de ésta, la transformada de Fourier se puede aplicar a señales aperiódicas con energía finita. La representación de una señal periódica y continua a trozos a partir de una combinación lineal de exponenciales complejas armónicamente relacionadas es lo que se denomina *Serie de Fourier*.

Sea $x(t) = x(t+T)$ con periodo T . Definimos el conjunto de exponenciales armónicamente relacionadas.

$$\phi_k(t) = e^{jk\omega_0} = e^{j\left(\frac{2\pi}{T}\right)t}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

(2) La combinación lineal resultante se conoce como serie de Fourier

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \quad (2.3)$$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\frac{2\pi}{T}t} \quad (2.4)$$

Siendo a_k los coeficientes de la serie de Fourier y $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ la frecuencia fundamental.

Nótese que una señal aperiódica se puede considerar como una señal periódica con $T = \infty$. Las señales aperiódicas con energía finita son susceptibles de aplicarles la transformada de Fourier. Por lo tanto, tomaremos una señal no periódica y con energía finita

$$x(t) = \begin{cases} x(t) & \text{para } |t| \leq T/2 \\ 0 & \text{para } \textit{Resto} \end{cases} \quad (2.5)$$

Serie de Fourier

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\frac{2\pi}{T}t} \quad (2.6)$$

Cuando el periodo se vuelve infinito, las componentes frecuenciales forman un continuo y el sumatorio de la serie resulta ser esta integral.

$$X(j\omega) = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) e^{-j\omega t} dt \quad (2.7)$$

Tal que al ser 0 para t no pertenecientes al intervalo $(\frac{-T}{2}, \frac{T}{2})$ para el resto de valores, podemos extender los límites de la integral, obteniendo la expresión de la transformada de Fourier

$$X(jw) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-jwt} dt \quad (2.8)$$

La expresión inversa es conocida como la *transformada inversa de Fourier*.

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(jw)e^{jwt} dw \quad (2.9)$$

Elegiremos las siguientes dos señales. Sobre ellas aplicaremos las sucesivas transformadas que irán apareciendo a lo largo del capítulo.

$$f_1(t) = \frac{120t}{1000} \quad 0 < t < 1000 \quad (2.10)$$

$$f_2(t) = \begin{cases} \sin(2\pi 50t) & \text{para } t < 100 \\ \sin(2\pi 50t) + \sin(2\pi 90t) & \text{para } 100 < t < 200 \\ \sin(2\pi 90t) & \text{para } 201 < t < 500 \\ \sin(2\pi 50t) & \text{para } 800 < t < 1000 \\ 0 & \text{para } \textit{Resto} \end{cases} \quad (2.11)$$

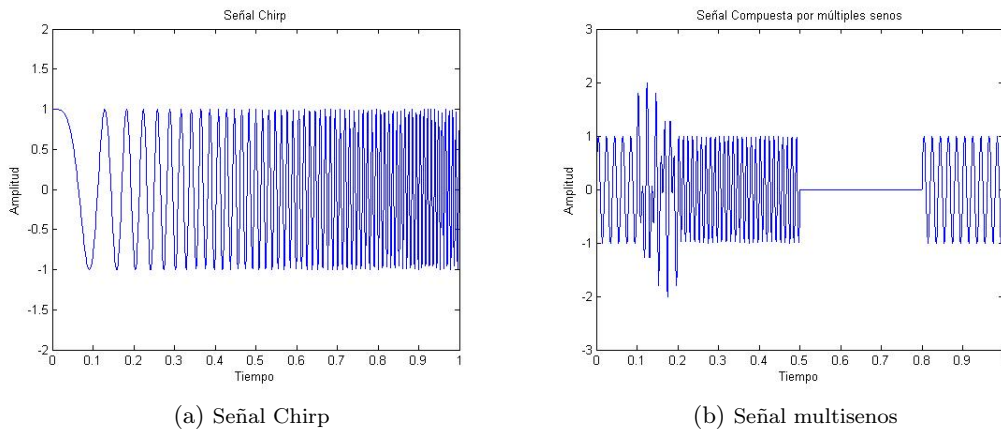
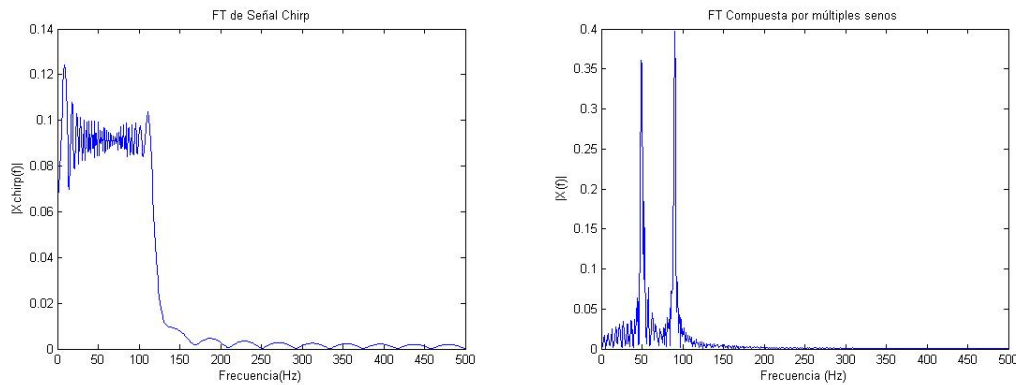


Figura 2.1: Representación temporal de ambas señales

La primera función es una función *chirp*. Su frecuencia aumenta linealmente. La segunda se compone de dos senos de distinta frecuencia que aparecen y desaparecen a lo largo de t . Aplicamos la FT sobre ellas.



(a) FT de la señal Chirp

(b) FT de la señal multisenos

Figura 2.2: Transformada de Fourier de ambas señales

Como se puede apreciar, la transformada de Fourier no contiene ninguna información temporal sobre la localización de los eventos frecuenciales. Esta herramienta no nos resulta útil a la hora de localizar eventos en el tiempo.

2.1.2. Transformada de Laplace

La transformada de Fourier es un caso particular de la Transformada de Laplace. A diferencia de de Fourier, la transformada de Laplace se puede aplicar en ciertos contextos donde la transformada de Fourier no. Por ejemplo, para la determinación de sistemas estables o inestables así como para sistemas con realimentación.

$h(t)$ es la respuesta a un impulso $\delta(t)$ para un sistema lineal e invariante. (2)

$$y(t) = H(s)e^{st} \quad (2.12)$$

$$H(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{st} dt \quad (2.13)$$

Donde:

- $y(t)$ es la respuesta del sistema.
- $H(s)$ es el autovalor del sistema.
- e^{st} es la autofunción del sistema.

Por extensión:

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{st} dt \quad (2.14)$$

Generalmente, es más común en la literatura la transformada unilateral de Laplace 2.15

$$X(s) = \int_0^{\infty} x(t)e^{st} dt \quad (2.15)$$

Podemos apreciar que la transformada de Fourier es una particularización de la transformada de Laplace si hacemos $s = jw$. Laplace es muy útil en el estudio de circuitos a la hora de determinar la región de convergencia *ROC* de los mismos.

2.1.3. Transformada de Fourier en Tiempo Corto

Ya hemos visto la FT. Una de sus principales desventajas es que $X(jw)$ no contiene ninguna información temporal. La FT no es la herramienta más útil para analizar señales cuya frecuencia varía en el tiempo.

La STFT es el método más usado a la hora de estudiar señales no estacionarias. El concepto es el siguiente : *dividir la señal en trozos más pequeños* y analizarlos separadamente. El total de dicho espectro indica cómo varía en tiempo. Es decir, nos aporta una *información temporal* que con la FT no teníamos.

(3)

Para analizar de manera troceada, como propone este método, se usará la técnica del *enventanado*. A la hora de elegir el tamaño y tipo de la ventana nos encontramos con la siguiente problemática.

- **Tamaño ventana:** Cuanta más estrecha sea la ventana tendremos una definición mejor de la señal. Existe una limitación técnica al respecto. No podemos hacer la ventana todo lo estrecha que queramos. Señales de corta duración tiene un B_w grande. El espectro de esas señales pierde propiedades originales de la señal, por lo que su estudio no resulta útil. En procesamiento de señales, se conoce como *Principio de Incertidumbre de Heisenberg* o como el *Gabor limit*.
- **Tipo de Ventana:** Dependiendo de las características de señal a analizar, es conveniente escoger un tipo de ventana u otra : *Hamming, Kaiser...*

A nuestra señal le aplicamos un enventanado, obteniendo una mejor localización temporal de las singularidades de la señal.

$$s_\tau(t) = s(t) * g(t - \tau) \quad (2.16)$$

Donde:

- $s(t)$: Señal.
- $g(t)$: Ventana deslizante con ancho fijo. Cambia a lo largo del eje t mediante un factor τ .

Aplicando la fórmula de la transformada, obtenemos la expresión de la Transformada de Fourier en tiempo corto.

$$X(w, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} s_\tau e^{-jw t} dt \quad (2.17)$$

Para nuestro propósito, se desea obtener información concreta del comportamiento frecuencial para un determinado 't'. Se introduce aquí el concepto de espectrograma. El espectrograma es la *densidad espectral de energía de la STFT*. (4)

$$P_{SP}(w, \tau) = |X(w, \tau)|^2 \quad (2.18)$$

Función Característica del espectrograma. Como toda función característica, es la transformada de Fourier de la densidad de energía.

$$M_{SP}(\theta, \tau) = \int |X(w, \tau)|^2 e^{j\theta t + j\tau w} dt dw = A_s(\theta, \tau) A_h(-\theta, \tau) \quad (2.19)$$

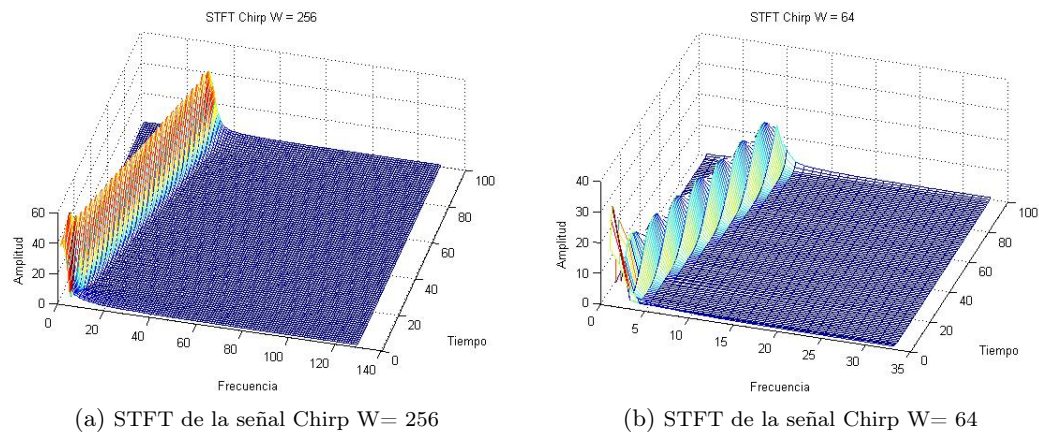


Figura 2.3: STFT señal Chirp

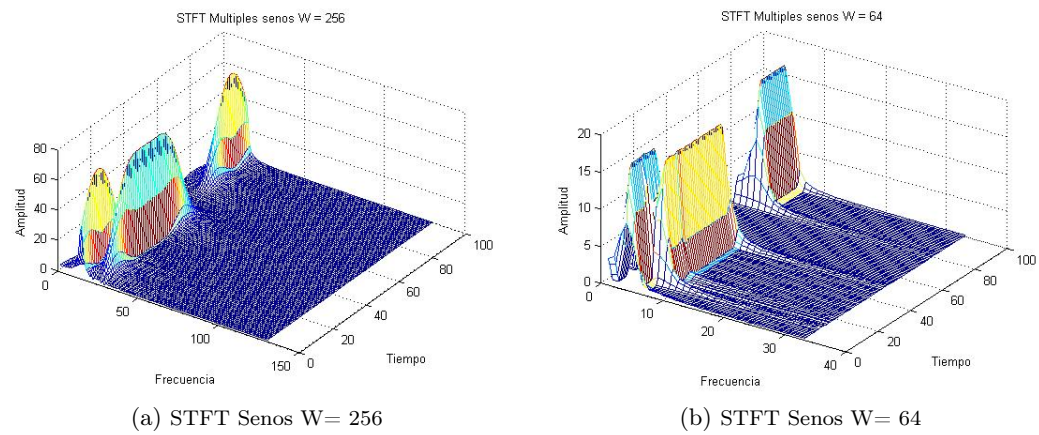


Figura 2.4: STFT señal Senos

A las funciones anteriormente enunciadas, 2.10 y 2.11, aplicaremos la STFT con distintos tamaños.

A diferencia de la transformada de Fourier podemos observar que la STFT contiene información temporal, pues se observa en qué momento aparecen las distintas frecuencias de las que se componen las señales.

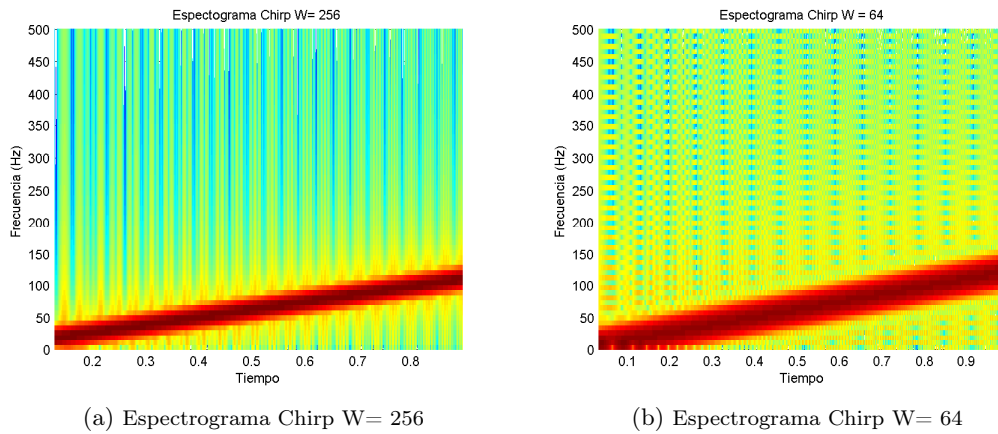


Figura 2.5: Espectrogramas señal Chirp

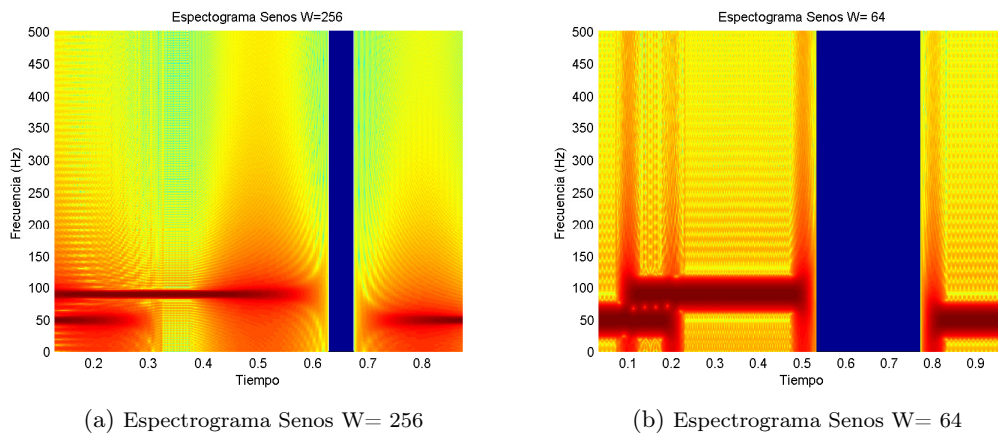


Figura 2.6: Espectrograma señal Senos

Como podemos observar, la elección de la ventana y su tamaño es crucial a la hora de obtener unos resultados interpretables. Una ventana grande nos proporciona una mejor resolución frecuencial y una peor resolución temporal. Por lo contrario, una ventana pequeña presenta mejor resolución temporal pero peor frecuencial.

2.1.3.1. Principio de Incertidumbre de Heisenberg

(3) En procesamiento de señales se conoce al principio de incertidumbre como la imposibilidad de localizar con exactitud en tiempo y frecuencia a la vez. También se le conoce como *límite de Gabor* o *límite de Heisenberg-Gabor*.

Como concepto matemático, sabemos que una señal con un tiempo estrecho implica un espectro ancho y viceversa. Es imposible construir una señal donde el espectro y el tiempo sean pequeñas simultáneamente.

$$T = \sigma_t^2 = \int |t - \langle t \rangle| (t) |^2 dt \quad (2.20)$$

$$B = \sigma_w^2 = \int |w - \langle w \rangle| (w) |^2 dt \quad (2.21)$$

T y B son desviaciones estándar de tiempo y frecuencia respectivamente. El principio de incertidumbre queda definido de la siguiente manera

$$TB \geq \frac{1}{2} \quad (2.22)$$

Es importante recordar que si modificamos una señal mediante enventanado, como por ejemplo la STFT, no debemos confundir el PI aplicado a la señal resultante que a la señal original. Es una función del tiempo, señal y de la ventana.

El PI marca el límite matemático.

2.1.4. Transformada de Wavelet

La transformada de Wavelet nace de la necesidad de mejorar el estudio de fenómenos transitorios que se producen en señales que la STFT, con sus limitaciones, no puede precisar. Esto se debe a que, a diferencia de la STFT, la CWT tiene un tamaño de ventana adaptado a las frecuencias. Su utilización resulta preferente a la hora de analizar señales estacionarias y con rápidos/crecientes cambios en frecuencia. (6)

Su expresión general es la siguiente:

$$W_x(s, \tau) = \int x(t) \psi_{s,\tau}^*(t) dt$$

(2.23)

La transformada de Wavelet de $x(t)$ es la descomposición de dicha señal en un conjunto de funciones $\psi_{s,\tau}(t)$ que se conoce como *Wavelets*.

$$\psi_{s,\tau}(t) = \frac{1}{\sqrt{s}} \psi\left(\frac{t-\tau}{s}\right)$$

(2.24)

Donde:

- s : Factor de Escala. Para $s > 1$, Wavelets dilatadas, para $s < 1$ Wavelets contraídas.
- τ : Factor de traslación.

Todas las Wavelets $\psi_{s,\tau}(t)$ son generadas a partir de una Wavelet madre $\psi(t)$. Tienen diferente escala y localización, pero la misma forma.

Modificaremos la señal 2.11 con la aparición de dos picos espurios. Le hemos aplicado la CWT y el espectrograma para poder ver las diferencias entre ambos métodos.

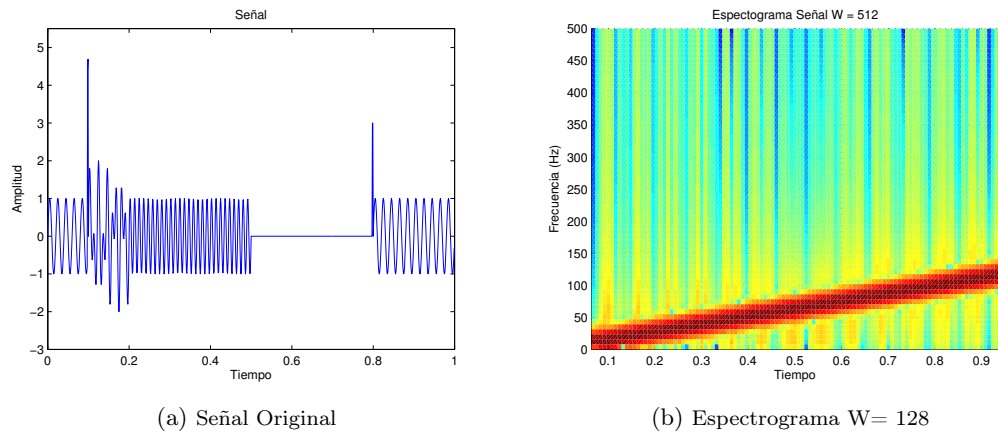


Figura 2.7: Señal y Espectrograma

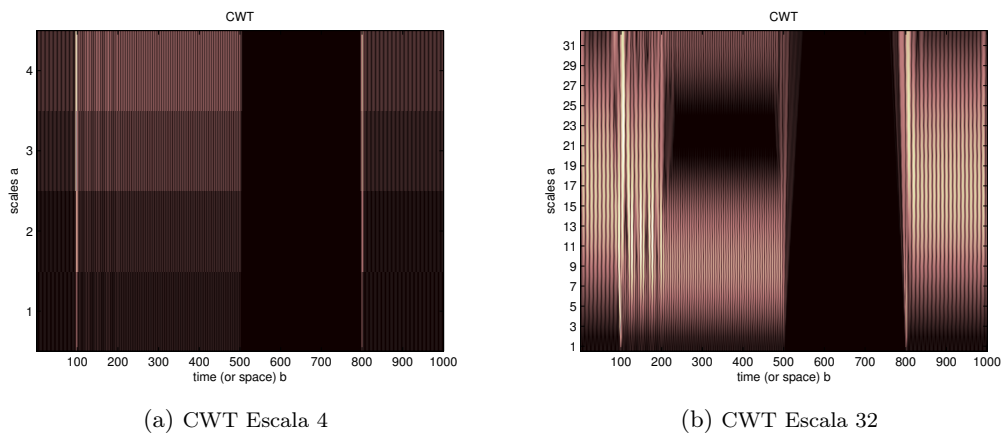


Figura 2.8: CWT Señal

El espectrograma presenta ciertas dificultades para localizar estos picos espurios (eventos transitorios) que aparecen en la señal. Sería necesario una ventana estrecha para poder obtener una representación temporal óptima y así localizar estos eventos en el tiempo. Pero a un alto coste frecuencial, por lo que los resultados obtenidos no serían fácilmente interpretables.

Con la transformada de Wavelet debido a su ventana adaptada (familia de Wavelets adaptada) podemos obtener una precisa localización de estos eventos transitorios.

2.2. Transformadas bilineales

Como hemos visto en el capítulo anterior, las transformadas de Wavelet y Fourier en tiempo corto son herramientas potentes a la hora de estudiar el espectro de una señal. Sin embargo tienen ciertas limitaciones a la hora de estudiar, como es el caso que nos interesa, una señal de manera conjunta en tiempo-frecuencia.

¿Por qué es tan interesante el estudio de una señal mediante una distribución conjunta tiempo-frecuencia? Una descripción en tiempo o en frecuencia, por ellas mismas, no contienen toda la información que la señal tiene. Una representación en frecuencia contiene la información de las frecuencias existentes en la señal, pero carece de información temporal de cuándo se produjeron esas frecuencias. En el mundo real, todas las señales su espectro varía con el tiempo. De aquí parte la necesidad y el objetivo de formular un *distribución de energía conjunta en tiempo y frecuencia*.

Partiremos de la definición de transformación bilineal.

Definición

Sea V un espacio vectorial. Una transformación bilineal es una aplicación $T : V \times V \rightarrow R$ que satisface las siguientes propiedades: (1)

$$T(\lambda u + \mu v, w) = \lambda T(u, w) + \mu T(v, w) \quad \lambda, \mu \in \mathfrak{R} \quad u, v, w \in V. \quad (2.25)$$

$$T(u, \lambda v + \mu w) = \lambda T(u, v) + \mu T(u, w) \quad \lambda, \mu \in \mathfrak{R} \quad u, v, w \in V.$$

(2.26)

2.2.1. Análisis en Tiempo-Frecuencia

(3) Como ya se ha expuesto en la introducción de este capítulo, nuestro objetivo es lograr una descripción de la densidad de energía de una señal de manera simultánea en tiempo y en frecuencia y que además esta distribución pueda ser tratada y manipulada de manera similar a una densidad de probabilidad. Resumiendo, se trata de encontrar una densidad de probabilidad conjunta $P(t, w)$.

¿Existe esa función conjunta tiempo-frecuencia? ¿Cómo se pueden construir? ¿Pueden ser interpretadas como una verdadera distribución de densidad? La distribución buscada debe cumplir las siguientes propiedades.

2.2.1.1. Propiedades

1. Marginales

Debe satisfacer las probabilidades marginales.

$$\int P(t, w) dw = |s(t)|^2 = P(t) \quad (2.27)$$

$$\int P(t, w) dt = |S(w)|^2 = P(w) \quad (2.28)$$

2. Energía Total

La Energía total debe satisfacer la Identidad de Parseval.

$$E = \int \int P(t, w) dt dw = |s(t)|^2 = |S(w)|^2 \quad (2.29)$$

Si la distribución satisface la condición de las marginales, automáticamente satisface ésta.

3. Función Característica

La función característica es un método robusto a la hora de estudiar densidades de probabilidad.

$$M(\theta, \tau) = \langle e^{j\theta t} + e^{j\tau w} \rangle = \int \int P(t, w) e^{j\theta t + j\tau w} dt dw \quad (2.30)$$

Es importante recalcar que muchas de las distribuciones que se usarán a lo largo de este PFC no son distribuciones de probabilidad como tal (estrictamente positivas).

4. Invarianza ante desplazamientos temporales y frecuenciales

Si tenemos una señal $s(t)$ y la desplazamos, queremos que la distribución siga siendo idéntica, pues la señal sigue siéndolo. Para ello, la distribución debe ser invariante ante desplazamientos temporales y frecuenciales.

$$\begin{array}{lll} s(t) \rightarrow s(t - t_o) & \text{entonces} & P(t, w) \rightarrow P(t - t_o, w) \\ S(w) \rightarrow S(w - w_o) & \text{entonces} & P(t, w) \rightarrow P(t, w - w_o) \\ s(t) \rightarrow e^{j\omega_o t} s(t - t_o) & \text{entonces} & P(t, w) \rightarrow P(t - t_o, w - w_o) \end{array}$$

5. Escalado Lineal

Supongamos una versión escalada $s_{sc}(t) = \sqrt{a}s(at)$ de nuestra señal $s(t)$. La señal será verídica comprimida o expandida según el factor de escala que se aplique. Si la señal se comprime su espectro se expande y viceversa. $S_{sc}(w) = \frac{1}{\sqrt{a}}S(\frac{w}{a}) \rightarrow s_{sc}(t) = \sqrt{a}s(at)$ La distribución que tendremos cumplirá:

$$P_{sc} = P(at, \frac{w}{a}) \quad (2.31)$$

La distribución escalada satisface las marginales de la señal escalada

$$\int P_{sc} dw = |s_{sc}(t)|^2 = a|s(at)|^2 \int P_{sc} dt = |S_{sc}(w)|^2 = \frac{1}{a}|S(\frac{w}{a})|^2 \quad (2.32)$$

6. Soporte Finito

Tenemos una señal que es cero hasta un instante determinado t_1 y termina en t_2 . Si la distribución es cero antes de que empiece y después de que termine, decimos que la distribución tiene soporte finito temporal de la señal. De manera análoga, la distribución tiene soporte finito espectral si es cero fuera del intervalo (w_1, w_2) donde el espectro también lo es. Si durante el intervalo (t_1, t_2) la señal o el espectro toma el valor cero, la distribución conjunta también debe tomarla.

7. Real y Positiva

Es deseable que la distribución conjunta sea real y positiva. $P(t,w) = P^*(t,w)$
 $P(t,w) \geq 0$

8.Frecuencia instantánea. Retardo de Grupo

La frecuencia instantánea A.12 y el retardo de grupo son dos conceptos muy útiles para caracterizar una señal. La frecuencia instantánea es un concepto que empezó a emplearse con a raíz de la radiotransmisión con frecuencia modulada. La w_i nos da una idea del valor de la frecuencia en un instante determinado. Coincide con la frecuencia media para un instante determinado. No nos proporciona información sobre si esa frecuencia es la suma de varias componentes o no.

De manera análoga, podemos definir en tiempo el retardo de grupo como el tiempo medio de llegada de una frecuencia determinada en nuestra señal.

Partiendo de la representación cuadrática de la señal (A.2), la frecuencia instantánea se define como:

$$f_i(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{d}{dt} \psi(t) \quad (2.33)$$

La representación tiempo-frecuencia que buscamos, cumple esta propiedad si:

$$\frac{\int w P(t,w) dw}{\int P(t,w) dw} = f_i(t) = \psi(t) \quad (2.34)$$

Por ende, el retardo de grupo se define como:

$$\phi(w) = -\frac{d \arctan}{dw} X(w) \quad (2.35)$$

De igual manera, la TFR cumple esta propiedad si:

$$\frac{\int t P(t,w) dt}{\int P(t,w) dt} = \phi(w) \quad (2.36)$$

Cohen propuso un modelo generalizado, *Cohen's General Class*, para representaciones tiempo-frecuencia. Más adelante ahondaremos en las características y las ventajas que esta propuesta general presenta. Las distribuciones tiempo-frecuencia del tipo Cohen vienen definidas por:

$$C(t,w) = \frac{1}{4\pi^2} \int \int \int s^*(u - \frac{1}{2}\tau) s(u + \frac{1}{2}\tau) \phi(\theta, \tau) e^{-j\theta t - j\tau w + j\theta u} du d\tau d\theta \quad (2.37)$$

Podemos reescribirla en términos de la función característica.

$$C(t,w) = \frac{1}{4\pi^2} \int M(\theta, \tau) e^{-j\theta t - j\tau w} d\theta d\tau \quad (2.38)$$

Donde:

$$M(\theta, \tau) = \phi(\theta, \tau) \int s^*(u - \frac{1}{2}\tau) s(u + \frac{1}{2}\tau) e^{j\theta u} du = \phi(\theta, \tau) A(\theta, \tau) \quad (2.39)$$

Donde:

- $\phi(\theta, \tau)$: Núcleo ('kernel').

- $A(\theta, \tau)$: Función Ambigüedad simétrica
- $M(\theta, \tau)$: Función Característica. También se la conoce como función característica generalizada.

Utilizar el *método kernel* a la hora de caracterizar las distribuciones resulta muy útil. Se puede obtener y estudiar distribuciones con ciertas propiedades con ponerle restricciones al kernel. En la siguiente tabla podemos ver las condiciones que el kernel debe cumplir para satisfacer las propiedades deseables anteriormente mencionadas. Otra ventaja que tiene la función 'kernelés que con un vistazo de las propiedades que cumple la distribución. Es más sencillo analizar la función kernel que la distribución. Si el kernel satisface, por ejemplo, las marginales sabemos que la distribución también lo hará. Por último, dado un kernel es muy sencillo generar una distribución. Esto facilita enormemente la matemática.

Propiedades	Kernel
Marginales	$\psi(0, \tau) = 1$ $\psi(\theta, 0) = 1$
E_{total}	$\psi(0, 0) = 1$
Principio de Incertidumbre	Si $\psi(\theta, \tau)$ satisface las marginales, cumple el Principio de Incertidumbre
Real	$\psi(\theta, \tau) = \psi^*(\theta, \tau)$
Positiva	$\psi(\theta, \tau) \geq 0$
Invarianza temporal/Frecuencial	$\psi(\theta, \tau)$ debe ser independiente de t / w.
Invarianza escalar	$\psi(a\theta, \frac{\tau}{a}) = \psi(\theta\tau)$
Frecuencia instantánea	$\psi(0, \tau) = 1 \quad \frac{d\psi(\theta, \tau)}{d\theta} \Big _{\theta=0} = 0$
Retardo de grupo	$\psi(\theta, 0) = 1 \quad \frac{d\psi(\theta, \tau)}{d\tau} \Big _{\tau=0} = 0$

Tabla 2.1: Propiedades del kernel

Nos centraremos en la distribución Wigner-Ville, prototipo de distribuciones cualitativamente distintas al espectrograma 2.1.3.

2.2.2. Distribución Wigner-Ville

Wigner conocía distintas distribuciones conjuntas tiempo-frecuencia eligió trabajar con esta (que posteriormente llevaría su nombre) al parecerle la más simple e intuitiva. Ville introdujo ésta en el campo del análisis de la señal. Para ello, nos apoyaremos en la función ambigüedad. Dicha función, se puede interpretar como una función de correlación tiempo-frecuencia.(3)

$$R(t, \tau) = x(t + \frac{\tau}{2})x^*(t - \frac{\tau}{2}) \quad (2.40)$$

Si aplicamos la transformada de Fourier respecto a τ obtenemos una representación de la densidad de energía de la señal en función del tiempo y de a frecuencia, conocida como distribución de Wigner-Ville. Por consiguiente, la distribución o transformada de Wigner-Ville, en términos de $s(t)$ o $S(w)$, se enuncia:

$$W(t, w) = \frac{1}{2\pi} \int s^*(t - \frac{1}{2}\tau)s(t + \frac{1}{2}\tau)e^{-jw\tau} d\tau = \frac{1}{2\pi} \int S^*(w + \frac{1}{2}\theta)S(w - \frac{1}{2}\theta)e^{-j\theta t} d\theta \quad (2.41)$$

La transformada Wigner se considera una transformada bilineal porque la señal entra dos veces a la hora de su obtención (s^* y s). Nos será útil, más adelante, enunciar la función característica A.16 de la distribución Wigner-Ville. Es la Transformada de Fourier 2.1.1 de la distribución 2.41.

$$M(\theta, \tau) = \int \int e^{j\theta t + j\tau w} W(t, w) dt dw = \int s^*(t - \frac{1}{2}\tau)s(t + \frac{1}{2}\tau)e^{j\theta t} dt = A(\theta, \tau)\psi(\theta, \tau) \quad (2.42)$$

Donde:

- $A(\theta, \tau)$: Función ambigüedad.
- $W(t, w)$: Distribución Wigner-Ville.
- $\psi(\theta, \tau)$: Para WV, el kernel es igual a 1; $\psi(\theta, \tau) = 1$.

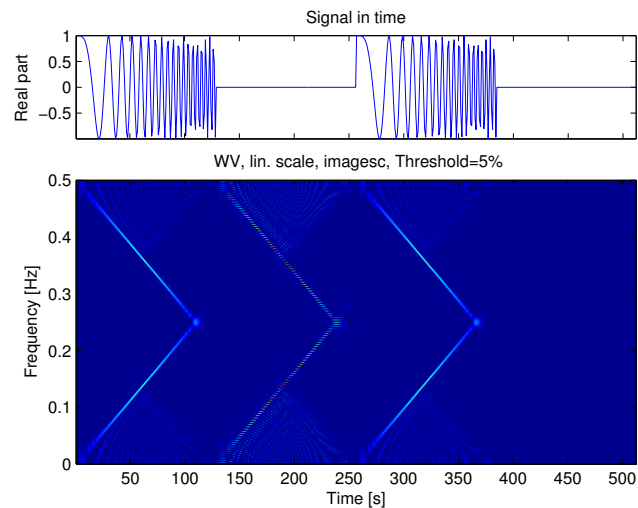
Como se observa en la fórmula, la distribución en un determinado valor se obtiene con valores pasados y futuros. Implica que no necesariamente la WV es cero para instantes donde la señal es cero (en tiempo y frecuencia). Sin embargo, satisface la propiedad soporte finito en tiempo y en frecuencia.

$$W(t, w) = 0 \quad \text{fuera de } (t_1, t_2) \quad \text{si } s(t) = 0 \quad \text{fuera de } (t_1, t_2) \quad (2.43)$$

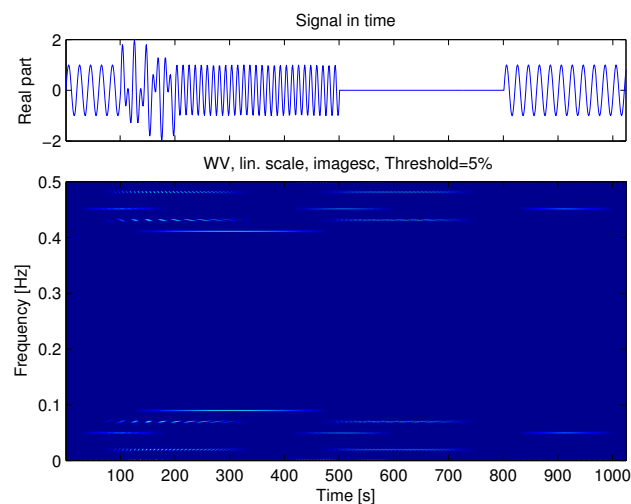
$$W(t, w) = 0 \quad \text{fuera de } (w_1, w_2) \quad \text{si } S(w) = 0 \quad \text{fuera de } (w_1, w_2) \quad (2.44)$$

Cumple las siguientes propiedades, enunciadas con anterioridad 2.2.1.1

- Marginales
- Energía Total
- Invarianza ante desplazamientos en tiempo y frecuencia
- Escalado Lineal
- Real
- Frecuencia instantánea y retardo de grupo
- Soporte Finito



(a) WV Chirp



(a) WV Senos

Figura 2.9: Distribución Wigner-Ville

Cohen, en su clase general, realizó una comparativa entre el Espectrograma y la transformada Wigner-Ville. Ambas distribuciones tienen características similares pero no iguales.(5)

- *Frecuencia instantánea y retardo de grupo*: La WV es capaz de calcular de manera precisa ambos parámetros, mientras que el Espectrograma no lo es, aunque en ciertas ocasiones es capaz de ofrecer aproximaciones fidedignas.
- *Valores Positivos*: El Espectrograma siempre adquiere valores positivos mientras que la WV no. Los resultados, aún siendo menos potentes, siempre pueden ser interpretados físicamente. Para la distribución WV no ocurre lo mismo.
- *Señales con multicomponente*: Ambas distribuciones son capaces de detectar si una señal es multicomponente o no. Sin embargo, ambas carecen de precisión para identificar las componentes, por lo que no es viable hacer un estudio cada componente por separado.

Para reducir los problemas derivados de las limitaciones de la WV, se propone una evolución de la misma. Para ello, basta con realizar una modificación en el kernel, como veremos a continuación.

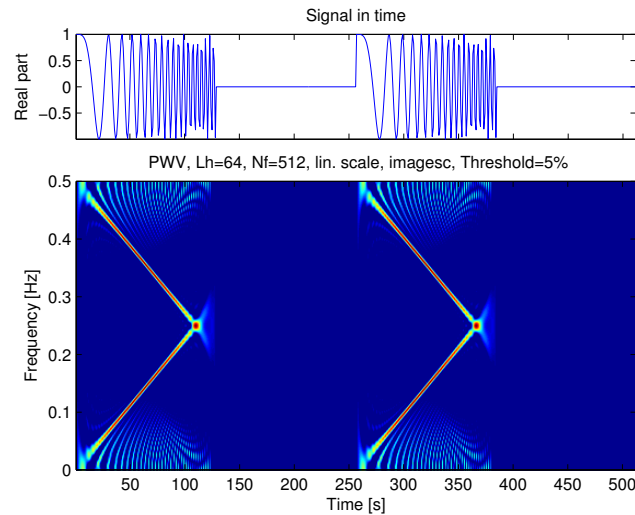
2.2.3. Transformada Pseudo-Wigner-Ville

Se trata de una versión enventanada de la transformada WV. Podemos enunciarla de la siguiente manera,

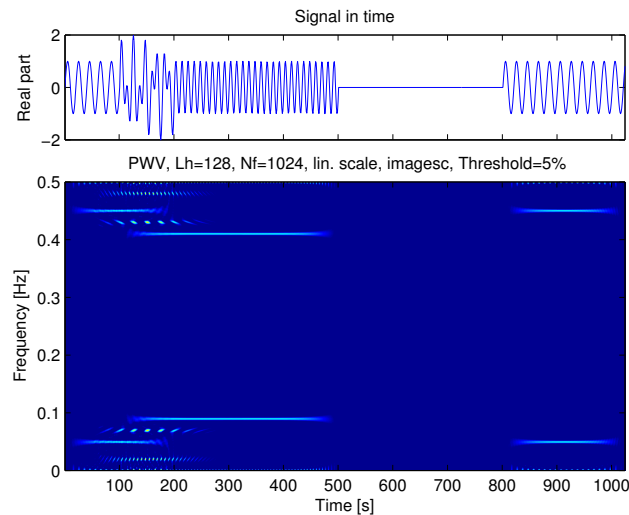
$$W_{PS}(t, w) = \int h(\tau) s^*\left(t - \frac{\tau}{2}\right) s\left(t + \frac{\tau}{2}\right) e^{-jw\tau} d\tau \quad (2.45)$$

Si realizamos una síntesis de la información anterior:

- *Enventanado*: Elimina, en frecuencia, saltos abruptos. Esto elimina interferencias en los términos cruzados. Sin embargo, produce una ligera distorsión en los términos propios.



(a) Pseudo WV Chirp



(a) Pseudo WV Senos

Figura 2.10: Distribución Pseudo Wigner-Ville

En comparación con la WV, vemos que han desaparecido artefactos e interferencias que la distribución Wigner-Ville introducía (al tener por ejemplo términos negativos). (5)

2.2.4. Tomogramas

(7) Hasta ahora hemos enunciado distintas distribuciones que nos permitían estudiar una señal a través de una densidad de probabilidad conjunta tiempo-frecuencia. Sin embargo, al ser tiempo y frecuencia pares no conmutativos y como consecuencia directa del Principio de Incertidumbre, en sus representaciones aparecen términos negativos, cruzados que introducen interferencias a la hora del análisis. Aún realizando una mejora del 'kernel', como en W_{PS} , no desaparecen por completo estos fenómenos.

Como solución a estos problemas nace la tomografía no conmutativa (NCT). Este tipo de tomografía puede aplicarse no sólo a los pares no conmutativos ya mencionados,

tiempo y frecuencia, sino a cualquier tipo de par no conmutativo tal como tiempo-escala y frecuencia-escala. En el capítulo siguiente, nos centraremos en un caso concreto de NCT es la *transformada de Radon-Wigner*. Se trata de una transformada bilineal estrictamente positiva.

A estas alturas ya podemos enunciar una definición de tomograma. Un *tomograma* es una *densidad de de probabilidad estrictamente positiva*. Proporcionan una caracterización total de la señal y robustez contra el ruido. Esto nos permitirá realizar un estudio mediante separación de componentes, ya que resultará sencillo identificar y aislar cada componente/característica de interés que se quiera analizar.

Profundizaremos en el siguiente capítulo en este método de análisis de la señal mediante herramientas NCT y técnica de separación de componentes.

Capítulo 3

Tomografía no conmutativa

*En realidad, prefiero la ciencia a la religión.
Si me dan a escoger entre Dios y el aire
acondicionado, me quedo con el aire.*

Woody Allen

RESUMEN: Este capítulo se enfocará en la tomografía no conmutativa (NCT). Se hará hincapié en los pares no conmutativos más recurrentes, como son tiempo-frecuencia, tiempo-escala o frecuencia-escala.

3.1. Introducción

El mundo real fundamentalmente está compuesto por señales no estacionarias. Ésto hace que tengan un espectro dependiente del tiempo. Como se ha visto en el capítulo anterior, para poder caracterizar de manera total una señal de este tipo era necesario una función de densidad de probabilidad conjunta tiempo-frecuencia. Sin embargo, ya hemos visto que se cumple el principio de incertidumbre 2.1.3.1 entre tiempo-frecuencia, por lo que esa función de densidad de probabilidad buscada teóricamente no se puede dar. Con anterioridad se ha propuesto distribuciones como la Wigner-Ville 2.2.2. No obstante, presentaba ciertos problemas como por ejemplo términos negativos o valores complejos y componentes espúreos.

Entonces...nace la pregunta, ¿cómo podemos caracterizar una señal no estacionaria? Para ello, se necesita toda la información dependiente de tiempo y frecuencia (no necesariamente una densidad de probabilidad conjunta). La función densidad de probabilidad de tiempo $|f(t)|^2$ proyecta la intensidad de la señal en el eje temporal mientras que la $|f(w)|^2$ la proyecta en el eje frecuencial. Para obtener y manipular toda la información tiempo-frecuencia es necesario una familia de funciones $s_\xi(t, w)$. Este conjunto depende de un parámetro ξ que *interpola* entre tiempo y frecuencia. Proyectando la intensidad de la señal en esta variable obtenemos:(8)

$$M(s, \xi) = |f(s_\xi)|^2 \tag{3.1}$$

3.2. Transformada Radon-Wigner

Este tipo de transformada fue originalmente pensada para mejorar el diagnóstico médico mediante tomografía digital de rayos X. Se trata un caso particular de NCT. La elección más simple para s_ξ es la siguiente combinación lineal:(10)

$$s = \mu t + \nu w \quad (3.2)$$

El parámetro ξ es el par (μ, ν) . Elegiremos los siguientes valores.

$$\mu = \frac{\cos(\theta)}{T}, \quad \nu = \frac{\sin(\theta)}{\Omega} \quad (3.3)$$

Siendo

- T : tiempo de referencia adaptado a la señal a estudiar.
- Ω : frecuencia de referencia adaptado a la señal a estudiar.

La función $M(s, \theta)$ interpola entre las funciones de densidad de tiempo y frecuencia. De esta manera, todo el plano tiempo-frecuencia es muestreado y el tomograma correspondiente contiene toda la información de la señal. En lugar de tener las marginales a lo largo del plano A diferencia de distribuciones vistas con anterioridad, es estrictamente positiva para cada valor de θ . Dicha función puede obtenerse mediante la proyección de la Wigner-Ville 2.2.2. Se la conoce como *Transformada de Radon-Wigner*.

3.3. Tomografía no conmutativa tiempo-frecuencia

Usaremos el método de función característica para operar sobre la variable $s = \mu t + \nu w$. En el dominio de representación del tiempo, el operador de frecuencia es $w = -i \frac{\partial}{\partial t}$. La función característica, $C(k)$, es la siguiente: (10)

$$C(k) = \langle e^{ik(\mu t - i\nu \frac{\partial}{\partial t})} \rangle = \int f^*(t) e^{ik(\mu t - i\nu \frac{\partial}{\partial t})} f(t) dt \quad (3.4)$$

Donde $f(t)$ es una señal normalizada, $\int |f(t)|^2 = 1$. Como ya hemos visto A.3, la transformada de Fourier de una función característica es una función densidad de probabilidad.

$$M(s, \mu, \nu) = \frac{1}{2\pi} \int C(k) e^{-iks} dk = \frac{1}{2\pi|\nu|} \left| \int e^{\frac{i\nu t^2}{2\nu} - \frac{its}{\nu}} f(t) dt \right|^2 \quad (3.5)$$

Normalizada $\int M(s, \mu, \nu) ds = 1$.

Para los siguientes casos particulares que se describen más abajo, se obtiene la distribución de la señal analítica en el dominio del tiempo y de la frecuencia

- $\mu = 1, \nu = 0$: Obtenemos $M(t, 1, 0) = |f(t)|^2$.
- $\mu = 0, \nu = 1$: Obtenemos $M(w, 0, 1) = |f(w)|^2$.

Dicha familia de distribuciones marginales $M(s, \mu, \nu)$ contiene toda la información de la señal en cuestión. Se puede demostrar directamente mediante álgebra o bien recurrir a la distribución Wigner-Ville.

$$M(s, \mu, \nu) = \int e^{-iks(s-\mu t-\nu w)} WV(t, w) \frac{dkdw dt}{(2\pi)^2} \quad (3.6)$$

Que despejando la distribución WV, queda la siguiente expresión:

$$WV(t, w) = \frac{1}{2\pi} \int M(s, \mu, \nu) e^{-i(\mu t + \nu w - s)} d\mu d\nu ds \quad (3.7)$$

3.3.1. Otros operadores no conmutativos

En apartados anteriores se ha visto que los tomogramas son proyecciones que se sirven de un operador para interpolar 3.1. (10) Estos operadores pueden estar formados por combinaciones lineales de distintos operadores. A la hora de la elección del operador entran en juego distintos factores. Dependiendo de qué características de la señal queremos enfatizar para su posterior estudio, elegiremos un par u otro.

$$B = \mu O_1 + \nu O_2 \quad \text{Ejemplo Operador} \quad (3.8)$$

Los operadores más frecuentes son los siguientes:

- Tiempo-Frecuencia: $B_{TF} = \mu t + i\nu \frac{d}{dt}$
- Tiempo-Escala: $B_{TE} = \mu t + i\nu(t \frac{d}{dt} + \frac{1}{2})$
- Frecuencia-Escala: $B_{FE} = i\mu \frac{d}{dt} + i\nu(t \frac{d}{dt} + \frac{1}{2})$

3.4. Análisis mediante Tomogramas NCT

Ilustraremos este método con un ejemplo. Para este apartado usaremos la siguiente ecuación. (11)

$$s(t) = \begin{cases} \exp(i30t) & \text{para } 0t < 4 \\ \exp(i30t) + \exp(i10t) & \text{para } 4 < t < 5 \\ \exp(i30t) & \text{para } 15 < t < 20 \\ 0 & \text{para } \textit{Resto} \end{cases} \quad (3.9)$$

Como se observa, esta señal tiene tres componentes diferenciadas. Representamos la señal y sus componentes por separado.

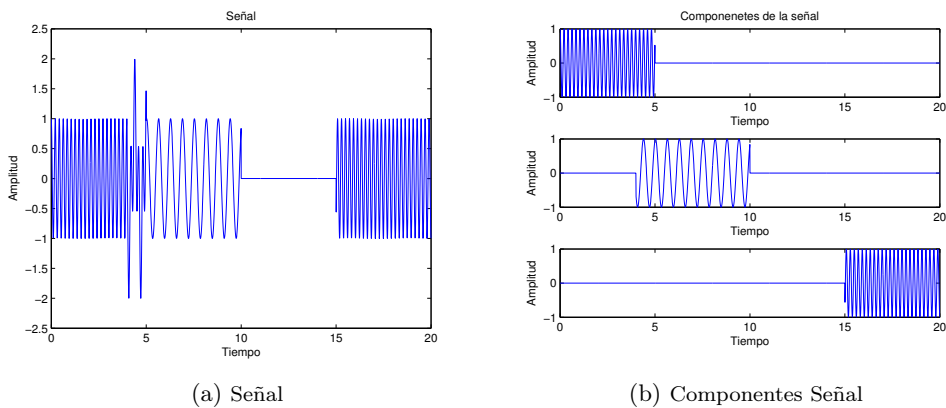


Figura 3.1: Señal y Componentes

Para comprobar la robustez de esta herramientas frente al ruido, a la señal original se le ha añadido ruido blanco gaussiano con una SNR de 10 dB 3.2a y de 2 dB 3.2b respectivamente.

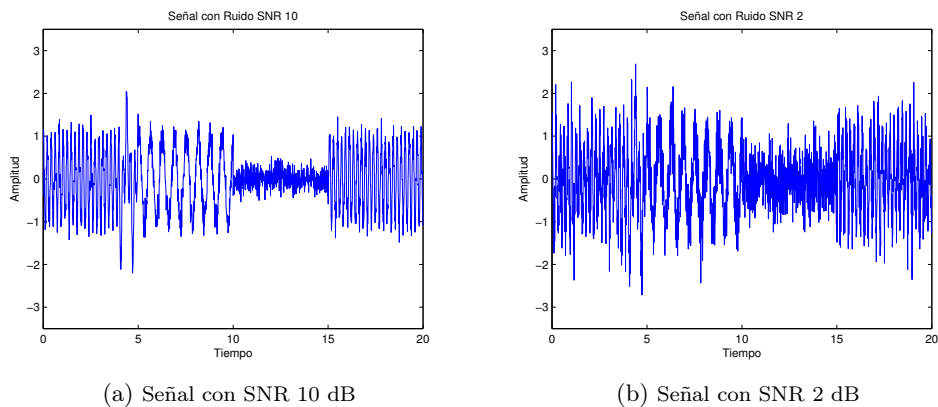


Figura 3.2: Señal con ruido

Utilizaremos el operador tiempo-frecuencia 3.3.1. Una vez elegido el operador, una transformada cuadrática positiva lineal se define:

$$M_s^B(X, \mu, \nu) = \int s^*(t)\delta(B(\mu, \nu) - X)s(t)dt \quad (3.10)$$

Para cada par (μ, ν) el tomograma M resultante provee una distribución de probabilidad sobre la variable X . Corresponde a una combinación lineal del operador 3.3.1 escogido. Realizando un barrido por todos los pares (μ, ν) se obtiene una descripción robusta de la señal. Para una señal $s(t)$, $t \in [0, T]$ podemos definir una familia de densidades de probabilidad, basándonos en 3.10 de la siguiente manera. Para este ejemplo, elegimos $\mu = \cos(\theta)$, $\nu = \sin(\theta)$.

$$M_s(x, \theta) = \left| \int s(t)\Psi_x^{\theta, T}(t)dt \right|^2 = \langle |s, \Psi_x^{\theta, T}| \rangle \quad (3.11)$$

siendo

$$\Psi_x^{\theta, T}(t) = \frac{1}{\sqrt{T}} \exp\left(\frac{-i \cos(\theta)}{2 \sin(\theta)} t^2 + \frac{ix}{\sin(\theta)} t\right) \quad (3.12)$$

- θ : Parámetro que interpola tiempo y frecuencia.
- $\Psi_x^{\theta, T}$: Autofunciones generalizados para cualquier valor de x del operador $B(\theta)$.

$M_s(x, \theta)$ es una función densidad de probabilidad positiva (función de x para cada θ). Visto de un punto de vista abstracto el operador $B(\theta)$, para todos los diferentes valores de θ , hace que todos los tomogramas resultantes contengan la misma información. De manera practica y visual (como veremos en la representación de coeficientes para este ejemplo) a medida que la variable θ barre de 0 a $\frac{\pi}{2}$ la información temporal se va concentrando de manera gradual en valores altos de x .

- $\theta = 0$: La información frecuencial se pierde
- $\theta = \frac{\pi}{2}$: La información temporal se pierde

Para lograr un buen compromiso entre información temporal y frecuencial se busca valores intermedios de θ . Como se verá, es fácil distinguir las distintas componentes que conforman la señal y proceder a su separación. Una vez definido el operador, elegiremos un subconjunto x_n de tal manera que la familia $\Psi_x^{\theta, T}(t)$ sea ortogonal y se encuentre normalizada.

$$\langle \Psi_{x_m}^{\theta, T}(t), \Psi_{x_n}^{\theta, T}(t) \rangle = \delta_{m,n} \quad (3.13)$$

El siguiente subconjunto cumple esa condición. x_0 se selecciona de manera libre, dependiendo de las características de la señal a estudiar. Generalmente, y para este ejemplo, será 0.

$$x_n = x_0 + \frac{2n\pi}{T} \sin \theta \quad (3.14)$$

Una vez hayamos realizado este primer paso, calcularemos las proyecciones de la señal a estudio, $s(t)$. Estas proyecciones son los coeficientes del tomograma.

$$c_{x_n}^\theta(s) = \langle s, \Psi_{x_n}^{\theta, T} \rangle \quad (3.15)$$

Como ya hemos mencionado anteriormente, una buena selección de θ permite seleccionar y realizar un filtrado de las componentes que queremos estudiar. Asimismo, seleccionado un umbral razonable, podemos eliminar el ruido de una manera eficaz sin destruir su información

$$|c_{x_n}^\theta(s)|^2 \leq \epsilon \quad (3.16)$$

Con los coeficientes podemos reconstruir la señal o bien parte de ella (las componentes seleccionadas y filtradas). La reconstrucción de las componentes filtradas se realiza seleccionado subconjuntos k de x_n y limitando el sumatorio únicamente a esos k -componentes.

$$s_k(t) = \sum_{n \in F_k} c_{x_n}^\theta(s) \Psi_{x_n}^{\theta, T}(t) \quad (3.17)$$

Reconstruimos la componentes de la señal como proyecciones espectrales de $s(t)$. Esta técnica, como se comprobará en lo que resta de capítulo, es muy útil para aislar diferentes componentes de la señal.

Usando la anterior fórmula 3.15, calcularemos los coeficientes del tomograma y los representaremos. Tomaremos un $\theta = 0 : \frac{\pi}{40} : \frac{\pi}{2}$. Representamos la tomografía completa 3.4a para las distintos valores del parámetro θ . De esta manera, de una manera rápida y visual, se observan las tres componentes que forman la señal. Para poder proceder a un buen análisis, es necesario seleccionar una θ para la cual las tres componentes se encuentren suficientemente separadas.

Como apreciamos en las siguientes figuras, existen distintos valores θ con los que poder realizar un buen análisis (θ entre 0,3 y 0,15) que, al encontrarse normalizada, equivale a $\frac{12\pi}{40}$ y $\frac{6\pi}{40}$.

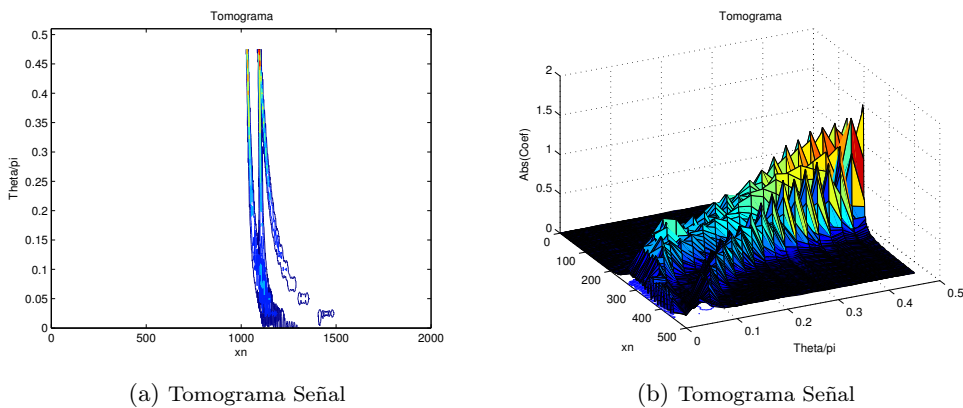


Figura 3.3: Tomograma señal 3.9

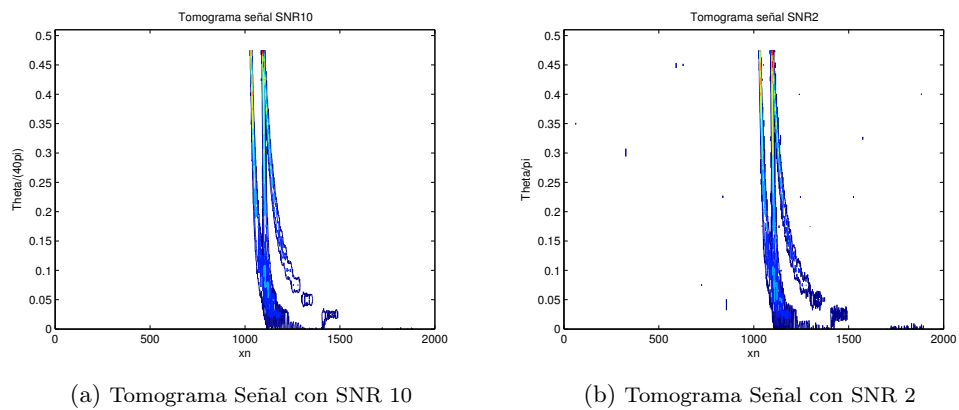


Figura 3.4: Tomograma señal 3.9 con ruido

A continuación representaremos representaremos el tomograma resultante para ciertos valores específicos de θ .

En las siguientes figuras se aprecia todo lo mencionado anteriormente. Para $\theta = \frac{\pi}{4}$ 3.6a se observan las tres componentes de la señal de manera diferenciada, mientras que a medida que θ aumenta se va perdiendo información temporal hasta que para $\theta = \frac{\pi}{2}$ obtenemos la transformada de Fourier. Por lo tanto tomaremos $\theta = \frac{\pi}{4}$ para el análisis de la señal. Se observa lo robusta que es esta herramienta ante el ruido. Seleccionando un umbral adecuado 3.16 podemos minimizar las interferencias que el ruido introduce. Por ejemplo, para una SNR de 10dB, un $\epsilon = 0,1$ sería adecuado, mientras que para una SNR con un $\epsilon = 0,2$ obtendríamos un mejor análisis libre de ruido.

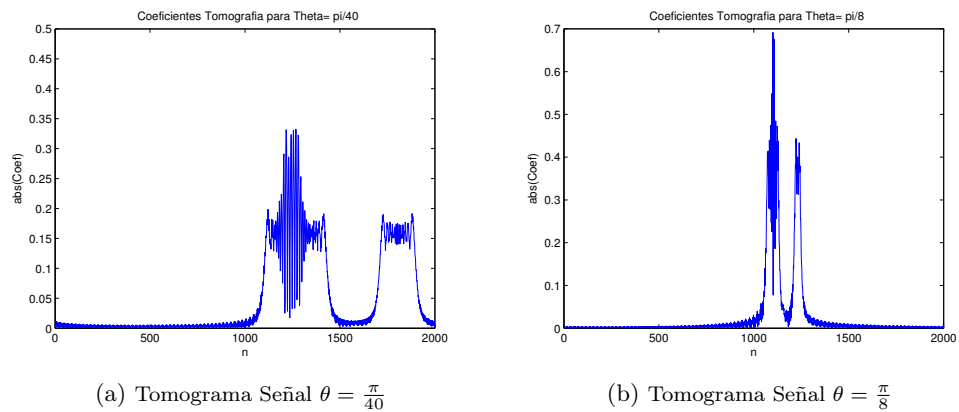


Figura 3.5: Tomograma señal 3.9

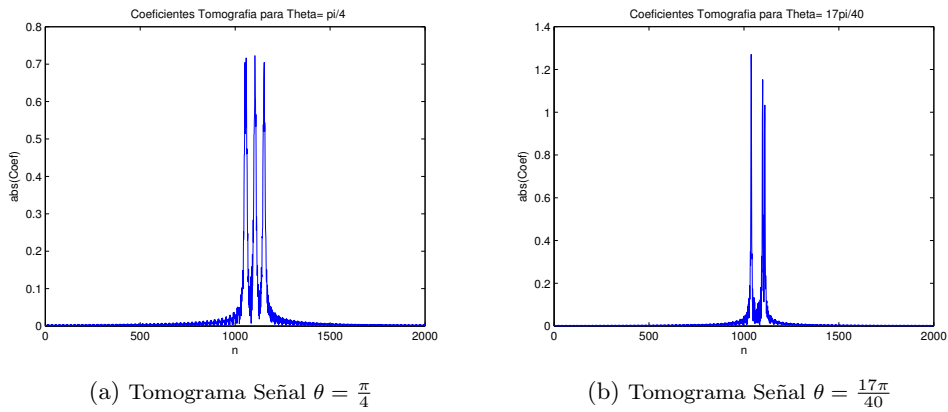


Figura 3.6: Tomograma señal 3.9

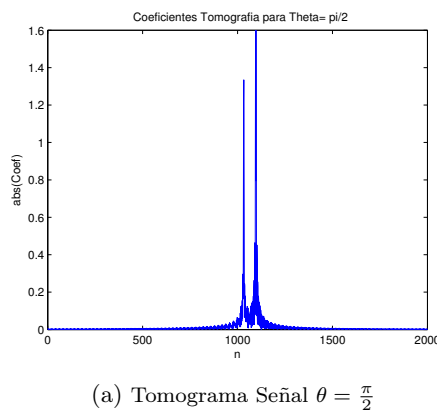


Figura 3.7: Tomograma señal 3.9

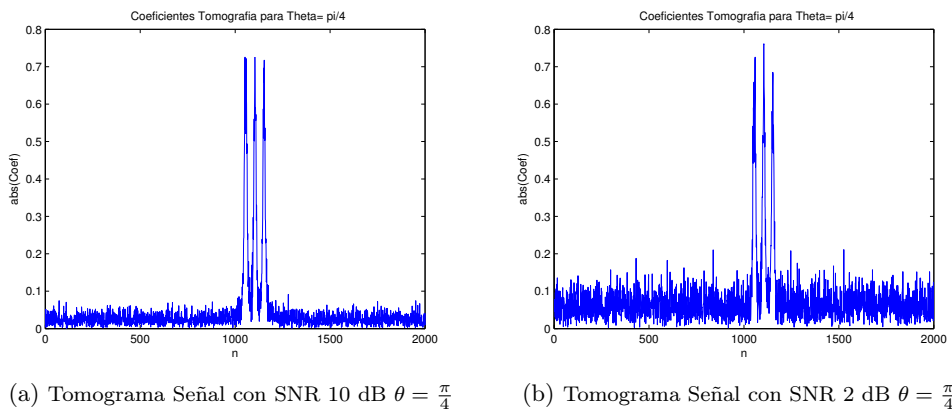
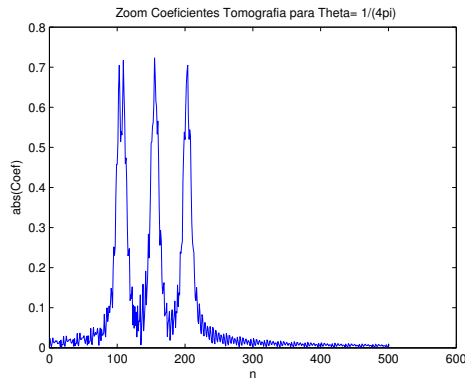


Figura 3.8: Tomograma señal con ruido

3.4.1. Separación de Componentes

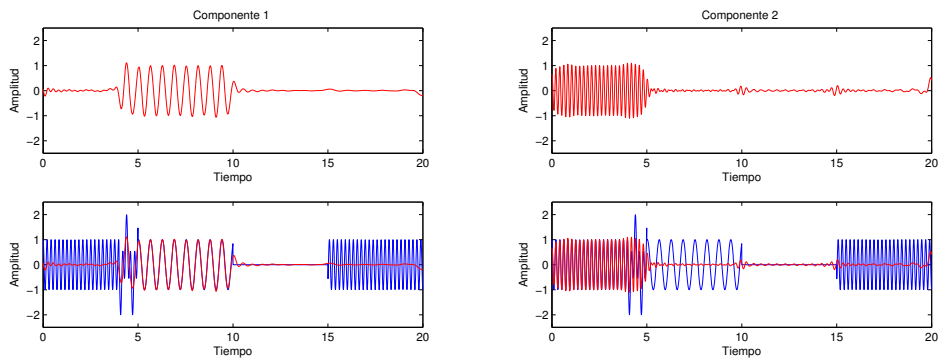
En el apartado anterior hemos concluido que $\theta = \frac{\pi}{4}$. Para poder visualizar de una manera más clara los coeficientes, representaremos el tomograma 3.6a realizando un zoom. De esta manera, obtendremos los rangos de x_n donde se localizan las componentes.

(a) Zoom Tomograma Señal $\theta = \frac{\pi}{4}$ Figura 3.9: Zoom Tomograma señal para $\theta = \frac{\pi}{4}$

Donde:

- Componente 1: Comprende el rango $78 \leq x_n \leq 125$
- Componente 2: Comprende el rango $137 \leq x_n \leq 177$
- Componente 3: Comprende el rango $185 \leq x_n \leq 220$

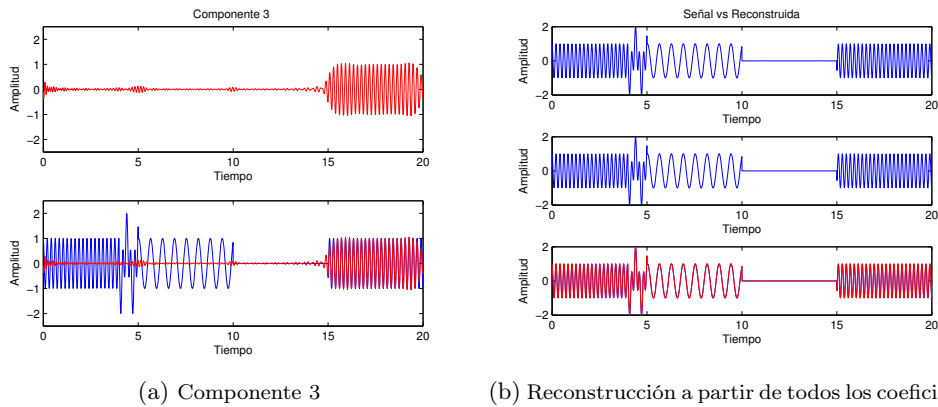
Procederemos a reconstruir la señal a partir de sus componentes 3.17, delimitando el sumatorio a los rangos que comprenden cada componente.



(a) Componente 1

(b) Componente 2

Figura 3.10: Reconstrucción componentes de la señal

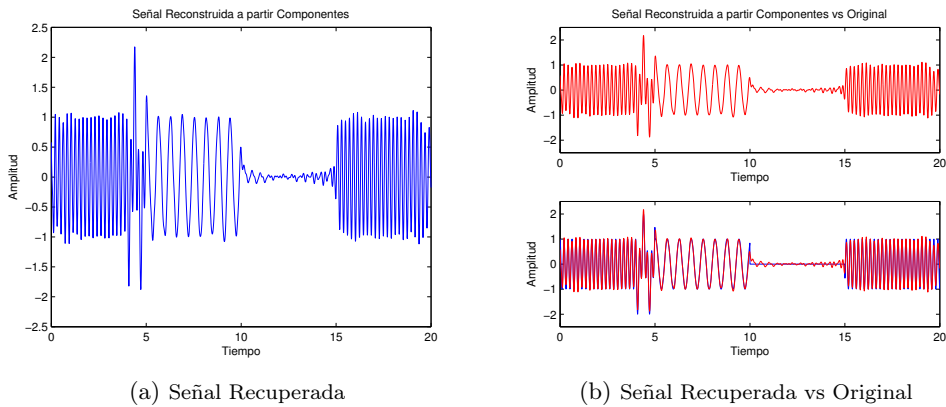


(a) Componente 3

(b) Reconstrucción a partir de todos los coeficientes

Figura 3.11: Reconstrucción componentes de la señal

Se ha representado las componentes reconstruidas de la señal en rojo. En azul se encuentra superpuesta la señal original, para poder compararlas de manera visual. Existen dos métodos para recuperar la señal completa. La primera es es recuperarla incluyendo todos los coeficientes del tomograma en el sumatorio 3.11b. La otra opción, consiste en sumar únicamente las distintas componentes por separado (obviando el resto de coeficientes) 3.12b (abajo).



(a) Señal Recuperada

(b) Señal Recuperada vs Original

Figura 3.12: Reconstrucción señal a partir de sus componentes

El error cuadrático medio será menor si reconstruimos la señal a partir de todos sus coeficientes.

$$E(y, y) = 10 \log_{10} \left(\frac{P_{y-y}}{P_y} \right) \quad (3.18)$$

Hemos calculado el error cuadrático medio para distintos valores de θ . En las siguientes tablas se ha calculado el error cuadrático medio de la señal reconstruida a partir de todos sus coeficientes, $E(y, y)$, y el error cuadrático medio de la señal recuperada a partir de sus componentes, $E(y_c, y_c)$

θ	$\frac{\pi}{40}$	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{17\pi}{40}$	$\frac{\pi}{2}$
$E(y, y_r) \text{ dB}$	-43,83	-30,18	-30,43	-32,38	-36,75
$E(y_c, y_{c_r}) \text{ dB}$	-16,32	-13,87	-17,50	-18,56	-15,49
$E_{SNR10}(y, y_r) \text{ dB}$	-10,40	-10,35	-10,36	-10,38	-10,33
$E_{SNR10}(y_c, y_{c_r}) \text{ dB}$	-11,38	-12,81	-16,23	-17,19	-14,79
$E_{SNR2}(y, y_r) \text{ dB}$	-3,61	-3,59	-3,60	-3,61	-3,60
$E_{SNR2}(y_c, y_{c_r}) \text{ dB}$	-11,59	-12,46	-12,59	-12,67	-11,66

Tabla 3.1: Tabla Errores Cuadráticos Medio

Se ha representado en la anterior tabla los errores cuadráticos para distintos valores de θ y con los rangos de los coeficientes anteriormente mencionados. A mayor ruido, mayor es el error cuadrático medio. Sin embargo, la diferenciación de componentes, salvo para los casos de los extremos θ_s próximos a 0 y $\frac{\pi}{2}$, es buena como se aprecia en los errores cuadráticos medios y en las gráficas anteriores.

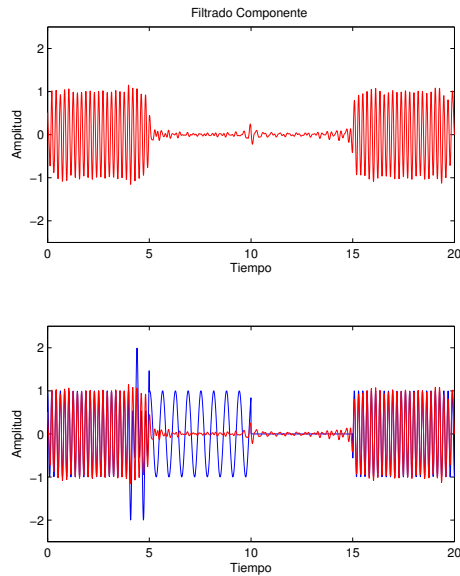
Salvo en el caso ideal de la señal sin ruido, la reconstrucción de la señal a partir de sus componentes, $E(y, y_{c_r})$ es mejor que la reconstrucción de la señal $E(y, y)$ a partir de todos sus coeficientes. La razón es la siguiente: al filtrar y quedarnos únicamente con las componentes que presenta la señal, estamos a la vez filtrando ruido.

3.4.2. Filtrado componentes

Esta técnica resulta muy interesante a la hora de filtrar componentes. En el apartado anterior hemos recuperado de manera separada. Seleccionando un ϵ adecuado podemos filtrar el ruido y con un valor de θ podemos obtener un tomograma con una buena separación entre las componentes.

Una vez identificada la componente a filtrar, existen dos maneras de filtrarla. A la hora de reconstruir la señal 3.17 descartar los coeficientes del rango x_n que corresponden a la componente a filtrar. Otra forma es hacer cero dichos coeficientes. Ambos métodos ofrecen errores cuadráticos medios similares, siendo más bajos, y por lo tanto mejores, descartar los coeficientes del rango de la componente a filtrar/eliminar.

Supongamos, para este caso, que deseamos eliminar la componente $y(t) = \exp(i10t)$ de nuestra señal de muestra 3.9. Esta componente la hemos aislado en el apartado anterior 3.10a. Los coeficientes que corresponden a esta componente 3.4.1 correspondían al rango $78 \leq x_n \leq 125$. Descartando este rango al reconstruir la señal, obtenemos la señal que buscábamos (eliminando la componente).



(a)

Figura 3.13: Señal con componente filtrada

Capítulo 4

Tomografía Adaptada

*Más que máquinas necesitamos más bondad.
Más que inteligencia, tener bondad y dulzura*

Charles Chaplin

RESUMEN: En este capítulo se estudiará un tipo concreto de operador, el operador Adaptado. Este tipo de tomografía (tiempo-datos), resulta muy interesante como veremos más adelante a la hora de analizar y extraer las componentes que queremos estudiar de una señal.

4.1. Introducción

Se ha presentado en el capítulo anterior la tomografía NCT. Este tipo de tomografía presentaba mejoras sustanciales en comparación con las distribuciones vistas en el capítulo dos, como :

- Separación de componentes: Escogiendo un par u otro, enfatizamos unas características u otras para su posterior estudio en profundidad.
- Robustez frente al ruido: Ofrece una gran resultado ante las interferencias del ruido.
- Estrictamente Positiva: Elimina términos negativos que aparecían en otras distribuciones anteriores.

4.2. Análisis mediante tomografía adaptada

Es necesario empezar por el principio. Elegiremos el siguiente par:

$$B(\mu, \nu) = \mu t + \nu O \tag{4.1}$$

Donde O será el operador adaptado a las características que queremos enfatizar de la señal en cuestión. La elección de este operador es crítica a la hora de obtener unos resultados fiables. Por otra parte, para ciertos valores de (μ, ν) los efectos del ruido se anulan pudiendo

obtener información temporal muy precisa. Por consiguiente, obtenemos una *técnica de filtrado adaptado* a la señal.

Detallaremos a continuación la construcción de este par adaptado (13)

4.3. Método de construcción del par adaptado

Para la construcción del par adaptado, partiremos de un set de secuencias temporales N-dimensionales $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_k$. Éste set debe tener la misma forma que las componentes de las señales que queremos detectar. De manera análoga al esquema que sigue las transmisiones de datos codificados, este set se puede considerar como las *code words* que decodifican el mensaje encriptado de manera robusta frente al ruido. Generamos la siguiente matriz:

$$U = \begin{pmatrix} x_1(1\Delta t) & x_1(2\Delta t) & \dots & x_1(N\Delta t) \\ x_2(1\Delta t) & x_2(2\Delta t) & \dots & x_2(N\Delta t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_k(1\Delta t) & x_k(2\Delta t) & \dots & x_k(N\Delta t) \end{pmatrix}.$$

A partir de esta matriz, construimos las siguientes:

- $A = U^T U \in M_{N \times N}$
- $B = U U^T \in M_{K \times K}$

La matriz A proporciona k autovalores no nulos ($\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_j$) y sus correspondientes autovectores ortogonales N-dimensionales ($\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_j$), $\Phi_j \in R^k$. De igual manera, la diagonalización de la matriz B proporciona los mismos k autovectores autovalores y autovectores ($\Psi_1, \Psi_2, \dots, \Psi_j$) con $\Psi_j \in R^k$. Por lo tanto, el operador lineal buscado O es:

$$O = \sum_{i=1}^k \alpha_i \Phi_i \Phi_i^t \quad (4.2)$$

donde $O \in M_{N \times N}$. Por consiguiente, para la construcción del tomograma el operador $B(\mu, \nu)$ queda:

$$B(\mu, \nu) = \mu t + \nu O = \nu \begin{pmatrix} 1\Delta t & & & \\ & 2\Delta t & & \\ & & \dots & \\ & & & N\Delta t \end{pmatrix} + \nu \sum_{i=1}^k \alpha_i \Phi_i \Phi_i^t \quad (4.3)$$

B, al igual que O, $\in M_{N \times N}$. El tomograma adaptado se construye a partir de las proyecciones de los autovectores de cada $B(\mu, \nu)$. Éstos son las columnas de la matriz que la diagonaliza.

Capítulo 5

Señales Biológicas

Los animales, asombrados, pasaron su mirada del cerdo al hombre, y del hombre al cerdo; y nuevamente, del cerdo al hombre: pero ya era imposible distinguir quién era uno y quién era otro

George Orwell

RESUMEN: En este capítulo se enunciarán brevemente los distintos tipos de señales biológicas que hay en el ser humano (extendible al mundo animal). Se presentarán las distintas maneras de comunicación celular para posteriormente centrarse en la *comunicación neurocrina*. Se presentará el sistema nervioso y se profundizará en la neurona y la sinapsis. A su vez se presentarán distintos modelos neuronales

5.1. Introducción

En el cuerpo humano podemos encontrar dos tipos de señales fisiológicas, señales químicas y señales eléctricas. Las señales químicas son moléculas secretadas por las células en el líquido extracelular. Las señales químicas son más abundantes que las eléctricas y por lo tanto responsables de la mayor parte de comunicación en el organismo. Las señales eléctricas se producen debido a cambios en el potencial de membrana, como se verá en los siguientes apartados. La transmisión de señales químicas es más lenta que la de señales eléctricas y llevan más información.

La transferencia de información está regulada por el sistema endocrino (señales químicas) y el sistema nervioso (señales nerviosas y químicas). En animales vertebrados, la coordinación de ambos sistemas se realiza en el hipotálamo. Esta función puente realizada por el hipotálamo está mediada por células que presentan a la vez propiedades de células nerviosas y endocrinas. Esta forma híbrida de transmisión de señales se denomina función neuroendocrina. La integración de ambos tipos de señales da como resultado el comportamiento general del animal.

5.2. Comunicación celular

El cuerpo humano utiliza cuatro métodos de comunicación interna, entre células. *Uniones en hendidura o comunicantes*: permiten la transferencia citoplasmática directa de señales químicas o eléctricas entre células adyacentes. *Señales dependientes del contacto*: ocurren cuando las moléculas de una membrana celular se unen a las de otra. *Comunicaciones locales*: debidas a sustancias químicas que se difunden a través del líquido extracelular y por último, *Comunicaciones a larga distancia*: que se produce debido a señales eléctricas transportadas a lo largo del sistema nervioso o de señales químicas transportadas a través del torrente sanguíneo. Podemos clasificar las comunicaciones celulares de la siguiente manera:

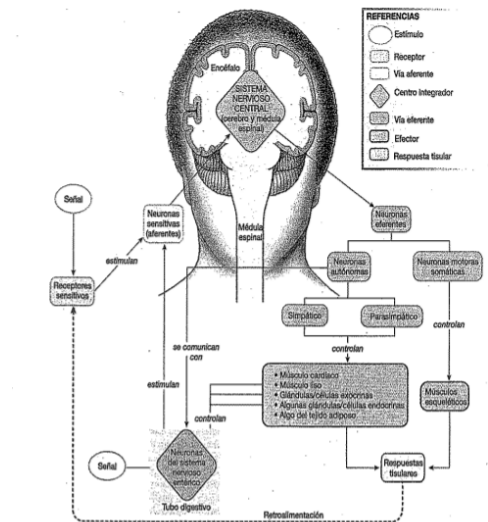
- **Comunicación Autocrina**: Se produce cuando es la misma célula la que actúa como emisor y receptor
- **Comunicación Paracrina**: Se basa en una señal química liberada que se difunde a células diana/ receptoras próximas a través del espacio extracelular.
- **Endocrina**: La célula emisora libera las hormonas (señal química) al torrente sanguíneo. El receptor no suele estar próximo.
- **Comunicación Neuroendocrina** Es idéntico al endocrino salvo que la hormona (señal química) se produce en una neurona. Estas hormonas producidas por neuronas se denominan neurohormonas y son diferentes a los neurotransmisores.
- **Comunicación Neurocrina**: Las neurona liberan señales químicas que son activas a corta distancia. Puede ser de dos tipos, **neuropéptidos** o *neurotransmisores*. Los neuropéptidos actúan como neuromoduladores, que son moléculas de señalización neuronal en la comunicación entre neuronas (mediadoras que ejercen efecto sobre neuronas próximas). Los neurotransmisores, secretados por neuronas, son una sustancia liberada por una terminal nerviosa que actúa exclusivamente a nivel sináptico sobre las membranas postsinápticas.
- **Feromonas** : señales químicas cuyo emisor y receptor son distintos individuos de la misma especie.
- **Alomonas** : señales químicas cuyo emisor y receptor son distintos individuos de distinta especie.

5.3. Sistema Nervioso

El sistema nervioso, junto con el sistema sistema endocrino , son los dos mayores sistemas de control del organismo cuyo objetivo es el mantenimiento de la homeostasis B.1. A diferencia del endocrino, se trata de un sistema cableado. Todas las células nerviosas terminan directamente sobre sus células diana/receptoras. El sistema nervioso del ser humano se puede dividir en dos, *sistema nervioso central - médula espinal y encéfalo-* (SNC) y *sistema nervioso periférico* (SNP). Este último está constituido por neuronas aferentes (sensitivas) Posee componentes tres tipos de *componentes* distintas:

- Sensoriales: detectan estímulos.
- Integradoras: procesan datos sensoriales junto a información almacenada en la memoria.

- Efectores: generan movimiento y otras actividades.



■ FIGURA 8-1 Organización del sistema nervioso
El sistema nervioso periférico (SNP) envía información al sistema nervioso central (SNC) a través de neuronas aferentes (sensitivas) y lleva la información del SNC hacia las células diana a través de neuronas eferentes. El sistema nervioso entérico puede actuar de forma autónoma o puede estar controlado por el SNC a través de la división autónoma del SNP.

(a)

Figura 5.1: Organización sistema nervioso

El sistema nervioso central es el centro integrador de los reflejos neuronales. Integra la información que llega por la vía aferente del sistema nervioso periférico. El SNC envía una respuesta, en caso de ser necesario, a través de las neuronas eferentes del cuerpo. Las vías eferentes (salida) transmiten **potenciales de acción** a sus órganos diana. En este proceso se liberan mensajeros químicos, **neurotransmisores** que interactúan de una manera específica con los receptores que se encuentran en las células diana o receptoras. La especificidad neuronal (en contraposición al sistema endocrino) se debe a la proximidad anatómica que hay entre emisor y receptor. La liberación del neurotransmisor está restringida y acotada a la propia célula (no es transportada) y además, después de su liberación, es inhibido rápidamente mediante enzimas. El SNC también es capaz de iniciar actividad sin estímulos externos (aferencias sensitivas) y no crear ninguna respuesta visible. El pensamiento y el sueño son funciones que ocurren por entero dentro del SNC.

El sistema nervioso está compuesto por elementos neuronales y elementos no neuronales. Todo el espacio del sistema nervioso no ocupado por neuronas se denomina **glía** o **neuroglía**. Son el elemento más numeroso en el sistema nervioso, su proporción es aproximadamente de entre 10 y 50 a 1. Proporcionan un soporte físico y bioquímico a las neuronas. Aunque poseen potencial de membrana, no son excitables, por lo tanto, no participan directamente en la transmisión de señales eléctricas. La comunicación entre neuronas y células de la glía se realiza a través de señales químicas.

5.4. Neurona

La neurona es la unidad estructural y funcional del sistema nervioso. Su morfología es muy variada, existen centenares de tipos neuronales distintas que difieren en forma, tamaño y disposición de sus prolongaciones las cuales se extienden hacia afuera del cuerpo celular.

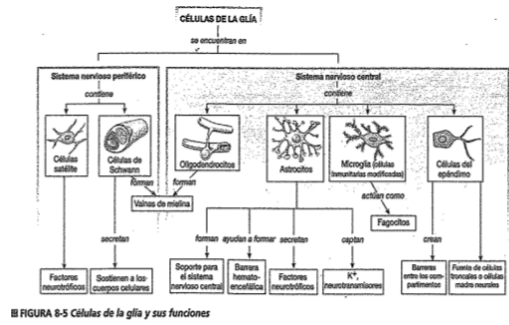


FIGURA 5-5 Células de la glía y sus funciones

(a)

Figura 5.2: Tipos de células glía

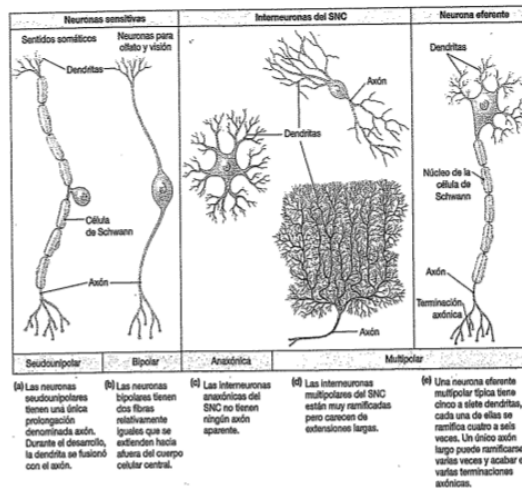
Podemos clasificarlas basándonos en criterios estructurales o funcionales. Desde un punto de vista estructural podemos clasificar las neuronas según la cantidad de prolongaciones que tienen a partir del cuerpo celular.

- Anaxónicas: No tienen un axón identificable.
- Seudounipolares: El axón y las dendritas se fusionan durante el desarrollo y forman una prolongación larga.
- Bipolares: Un axón único y una única dendrita
- Multipolares : Un axón y muchas dendritas.

Resulta más interesante clasificarlas desde una perspectiva funcional.

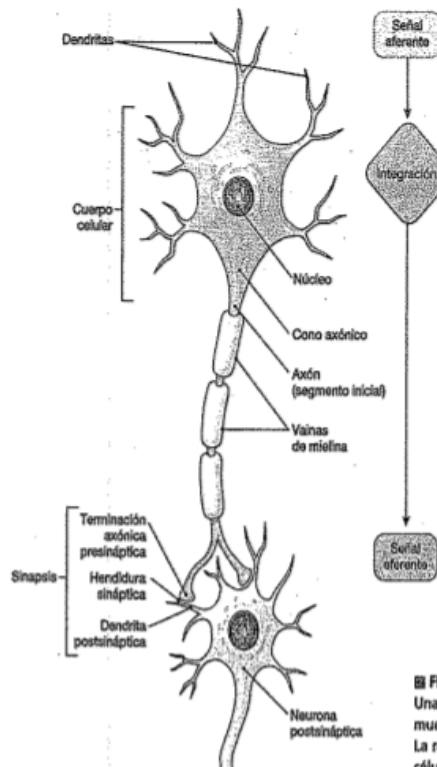
- **Neuronas sensitivas (aférentes):** Se encuentran en el SNP. Captan y transmiten información sobre el medio (T^o, presión, luz..) a centros superiores (integradores) que se encuentran en el SNC. Las neuronas sensitivas que se encuentran en zonas periféricas del cuerpo , más alejadas del SNC, tienen cuerpos celulares con prolongaciones muy largas. El cuerpo celular no se encuentra en el eje de las señales. Por lo contrario las que se encuentran próximas al SNC, como las asociadas a la vista y al olfato, tienen dos prolongaciones. En este caso, las señales que comienzan en las dendritas sí transcurren por el cuerpo celular hasta el axón.
- **Interneuronas:** Se denomina así a todas las neuronas del SNC. También se las conoce como neuronas de *interconexión*. Presentan distintas formas, pero generalmente suelen ser neuronas multipolares, con muchas prolongaciones que permiten comunicarse con muchas neuronas adyacentes.
- **Neuronas eferentes:** Presentan regiones ensanchadas a lo largo del axón denominadas varicosidades que almacenan y liberan neurotransmisores. Los axones largos tanto de las neuronas aferentes como eferentes forman manojos denominados nervios, que se extienden desde el SNC hasta las neuronas diana. Los nervios pueden transportar señales aferentes (motoras), señales eferentes (sensitivas) o señales en ambas direcciones.

Tomaremos el siguiente diagrama de una neurona modelo 5.4a para detallar una descripción de las distintas partes que conforman una neurona. El cuerpo celular, también conocido como **soma celular** es el centro de control de la neurona compuesto por un núcleo,



(a)

Figura 5.3: Clasificación Neuronal



(a)

Figura 5.4: Dibujo Neurona Modelo

generalmente pequeño, que dirige la actividad celular. El citoesqueleto se extiende hacia el axón y las dendritas.

Las **dendritas** son prolongaciones finas y ramificadas que reciben información aferente desde las células vecinas. Una neurona puede tener una sola dendrita o múltiples dendritas (por ejemplo, las del encéfalo). La superficie de una dendrita puede expandirse más por

medio de las *espinas dendríticas*. Dentro del SNP, su función principal es recibir información aferente y transmitirla a centros superiores (integradores). En el SNC, las espinas dendríticas pueden funcionar como unidades independientes, intercambiando señales con otras neuronas próximas. Su morfología puede cambiar. Este cambio se asocia con procesos de aprendizaje, memoria y algunas enfermedades (Alzheimer).

Los **axones** transmiten señales eléctricas eferentes desde el centro integrador de la neurona hasta la terminación del axón. Los axones tienen distintas longitudes de m a μm . Su terminación recibe el nombre de *terminación axónica* que junto al cono axónico se conoce también como *zona gatillo*. Es aquí donde la señal eléctrica es traducida a señal química, liberando neurotransmisores, neuromoduladores o neurohormonas. Se llama *sinapsis* a la región donde una terminación axónica se encuentra con una célula diana.

5.4.1. Potencial de membrana en reposo

Muchos de los solutos que se encuentran en el organismo son iones. El **potasio**, K^+ , es el principal catión (ión positivo) intracelular mientras que el **sodio**, Na^+ , es el más abundante en el líquido extracelular. El comportamiento intracelular no es eléctricamente neutro, contiene distintos aniones que le hacen poseer carga negativa. A su vez, el líquido extracelular tiene una carga neta positiva. Por lo tanto, existe un desequilibrio eléctrico. Procederemos a explicar cómo aparece esta desigualdad, llamada **potencial de membrana en reposo**, PMR, y cómo se origina el **potencial de acción**.

La membrana no es permeable por igual a todos los iones. Por ejemplo, la membrana de las células del ser humano es 40 veces más permeable al potasio que al sodio. Existen canales que se abren y permiten desplazarse a las iones del citoplasma al líquido extracelular y viceversa. Este canal trata de equilibrar la diferencia de concentración entre un extremo y otro. Se genera un **gradiente de concentración**. A su vez, el desplazamiento de iones establece un **gradiente eléctrico** que se conoce como *diferencia de potencial de membrana en reposo*. Los siguientes factores determinan el potencial de membrana en reposo:

- Gradientes de concentración y eléctrico.
- Permeabilidad de la membrana a cada ion.

La ecuación Goldman-Hodgkin-Katz predice el potencial de membrana en reposo, V_m para los múltiples iones a los que la membrana es permeable. Se observa que el potencial de membrana es una función del gradiente de concentración y de la permeabilidad de la membrana a cada ion.

CUADRO B-2 Concentraciones iónicas y potenciales de equilibrio			
IÓN	LÍQUIDO EXTRACELULAR (mM)	LÍQUIDO INTRACELULAR (mM)	E_{ion} A 37 °C
K^+	5 mM (intervalo normal: 3,5-5)	150 mM	-90 mV
Na^+	145 mM (intervalo normal: 135-145)	15 mM	+60 mV
Cl^-	108 mM (intervalo normal: 100-108)	10 mM (intervalo: 5-15)	-63 mV

(a) Concentración y Potencial Equilibrio

Figura 5.5: Iones más comunes

Existen **canales iónicos** que controlan la permeabilidad de las neuronas a los iones. Estos canales, abren y cierran sus compuertas según cierto tipo de condiciones. En la neurona existen cuatro tipos de canales iónicos:

- Sodio, Na^+ .
- Potasio, K^+ .
- Calcio, Ca^{2+} .
- Cloro, Cl^- .

Estos tipos de canales pueden estar abiertos la mayor parte del tiempo, *canales permeables*, o la apertura y cierre de sus compuertas estar sujeta a ciertos estímulos. Estos canales iónicos, que son proteínas, los podemos clasificar según su velocidad de apertura o según la respuesta a ciertos estímulos:

- Canales iónicos con compuerta mecánica: Se encuentran en neuronas sensitivas (SNP). Se abren y cierran en respuesta a estímulos físicos: presión, fuerza...
- Canales iónicos regulados por compuerta química: Existen en la mayoría de las neuronas. Responden a ciertos compuestos químicos tales como neurotransmisores, neuromoduladores...
- Canales iónicos regulados por voltaje: Responden a cambios de potencial en la membrana. Su función es determinante a la hora de la iniciación y conducción de señales eléctricas.

Cada canal tiene un estímulo o voltaje umbral que lo activa o inactiva. La apertura o cierre de un canal modifica la permeabilidad de la membrana. El cambio de permeabilidad crea señales eléctricas. Al abrirse un canal, los iones forman un flujo neto en favor del gradiente de concentración y eléctrico que despolariza o hiperpolariza la célula, generando señales eléctricas.

Hablaremos de dos tipos de señales eléctricas: **potenciales escalonados** y potenciales

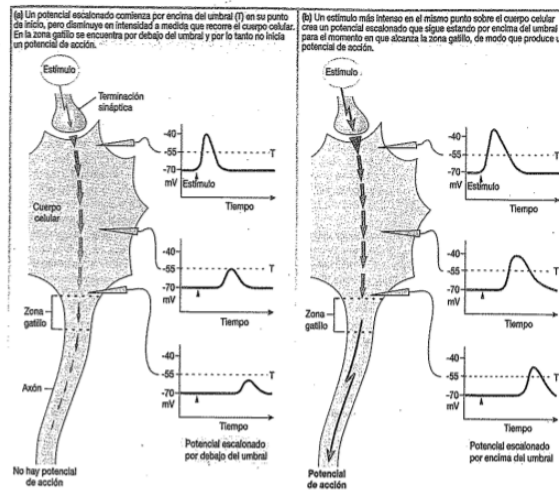
de acción. El potencial escalonado recibe ese nombre ya que su tamaño o amplitud es directamente proporcional de la intensidad del estímulo que lo genera. En las neuronas del SNC y sección eferente del sistema nervioso, dichos potenciales aparecen cuando señales químicas provenientes de otras neuronas habilitan y abren canales iónicos regulados por compuerta química, lo que inicia la entrada y salida de ciertos iones. Pongamos, pues, que un cierto estímulo abre un canal de sodio. Los iones comienzan a fluir en favor de su gradiente de concentración (hacia adentro de neurona) lo que introduce una energía eléctrica, lo que origina una despolarización de la misma. Esta onda de despolarización que se propaga a través del citoplasma se conoce como flujo de corriente local. A mayor intensidad del estímulo, más canales iónicos se abren y por lo tanto esta onda puede llegar más lejos. A diferencia de los potenciales de acción, los potenciales escalonados pierden intensidad a medida que avanzan por el citoplasma. Las causas que generan esta pérdida de intensidad son:

- Pérdida de corriente: La membrana en el cuerpo celular no es un buen aislante por lo que algunas cargas positivas se filtran.
- Resistencia del citoplasma: El propio citoplasma presenta una resistencia al flujo de electricidad.

Si el estímulo ha sido suficientemente intenso, el potencial escalonado llegará a una región neuronal conocida como **zona gatillo**. Esta región, para neuronas eferentes e interneuronas se localiza en el cono axónico y en la primera porción del axón. La zona gatillo es el centro integrador de la neurona y contienen gran cantidad de canales de Na^+ regulados por voltaje. Si el potencial escalonado alcanza un voltaje umbral estos canales se abren y se inicia el potencial de acción. En una neurona típica de mamífero, el valor umbral es $V_m = -55mV$.

5.4.2. Potencial de acción

Ya se ha visto cuál es el origen de los potenciales de acción. Se denominan en ocasiones fenómenos de todo o nada, ya que no suceden a medias. Si la intensidad del potencial escalonado supera el voltaje umbral, se dispara, en caso contrario, no. A diferencia de los potenciales escalonados, estos no pierden intensidad a medida que recorren la neurona. En este proceso intervienen dos tipos de canales iónicos, uno Na^+ de y otro K^+ , ambos regulados



(a) El potencial escalonado no alcanza el umbral en la zona gatillo (b)El potencial escalonado supera el umbral en la zona gatillo y da lugar al potencial de acción

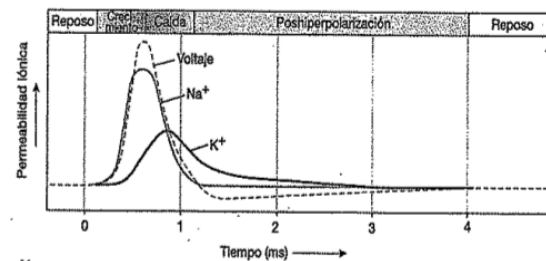
Figura 5.6: Potencial escalonado subumbral y supraumbral

por voltaje.

En el SNC el proceso es más complejo, ya que disparan distintos patrones sin necesidad de un estímulo previo. Algunas neuronas pueden ser tónicamente activas y disparar patrones regulares de potenciales de acción (marcapasos) o bien alternar disparos con momentos de reposo. Estos sucesos son creados por una variedad de canales tónicos cuyos voltajes de activación, inactivación así como las velocidades de apertura y cierre son distintas a las neuronas del SNP.

Un potencial de acción puede dividirse en tres fases:

- Fase de crecimiento
- Fase de caída
- Fase de hiperpolarización



(a) Las distintas fases del potencial de acción

Figura 5.7: Fases del potencial de acción

Un estímulo, un potencial escalonado con intensidad suficiente, alcanza la zona gatillo de la neurona haciendo variar la permeabilidad de la membrana al Na^+ . La membrana se

despolariza hasta el umbral , $V_m = -55mV$, permitiendo que se abran los canales regulados por voltaje del Na^+ . A su vez los canales regulados por voltaje del K^+ , al despolarizarse la neurona, también se abre aunque de manera mucho más lentamente que los del Na^+ . La rápida entrada Na^+ hace que el potencial de membrana se vuelva progresivamente más positiva, *fase de crecimiento*. La entrada de Na^+ continúa realizándose hasta que se cierran las compuertas en el axón.

Comienza la *fase de caída*. En el momento pico los canales de Na^+ se cierran y acaban de abrirse por completo los de K^+ . El K^+ comienza a fluir hacia afuera de la neurona, a favor de los gradientes de concentración y eléctrico. El potencial de membrana se va tornando cada vez más negativo hasta alcanzar alrededor de $V_m = -90mV$. En ese momento, los canales lentos regulados por voltaje del K^+ se cierran, lo que hace que salga menos potasio de la célula. Nos encontramos entonces en la fase de *hiperolarización*. Volvemos al equilibrio inicial del potencial de membrana en reposo. En el axón, los canales de Na^+ regulados por voltaje tienen dos compuertas, llamadas de activación e inactivación que se mueven hacia atrás y adelante para abrir el canal del Na^+ . Una vez comienza el proceso de despolarización, el ion penetra en la neurona creando un bucle de retroalimentación positiva (se abren más canales). El movimiento de compuerta de inactivación está retrasado alrededor de $0,5ms$ deteniendo así la circulación de iones de sodio. Mientras se produce la repolarización de la neurona a partir de los movimientos del K^+ , los canales vuelven a su estado inicial de reposo.

Al hablar del potencial de acción existen dos conceptos que no podemos olvidar, los *periodos refractarios absoluto y relativo*. Como se ha mencionado con anterioridad que los potenciales de acción no se pueden sumar o superponer mientras que los potenciales escalonados sí. Es decir, una vez disparado el potencial de acción no se puede lanzar un segundo de manera adicional. Se denomina PRA al tiempo absoluto necesario para que los canales de Na^+ vuelvan a su estado de reposo. Al PRA le sigue el PRR. Durante este periodo, muchas compuertas ya se encuentran cerradas pero no todas. Durante este periodo, los canales de K^+ también se encuentran abiertos, ya que nos encontramos en la fase de repolarización. Por lo tanto, para volver a abrir los canales de Na^+ será necesario un estímulo mayor.

Ahora bien, ¿cómo se codifica la información?, ¿dónde reside la información en los potenciales de acción? Todo potencial de acción en una neurona tiene la misma amplitud. Un potencial escalonado no desencadena un único potencial de acción, sino una ráfaga o salva de disparos. Es en la frecuencia donde reside la información. El estímulo y la frecuencia son directamente proporcionales. La liberación de neurotransmisores está relacionado con la cantidad de potenciales de acción por unidad de tiempo.

Los potenciales de acción recorren todo el axón desde la zona gatillo hasta la terminación axónica, abriéndose y cerrándose en la membrana canales iónicos regulados por voltaje. Se necesitan el movimiento de muy pocos iones durante un potencial de acción. El mecanismo que finalmente restablece los niveles de Na^+ y K^+ se conoce bomba iónica conocida como *ATPasa K^+Na^+* .

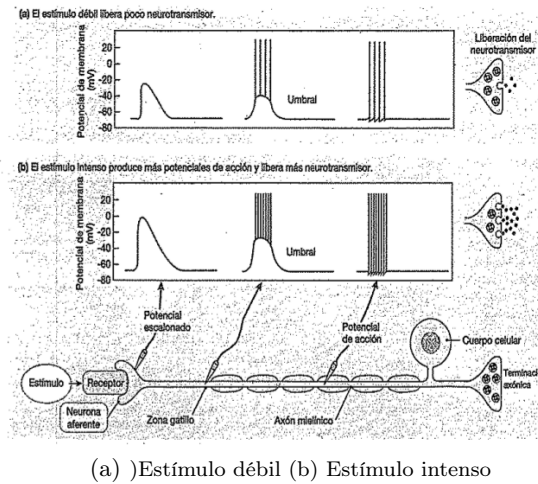


Figura 5.8: Codificación del estímulo

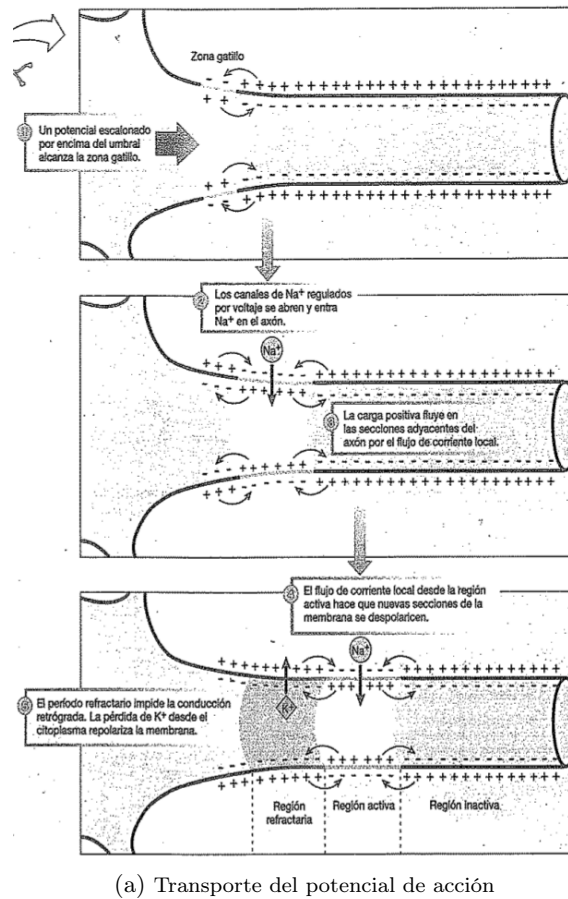


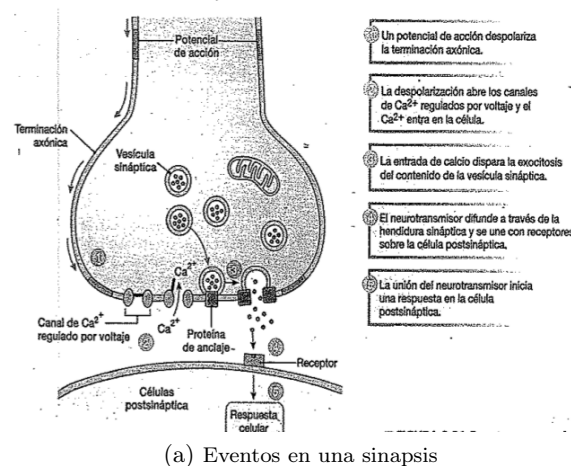
Figura 5.9: Transporte del potencial de acción

5.5. Sinapsis

La comunicación nerviosa aúna tanto señales químicas como señales eléctricas. Se denomina *sinapsis* a la región donde la información pasa de una neurona a otra. Consta

de dos partes, la terminación axónica de la célula presináptica y la membrana de la célula postsináptica. Las células postsinápticas pueden o no ser neuronas. En el caso de que ambas células son neuronas, las terminaciones axónicas presinápticas se encuentran próximas a las dendritas o soma celular de la neurona postsináptica. Las sinapsis se puede clasificar según su carácter:

- Sinapsis eléctricas: la señal que se transmite directamente desde el citoplasma de la célula o a través de las uniones en hendidura. Puede darse en ambas direcciones. Es más común en el SNC.
- Sinapsis químicas: se utilizan neurotransmisores para pasar información de una señal a la siguiente. La señal eléctrica (potencial de acción) de la célula presináptica se convierte en una señal química cuyo receptor se encuentra en la célula postsináptica. La receptor del neurotransmisor por la célula diana activa una respuesta eléctrica acorde o bien un vía de segundos mensajeros.



(a) Eventos en una sinapsis

Figura 5.10: Eventos en una sinapsis

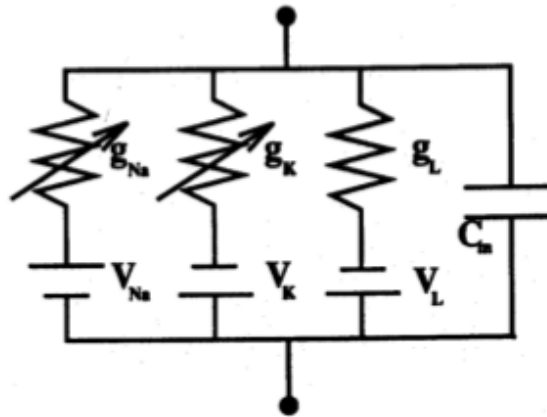
En la anterior figura vienen detallados los distintos eventos que suceden en una sinapsis. El potencial de acción es el desencadenante. Al llegar a la terminación axónica la despolariza. Dicha despolarización abre canales de Ca^{2+} y dicho ión penetra en la célula presináptica que dispara la liberación del neurotransmisor por exocitosis. B.1. Los iones de Ca^{2+} se unen a proteínas reguladoras que inician la exocitosis. La membrana de la vesícula sináptica se vuelve parte de la membrana terminal del axón. Esa fusión abre un canal por el cual únicamente puede, por sus características, atravesar el neurotransmisor. Una vez liberado el neurotransmisor, retorna a su estado de reposo. Los receptores de los neurotransmisores en la célula postsináptica pueden ser de dos tipos: canales iónicos regulados por ligando o receptores asociados a la proteína G. Estos primeros crean **potenciales sinápticos rápidos** mientras que los segundos crean **potenciales sinápticos lentos**. Si el potencial sináptico es despolarizante, se denomina *potencial postsináptico excitatorio* ya que originará un potencial de acción. Si es hiperpolarizante, se conoce como *potencial postsináptico inhibitorio*. Los potenciales sinápticos lentos están asociados con los segundos mensajeros, que tardan más en originar un evento.

5.6. Modelados Neuronales

Son muchas las propuestas que la neurociencia ha propuesto para modelar todos los eventos que ocurren en el sistema nervioso. En esta sección se hará un repaso de los modelos más utilizados, según su realismo, complejidad, gasto computacional... Se pueden englobar los modelos en cuatro categorías basándonos en su realismo y complejidad. De menor complejidad y por lo tanto menor realismo, modelo abstracto, modelo de integración y disparo, modelos dinámicos simplificados y el modelo Hodgkin-Huxley de conductancia.

5.6.1. Modelo Hodgkin-Huxley

Este modelo es el más realista y con mayor coste computacional. Propusieron este modelo realista de la membrana y todos los sucesos que hemos descrito en los apartados anteriores. Su modelo original, enunciado en 1952 a partir del estudio del axón del calamar gigante, consistía mayoritariamente en dos corrientes, una Na transitoria y otra 'constante' de K. El modelado de los canales iónicos regulados por voltaje está definido por el siguiente circuito.



(a) Modelo Hodgkin-Huxley

Figura 5.11: Modelo Hodgkin-Huxley

Este modelo caracteriza el *potencial de membrana*. Su valor es función de las distintas corrientes iónicas que se suceden en la neurona. Consta de un conjunto de ecuaciones diferenciales de primer orden que caracterizan la biofísica ya estudiada del transporte de los iones que sucede en la membrana.

$$C_m \frac{dV}{dt} = I_{ext} - g_L(V - V_L) - g_{Na}m^3h(V - V_{Na}) - g_Kn^4(V - V_K) \quad (1)$$

$$\frac{dm(V)}{dt} = \alpha_m(V)(1 - m) - \beta_m(V)m \quad (2)$$

$$\frac{dh(V)}{dt} = \alpha_h(V)(1 - h) - \beta_h(V)h \quad (3)$$

$$\frac{dn(V)}{dt} = \alpha_n(V)(1 - n) - \beta_n(V)n \quad (4)$$

(a) Fórmulas modelo Hodgkin-Huxley

Figura 5.12: Fórmulas modelo Hodgkin-Huxley

Donde:

- V es el potencial de membrana.
- h, m, n : son variables de la apertura y cierre de los canales de Na y K
- g_{Na}, g_K : conductancia no lineal del Na y K
- g_L : conductancia lineal del sistema.
- α, β : Son funciones de V que se ajustan a datos empíricos fisiológicos
- V_{Na}, V_K, V_L : Son los potenciales de equilibrio para los iones Na, K y para el sistema
- C_m : Capacidad de la membrana por unidad de área
- I_{ext} : Corriente externa aplicada

5.6.2. Modelo Hindmarsh-Rose

Se trata de un modelo dinámico simplificado. Este tipo de modelos imitan la generación de potenciales de acción de manera similar al modelo H-H pero de una manera más simple. Tienen un menor coste computacional ya que, entre otras cosas, se reduce el número de variables. Toma como base ecuaciones diferenciales de primer orden.

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= y - ax^3 + bx^2 + I - z, \\ \dot{y} &= c - dx^2 - y, \\ \dot{z} &= r(s(x - x_1) - z), \end{aligned} \right\}$$

(a) Ecuaciones modelo Hindmarsh-Rose

Figura 5.13: Ecuaciones modelo Hindmarsh-Rose

Donde:

- $x(t)$ es el potencial de membrana
- $y(t)$ corriente rápida
- $z(t)$ corriente lenta

Capítulo 6

Experimentos

*El modo de dar una vez en el clavo
es dar cien veces en la herradura.*

Miguel de Unamuno

RESUMEN: En este capítulo se realizarán distintos tipos de pruebas sobre señales artificiales y datos reales para discernir si la tomografía es una buena herramienta a la hora de caracterizar señales biológicas con eventos transitorios.

6.1. Operador Tiempo-Datos

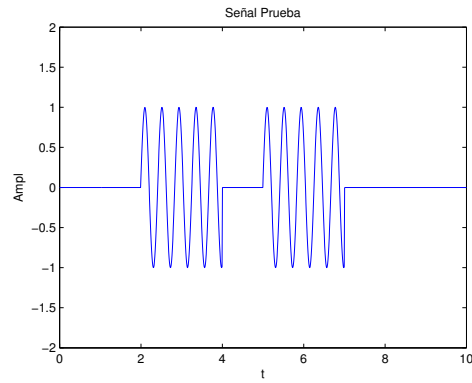
Para la construcción del operador tiempo-datos 4.3 que hemos utilizado a la hora de realizar los siguientes experimentos, se ha utilizado un set 4.3 que contiene patrones de disparo a modo de ráfaga (burst).

6.2. Experimento 1

Tomaremos una señal de muestra artificial. La señal se compone de un seno con frecuencia f_A que aparece en dos ocasiones.

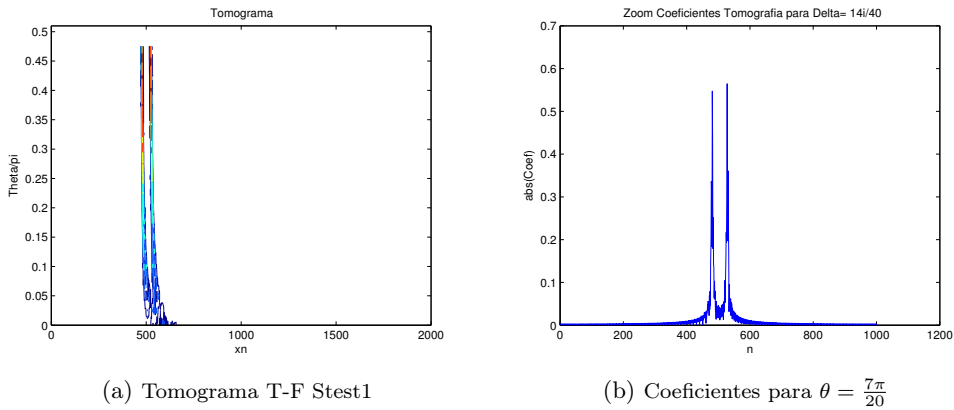
Se aplicará sobre esta señal las técnicas vistas anteriormente con respecto a la tomografía tiempo-frecuencia 3.4 y adaptada (tiempo-datos) 4.3. Aplicando primero el operador tiempo-frecuencia, obtenemos los siguientes resultados.

La tomografía T-F es capaz de detectar de manera diferenciada las dos componentes de la señal algo que con la transformada de Fourier no pasaba, ya que ésta no contiene información temporal alguna de la señal 3.4. Se ha escogido como operador tiempo-datos 4.3 el mismo para todos los experimentos. Este set U debe tener las mismas características que las componentes a detectar. El objetivo es detectar eventos transitorios en señales. Aplicando el operador obtenido a través de ese set, obtenemos el siguiente tomograma.



(a) Stest1

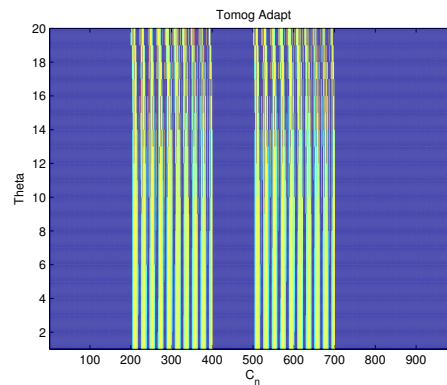
Figura 6.1: Señal de Prueba



(a) Tomograma T-F Stest1

(b) Coeficientes para $\theta = \frac{7\pi}{20}$

Figura 6.2: Tomografía Tiempo-Frecuencia Stest1



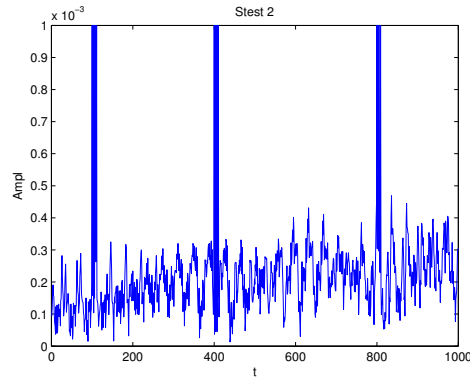
(a) Stest1

Figura 6.3: Tomograma Tiempo-Datos Experimento 1

Se observa que detecta 10 eventos. Analizándolo vemos que cada uno corresponde con los máximos de la señal sin perder información temporal. Para analizar esta señal hubiera sido más útil utilizar un set construido por distintos senos

6.3. Experimento 2

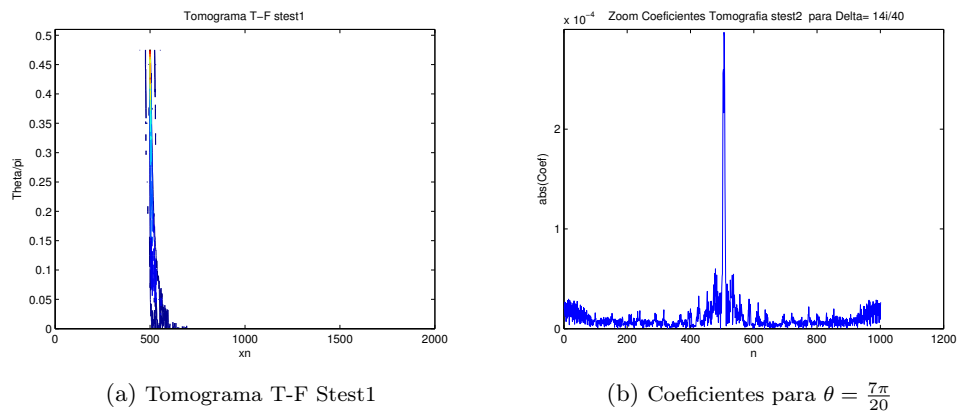
Utilizaremos para este experimento datos reales del sistema nervioso de una sanguijuela.



(a) Stest1

Figura 6.4: Señal de Prueba

Se utiliza el operador T-F sobre nuestra señal, obteniendo el siguiente tomograma.



(a) Tomograma T-F Stest1

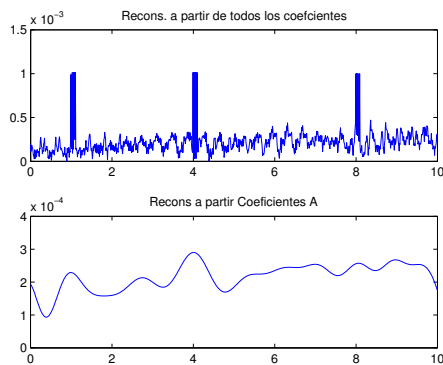
(b) Coeficientes para $\theta = \frac{7\pi}{20}$

Figura 6.5: Tomografía Tiempo-Frecuencia

El tomograma resultante presenta información insuficiente para nuestro objetivo. Se aprecian rangos de coeficientes, pero no corresponden a los componentes transitorios que queremos detectar como se aprecia al tratar de extraerlos de los coeficientes del tomograma 3.4.2. No es una herramienta útil para este propósito.

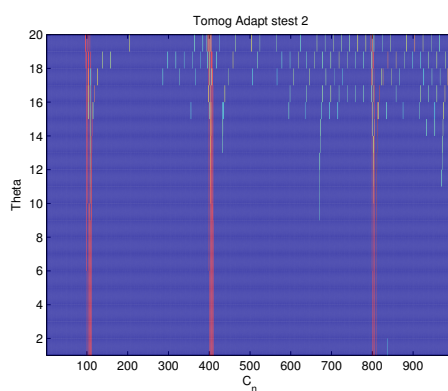
Aplicaremos la tomografía adaptada (tiempo-datos) sobre nuestra señal. En él se observa claramente los 3 eventos transitorios, algo que con la tomografía tiempo-frecuencia no hemos podido obtener.

En él se observa claramente los 3 eventos transitorios, algo que con la tomografía tiempo-frecuencia no hemos podido obtener.



(a) Extracción de posibles componentes

Figura 6.6: Reconstrucción a partir de Coeficientes



(a) Stest1

Figura 6.7: Tomograma Tiempo-Datos

6.4. Experimento 3

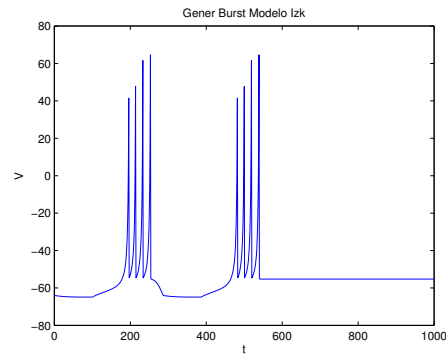
En este experimento hemos utilizado un modelado de disparo de ráfagas (*burst*) de Izhikevich. Se trata de una simplificación del modelado Hodgkin-Huxley 5.6.1 con dos ecuaciones diferenciales.

$$\begin{aligned}
 v' &= 0.04v^2 + 5v + 140 - u + I \\
 u' &= a(bv - u) \\
 \text{if } v &= 30 \text{ mV,} \\
 \text{then } v &- c, \quad u - u + d
 \end{aligned}$$

(a) V Potencial de Membrana (b) Variable recuperación membrana

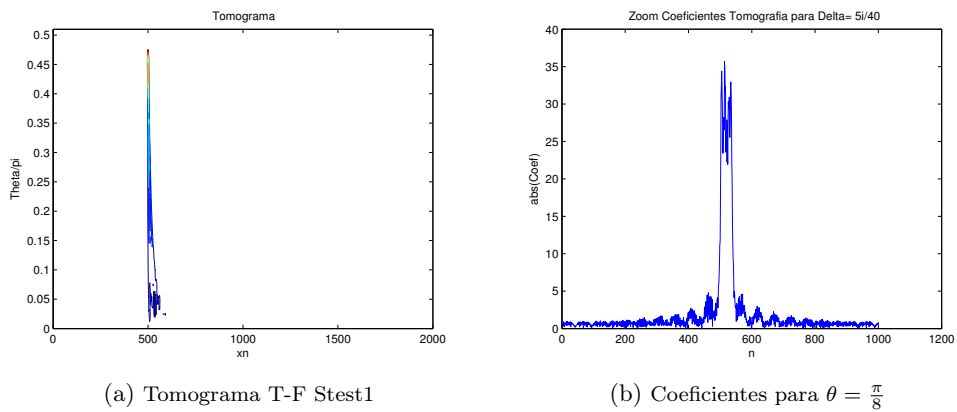
Figura 6.8: Fórmulas Modelo Izhikevich

Se ha utilizado este modelo para generar una señal artificial que imita disparos en ráfagas de una neurona simple. Se aplicarán ambos tipos de tomografía a esta señal para dilucidar cuál es la más conveniente a la hora de detectar sus componentes transitorios, sus *spikes*.



(a) Stest1

Figura 6.9: Señal de Prueba



(a) Tomograma T-F Stest1

(b) Coeficientes para $\theta = \frac{\pi}{8}$

Figura 6.10: Tomografía Tiempo-Frecuencia

No se aprecian eventos diferenciados en el tomograma tiempo-frecuencia. Al tratar de extraer los componentes transitorios, de manera orientativa, volvemos a encontrar las dificultades que esta herramienta presenta.

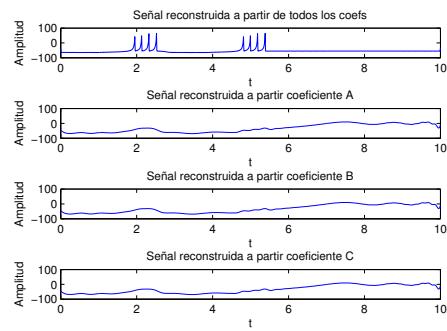
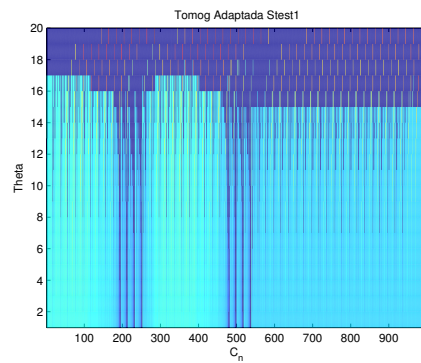
(a) Coeficientes para $\theta = \frac{\pi}{8}$

Figura 6.11: Extracción de componentes

Al aplicar el operador adaptado, (tiempo-datos) obtenemos el siguiente tomograma



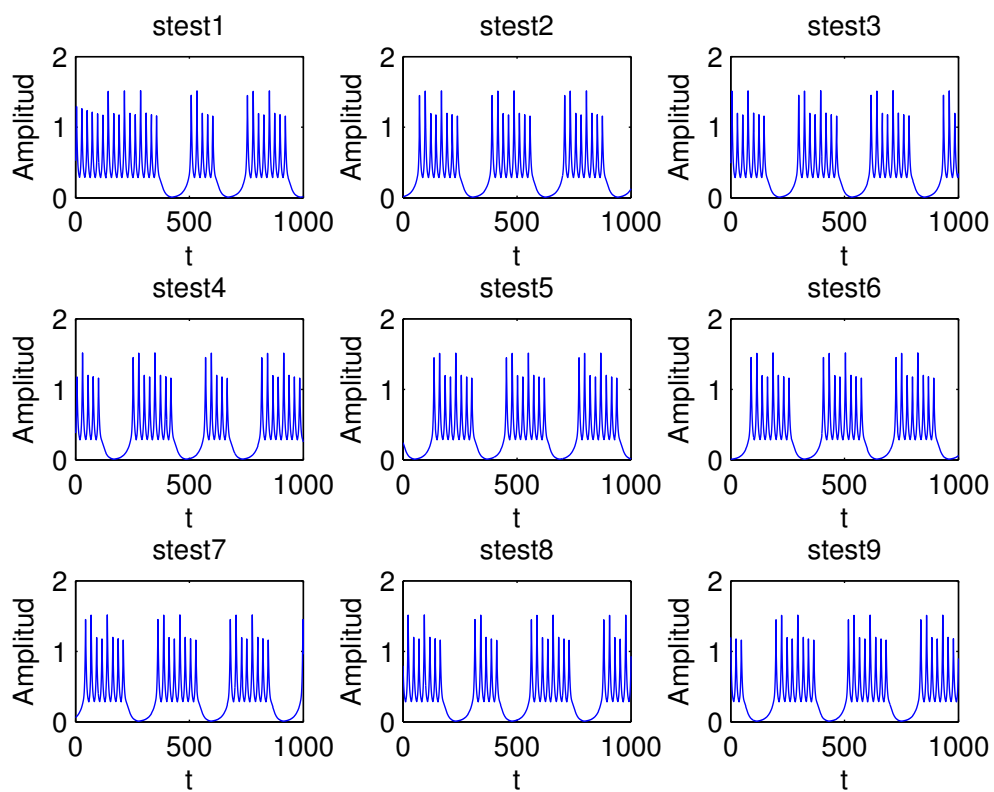
(a) Tomograma Adapt Stest1

Figura 6.12: Tomograma Tiempo-Datos

Con el operador tiempo-datos **sí** que se localizan los *spikes* (potenciales de acción).

6.5. Experimento 4

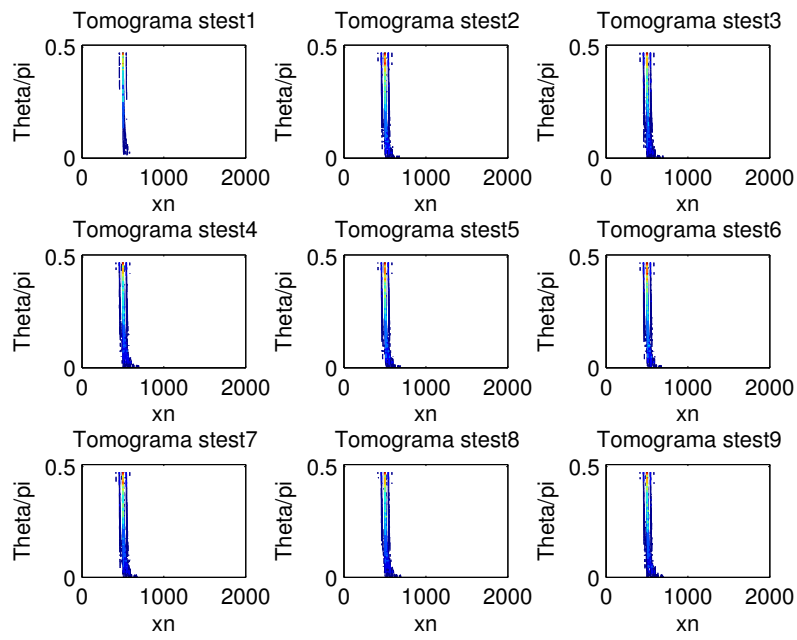
Para este experimentos se ha utilizado datos artificiales del output de una neurona simple. Se han seleccionado para el estudio 9 señales en los que aparecen disparos en ráfagas (*bursts*).



(a) Outputs Neuronas

Figura 6.13: Señales de Prueba

Al igual que en en el resto de experimentos, se aplicará primero el operador tiempo-frecuencia y posteriormente el de tiempo-datos para poder contrastar resultados.



(a) Tomograma T-F Outputs Neurona

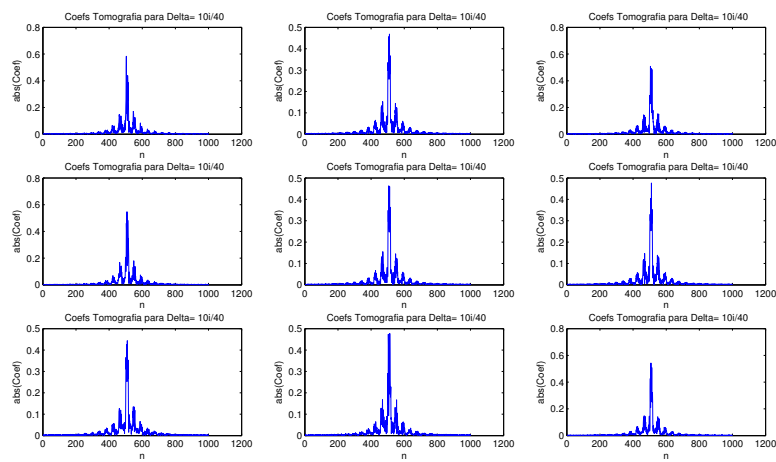
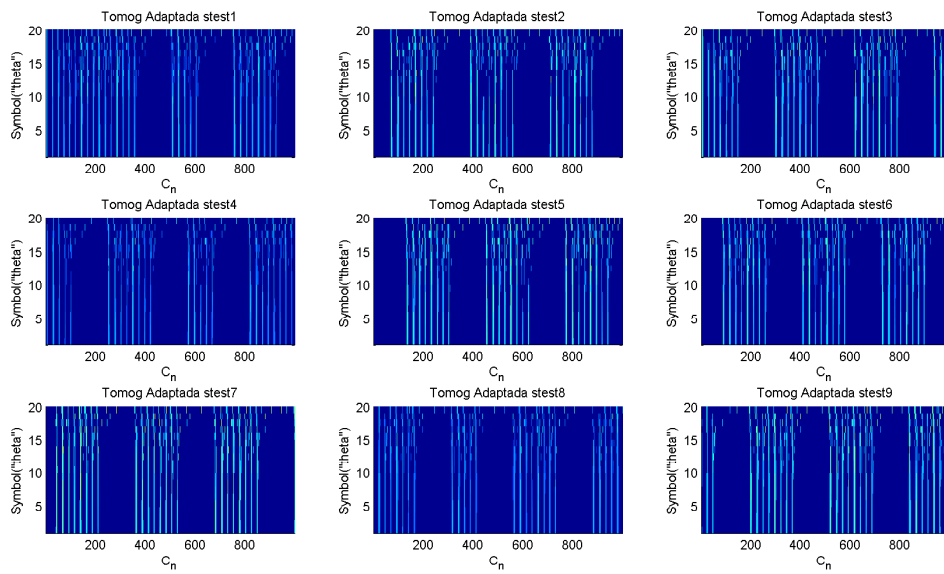
(b) Coeficientes para $\theta = \frac{\pi}{4}$

Figura 6.14: Tomografía Tiempo-Frecuencia

Se obtienen resultados similares a los anteriores, sin claridad a la hora de la detección de estos eventos transitorios que se tratan localizar.



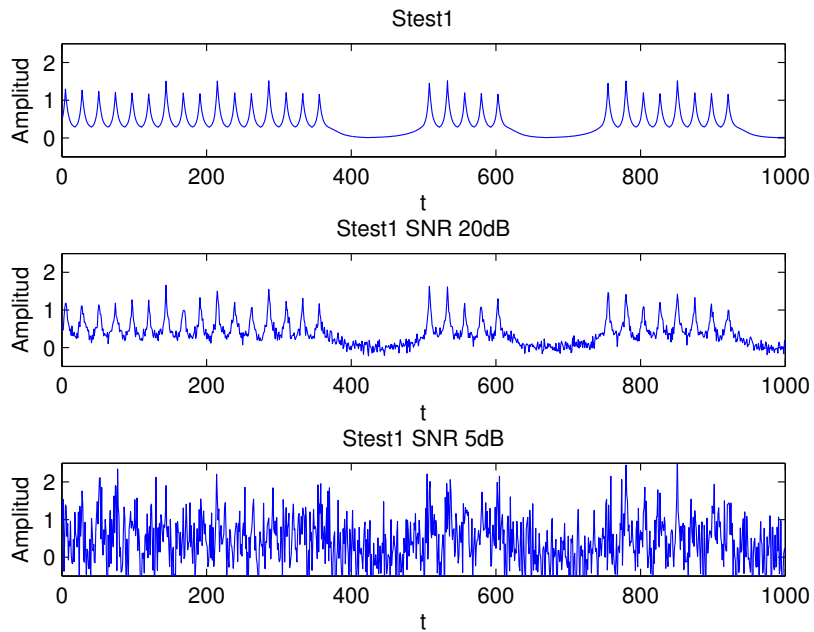
(a) Tomog. Adaptada

Figura 6.15: Tomografía Tiempo-Datos

Al aplicar la tomografía adaptada, se observa como esta herramienta sí es capaz de detectarlos.

6.6. Experimento 5

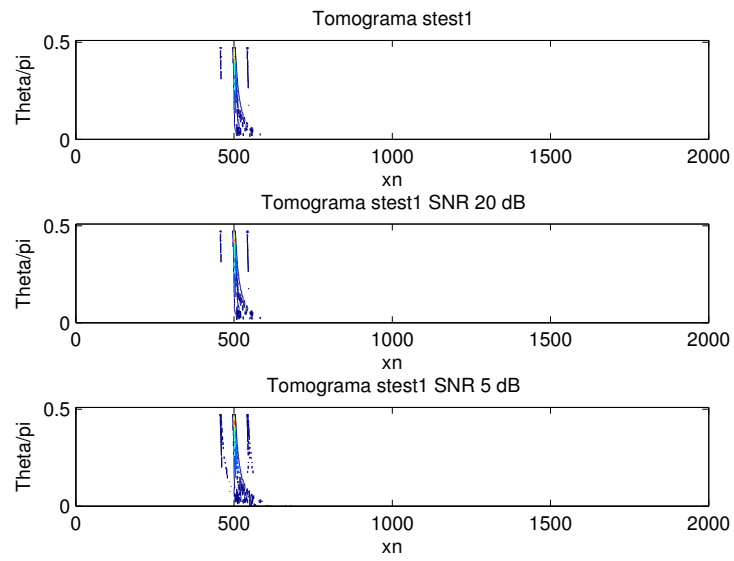
Para este experimento se ha cogido una señal del apartado anterior y se le ha añadido ruido. Se tratará de comprobar la robustez de esta herramienta frente al ruido.



(a) Outputs Neuronas con Ruido

Figura 6.16: Señal de Prueba con Ruido

Le aplicaremos el mismo procedimiento.



(a) Tomograma T-F Outputs Neurona con Ruido

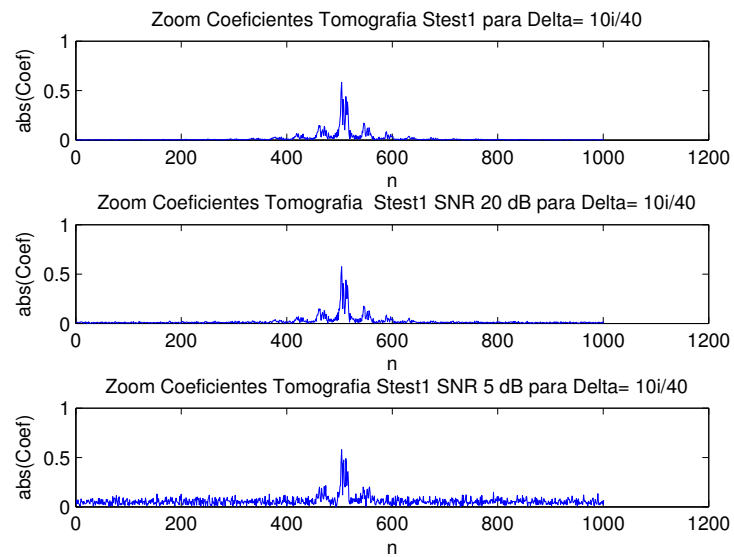
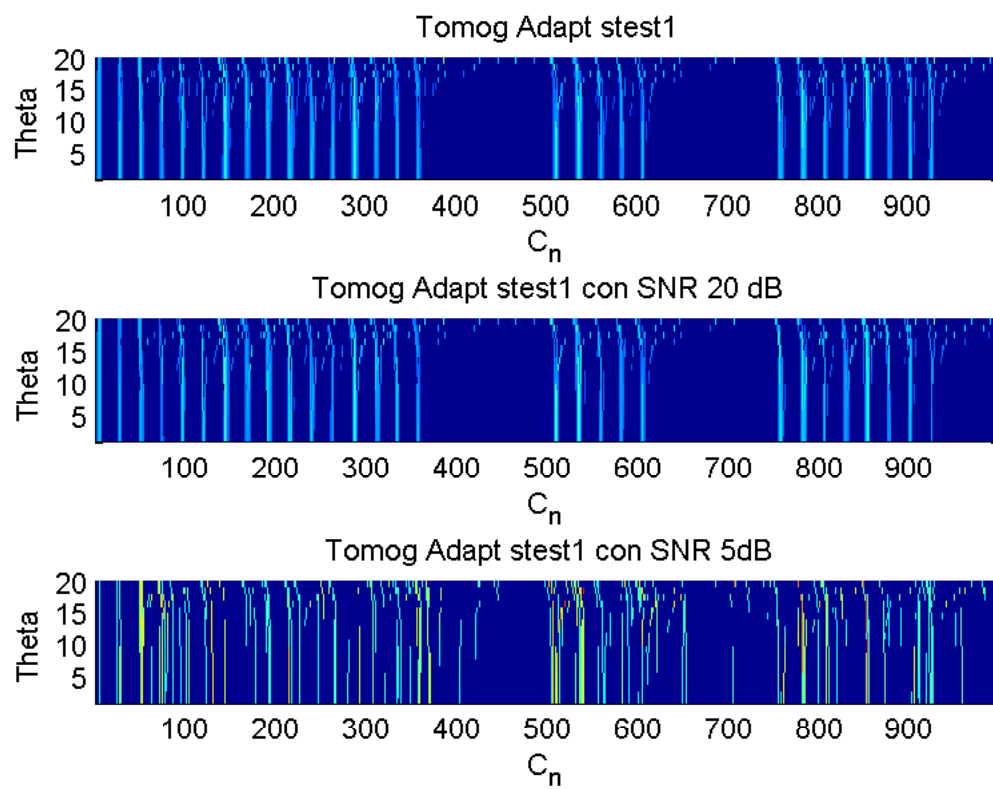
(b) Coeficientes para $\theta = \frac{\pi}{4}$

Figura 6.17: Tomografía Tiempo-Frecuencia

Al aplicar la tomografía tiempo-datos se observan resultados parecidos frente a la aparición de ruido. Queda comprobado la robustez de esta técnica frente al ruido.



(a) Tomog. Adaptada

Figura 6.18: Tomografía Tiempo-Datos

Capítulo 7

Conclusiones y Trabajos Futuros

*Me interesa el futuro porque es el sitio donde voy
a pasar el resto de mi vida.*

Woody Allen

RESUMEN: En este capítulo se analizarán los resultados obtenidos en el capítulo anterior. Además, se discutirá sobre posibles mejoras y trabajos futuros.

7.1. Conclusiones

Se han utilizado distintas señales durante este proyecto, centrándonos en señales neuronales. Debido a que las características que queremos estudiar (eventos transitorios) no presentan una componente frecuencial suficientemente definida, la transformada de Fourier no es capaz de identificarlos, siendo necesario el uso de una herramienta más adecuada para este propósito, la tomografía

La tomografía contiene información tanto espectral como temporal, por lo que resulta muy útil a la hora de diferenciar de manera temporal eventos frecuenciales que pudieran aparecer en una señal. Queda comprobado que al utilizar un tomograma tiempo-frecuencia podemos delimitar eventos frecuenciales en tiempo.

Según sean las características de la señal que queremos identificar para su posterior análisis, elegir un operador adaptado a la señal será clave para obtener resultados interpretables. La tomografía tiempo-datos se presenta como una herramienta robusta para ese propósito.

Resumiendo, tomografía es una herramienta útil a la hora de caracterizar eventos transitorios dentro de una señal ya que mantiene la información temporal.

7.2. Trabajos Futuros

Se ha presentado un método de análisis de datos biológicos utilizando la tomografía como herramienta. Tal y como se ha visto en la introducción, esta herramienta se utilizaría durante la fase de *Extracción de características*. 1.1 Con este PFC y la tomografía como herramienta, se pueden proponer los siguientes posibles trabajos futuros con:

- Automatizar el código: Implementar el código de manera modular, con una estructura modular, donde únicamente sea necesario introducir la señal a estudiar.
- Utilización de distintos modelos neuronales: Para la realización de este PFC se han utilizado unas señales neuronales, podría ampliarse con otros experimentos con diferentes modelados neuronales.
- Utilización de más señales reales: Expandir este estudio a un mayor tipo de señales nerviosas reales.
- Comparación y toma de decisiones: Se puede utilizar o complementar esta herramienta a la hora de identificar firmas neuronales en CGPs (Central Pattern Generators). Una firma neuronal es una distribución de intervalos de disparos reproducibles y específicas de cada neurona. (20)

Apéndice A

Anexo I - Descripción Señales

RESUMEN: Se utilizará este anexo para complementar el capítulo de Fundamentos matemáticos.

A.1. Caracterización de una señal en tiempo

Caracterización de una señal compleja.

- Señal Real A.1
- Modelo Cuadrático A.2
- Señal Analítica A.3

$$s(t) = A(t)\cos(\psi(t)) \quad (\text{A.1})$$

$$s_q(t) = A(t)e^{j\psi(t)} = s_r + js_i \quad (\text{A.2})$$

$$s_a(t) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int S(w)e^{jw t} dw \quad (\text{A.3})$$

Energía Total.

$$E = \int |s(t)|^2 dt \quad (\text{A.4})$$

Media de una señal.

$$\langle t \rangle = \int t |s(t)|^2 dt \quad (\text{A.5})$$

De manera general, la media de cualquier señal se obtiene:

$$\langle g(t) \rangle = \int g(t) |s(t)|^2 dt \quad (\text{A.6})$$

Desviación estándar

$$T^2 = \sigma(t)^2 = \int (t - \langle t \rangle)^2 |s(t)|^2 dt = \langle t^2 \rangle - \langle t \rangle^2 \quad (\text{A.7})$$

A.2. Caracterización de una señal en frecuencia

Caracterización de una señal compleja.

$$S(w) = B(w) * e^{j\psi(w)} \quad (\text{A.8})$$

Energía total

$$E = \int |S(w)|^2 dw = \int |s(t)|^2 dt \quad (\text{A.9})$$

Esta igualdad se conoce como *Identidad de Parseval*

Cálculo Momento \tilde{n} '

$$\langle w^n \rangle = \int w^n |s(w)|^2 dw \quad (\text{A.10})$$

Frecuencia Media

$$\begin{aligned} \langle w \rangle &= \int w |s(w)|^2 dw \\ &= \int (\psi'(t) - j \frac{A'(t)}{A(t)}) * A^2(t) dt = \int \psi'(t) A^2(t) dt \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

Frecuencia Instantánea

$$w_i(t) = \psi'(t) = \frac{s'_i s_r - s'_r s_i}{A^2} \quad (\text{A.12})$$

Covarianza de una señal

$$Cov_{tw} = \langle t\psi'(t) \rangle - \langle t \rangle \langle w \rangle \quad (\text{A.13})$$

Coefficiente de correlación

$$\tau = \frac{Cov_{tw}}{\sigma_t \sigma_w} \quad (\text{A.14})$$

A.3. Función Característica

Función Característica : Dominio temporal. Es la Transformada de Fourier de la densidad de energía.

$$R(\tau) = \int |S(w)|^2 e^{j\tau w} dw \quad (\text{A.15})$$

Función Característica : Dominio frecuencial. Es la Transformada de Fourier de la densidad de energía.

$$R(\theta) = \int |s(t)|^2 e^{j\theta t} dt \quad (\text{A.16})$$

Relación Función Característica y Distribución conjunta tiempo-frecuencia.

$$M(\theta, \tau) = \int \int P(t, w) e^{j\theta t + j\tau w} dt dw = \langle e^{j\theta t + j\tau w} \rangle \quad (\text{A.17})$$

Apéndice B

Anexo II - Fundamentos de fisiología

RESUMEN: Se utilizará este anexo para complementar el capítulo V, señales biológicas, con conceptos importantes.

B.1. Conceptos

Homeostasis: Se trata de una propiedad que consiste en la capacidad de mantener una condición de 'status quo' de los organismos vivos con el medio exterior mediante el intercambio de materia y energía con el exterior. Se trata de un mecanismo de regulación interna. Estos mecanismos de autorregulación de los seres vivos son posibles gracias a distintos sistemas de control. Ejemplos: Regulación de la T°.

Exocitosis: También conocida como secreción celular. Es un proceso celular por el cual vesículas se fusionan con la membrana y liberan sus moléculas.

Bibliografía

- [1] Kenneth M Hoffman, Ray Kunze ,“Linear Algebra”, Prentice - Hall, 1971.
- [2] Alan V. Oppenheim, Alan S. Willsky, S. Hamid Nawab, "Signals systems (2nd ed.)", Prentice - Hall, 1996.
- [3] Leon Cohen, "Time-Frequency Analysis", Prentice - Hall, 1995
- [4] Alexander D. Poularikas, "The transforms and applications Handbook (2nd Ed.)", CRC Press LLC, 2000
- [5] John L. Semmlow, "Biosignal Biomedical Image Processing", Marcel Dekker, INC., 2004
- [6] Chun-Lin, Liu, .^A Tutorial of the Wavelet Transform ", 2010
- [7] M A Man'ko and V I Man'ko and R Vilela Mendes, "Tomograms and other transforms: a unified view", Journal of Physics A: Mathematical and General vol. 34, 2001
- [8] Briolle, F. and Man'ko, V.I. and Ricaud, B. and Mendes, R.Vilela, "Noncommutative tomography: A tool for data analysis and signal processing", Journal of Russian Laser Research vol. 33, 2012
- [9] Liu, JianCai and Xu, JiaKai and Ning, XinBao and Tian, R. "Non-commutative time-frequency tomography", Chinese Science Bulletin vol. 52 , 2007
- [10] Man'ko, V. I. and Vilela Mendes, R., "Non-commutative time-frequency tomography", ArXiv Physics e-prints, 1997
- [11] Briolle, F. and Lima, R. and Man'ko, V. I. and Vilela Mendes, R. "Tomographic analysis of reflectometry data: I. Component factorization", Measurement Science and Technology vol. 20, 2009
- [12] Aguirre, C. and Pascual, P. and Campos, D. and Serrano, E., "Single Neuron Transient Activity Detection by Means of Tomography", Advances in Computational Intelligence , 2011
- [13] Aguirre, C. and Vilela Mendes, R., "Signal recognition and adapted filtering by non-commutative tomography", Signal Processing, IET vol. 8, 2014
- [14] Eugenio Martín Cuenca, "Fundamentos de fisiología", Editorial Paraninfo, 2006
- [15] Dr. Dee Unglaub Silverthorn, "Fisiología Humana: Un enfoque integrado 4ºEd.", PANAMERICANA, 2008
- [16] Arthur Guyton John Hall, "Tratado de Fisiología Médica (10º Ed.)", McGraw Hill, 2003
- [17] Aguirre, C. and Serrano, E. and Pascual, P., "Detection of neuronal signatures by means of data-driven tomography", BMC Neuroscience vol.14, 2013
- [18] Aguirre, C. and Pascual, P, and Campos, D. and Serrano, E., "Single Neuron Transient Activity Detection by Means of Tomography", Advances in Computational Intelligence, 2011

- [19] Eugene M. Izhikevich, "Simple model of spiking neurons", IEEE Trans. Neural Networks, 2003
- [20] Roberto Latorre Camino, "Firmas Neuronales y Multicódigos en neuronas con comportamiento en ráfagas", Tesis Doctoral, 2008

Apéndice C

Presupuesto

PRESUPUESTO	
EJECUCIÓN MATERIAL	
RECURSOS HARDWARE	
Concepto	Coste
Ordenador personal	700 €
Material oficina	50,00 €
TOTAL RECURSOS HARDWARE	750 €
RECURSOS SOFTWARE	
Concepto	Coste
Sistema Operativo Ubuntu 12.10	0,00 €
MATLAB & Simulink Student Version	70,00 €
TOTAL RECURSOS SOFTWARE	70 €
RECURSOS HUMANOS	
Concepto	Coste
Sueldo ingeniero (15€/hora) - 1000 horas	15.000 €
TOTAL RECURSOS SOFTWARE	15.000 €
MATERIAL FUNGIBLE	
Concepto	Coste
Gastos de impresión	100,00 €
Encuadernación	10,00 €
TOTAL MATERIAL FUNGIBLE	110 €
TOTAL EJECUCIÓN PROYECTO	17.430 €

PRESUPUESTO TOTAL

PRESUPUESTO TOTAL SIN I.V.A.	17.430 €
PRESUPUESTO TOTAL CON I.V.A. (21 %)	21.090,3 €

Madrid, Septiembre de 2014
El Ingeniero Jefe de Proyecto

Fdo.: Javier Moreno Sainz-Pardo
Ingeniero de Telecomunicación

Apéndice D

Pliego de Condiciones

Este documento contiene las condiciones legales que guiarán la realización de este proyecto, cuyo nombre es *Análisis de datos biológicos mediante tomografía*. En lo que sigue, se supondrá que el proyecto ha sido encargado por una empresa cliente a una empresa consultora con la finalidad de realizar dicho sistema. Dicha empresa ha debido desarrollar una línea de investigación con objeto de elaborar el proyecto. Esta línea de investigación, junto con el posterior desarrollo de los programas está amparada por las condiciones particulares del siguiente pliego. Supuesto que la utilización industrial de los métodos recogidos en el presente proyecto ha sido decidida por parte de la empresa cliente o de otras, la obra a realizar se regulará por las siguientes:

D.1. Condiciones Generales

1. La modalidad de contratación será el concurso. La adjudicación se hará, por tanto, a la proposición más favorable sin atender exclusivamente al valor económico, dependiendo de las mayores garantías ofrecidas. La empresa que somete el proyecto a concurso se reserva el derecho a declararlo desierto.
2. El montaje y mecanización completa de los equipos que intervengan será realizado totalmente por la empresa licitadora.
3. En la oferta, se hará constar el precio total por el que se compromete a realizar la obra y el tanto por ciento de baja que supone este precio en relación con un importe límite si este se hubiera fijado.
4. La obra se realizará bajo la dirección técnica de un Ingeniero Superior de Telecomunicación, auxiliado por el número de Ingenieros Técnicos y Programadores que se estime preciso para el desarrollo de la misma.
5. Aparte del Ingeniero Director, el contratista tendrá derecho a contratar al resto del personal, pudiendo ceder esta prerrogativa a favor del Ingeniero Director, quien no estará obligado a aceptarla.
6. El contratista tiene derecho a sacar copias a su costa de los planos, pliego de condiciones y presupuestos. El Ingeniero autor del proyecto autorizará con su firma las copias solicitadas por el contratista después de confrontarlas.
7. Se abonará al contratista la obra que realmente ejecute con sujeción al proyecto que sirvió de base para la contratación, a las modificaciones autorizadas por la superioridad o

a las órdenes que con arreglo a sus facultades le hayan comunicado por escrito al Ingeniero Director de obras siempre que dicha obra se haya ajustado a los preceptos de los pliegos de condiciones, con arreglo a los cuales, se harán las modificaciones y la valoración de las diversas unidades sin que el importe total pueda exceder de los presupuestos aprobados. Por consiguiente, el número de unidades que se consignan en el proyecto o en el presupuesto, no podrá servirle de fundamento para entablar reclamaciones de ninguna clase, salvo en los casos de rescisión.

8. Tanto en las certificaciones de obras como en la liquidación final, se abonarán los trabajos realizados por el contratista a los precios de ejecución material que figuran en el presupuesto para cada unidad de la obra.

9. Si excepcionalmente se hubiera ejecutado algún trabajo que no se ajustase a las condiciones de la contrata pero que sin embargo es admisible a juicio del Ingeniero Director de obras, se dará conocimiento a la Dirección, proponiendo a la vez la rebaja de precios que el Ingeniero estime justa y si la Dirección resolviera aceptar la obra, quedará el contratista obligado a conformarse con la rebaja acordada.

10. Cuando se juzgue necesario emplear materiales o ejecutar obras que no figuren en el presupuesto de la contrata, se evaluará su importe a los precios asignados a otras obras o materiales análogos si los hubiere y cuando no, se discutirán entre el Ingeniero Director y el contratista, sometiéndolos a la aprobación de la Dirección. Los nuevos precios convenidos por uno u otro procedimiento, se sujetarán siempre al establecido en el punto anterior.

11. Cuando el contratista, con autorización del Ingeniero Director de obras, emplee materiales de calidad más elevada o de mayores dimensiones de lo estipulado en el proyecto, o sustituya una clase de fabricación por otra que tenga asignado mayor precio o ejecute con mayores dimensiones cualquier otra parte de las obras, o en general, introduzca en ellas cualquier modificación que sea beneficiosa a juicio del Ingeniero Director de obras, no tendrá derecho sin embargo, sino a lo que le correspondería si hubiera realizado la obra con estricta sujeción a lo proyectado y contratado.

12. Las cantidades calculadas para obras accesorias, aunque figuren por partida alzada en el presupuesto final (general), no serán abonadas sino a los precios de la contrata, según las condiciones de la misma y los proyectos particulares que para ellas se formen, o en su defecto, por lo que resulte de su medición final.

13. El contratista queda obligado a abonar al Ingeniero autor del proyecto y director de obras así como a los Ingenieros Técnicos, el importe de sus respectivos honorarios facultativos por formación del proyecto, dirección técnica y administración en su caso, con arreglo a las tarifas y honorarios vigentes.

14. Concluida la ejecución de la obra, será reconocida por el Ingeniero Director que a tal efecto designe la empresa.

15. La garantía definitiva será del 4% del presupuesto y la provisional del 2% .

16. La forma de pago será por certificaciones mensuales de la obra ejecutada, de acuerdo con los precios del presupuesto, deducida la baja si la hubiera.

17. La fecha de comienzo de las obras será a partir de los 15 días naturales del replanteo oficial de las mismas y la definitiva, al año de haber ejecutado la provisional, procediéndose si no existe reclamación alguna, a la reclamación de la fianza.

18. Si el contratista al efectuar el replanteo, observase algún error en el proyecto, deberá comunicarlo en el plazo de quince días al Ingeniero Director de obras, pues transcurrido ese plazo será responsable de la exactitud del proyecto.

19. El contratista está obligado a designar una persona responsable que se entenderá con el Ingeniero Director de obras, o con el delegado que éste designe, para todo relacionado con ella. Al ser el Ingeniero Director de obras el que interpreta el proyecto, el contratista deberá consultarle cualquier duda que surja en su realización.

20. Durante la realización de la obra, se girarán visitas de inspección por personal facultativo de la empresa cliente, para hacer las comprobaciones que se crean oportunas. Es obligación del contratista, la conservación de la obra ya ejecutada hasta la recepción de la misma, por lo que el deterioro parcial o total de ella, aunque sea por agentes atmosféricos u otras causas, deberá ser reparado o reconstruido por su cuenta.

21. El contratista, deberá realizar la obra en el plazo mencionado a partir de la fecha del contrato, incurriendo en multa, por retraso de la ejecución siempre que éste no sea debido a causas de fuerza mayor. A la terminación de la obra, se hará una recepción provisional previo reconocimiento y examen por la dirección técnica, el depositario de efectos, el interventor y el jefe de servicio o un representante, estampando su conformidad el contratista.

22. Hecha la recepción provisional, se certificará al contratista el resto de la obra, reservándose la administración el importe de los gastos de conservación de la misma hasta su recepción definitiva y la fianza durante el tiempo señalado como plazo de garantía. La recepción definitiva se hará en las mismas condiciones que la provisional, extendiéndose el acta correspondiente. El Director Técnico propondrá a la Junta Económica la devolución de la fianza al contratista de acuerdo con las condiciones económicas legales establecidas.

23. Las tarifas para la determinación de honorarios, reguladas por orden de la Presidencia del Gobierno el 19 de Octubre de 1961, se aplicarán sobre el denominado en la actualidad ?Presupuesto de Ejecución de Contrata? y anteriormente llamado ?Presupuesto de Ejecución Material? que hoy designa otro concepto.

D.2. Condiciones Particulares

La empresa consultora, que ha desarrollado el presente proyecto, lo entregará a la empresa cliente bajo las condiciones generales ya formuladas, debiendo añadirse las siguientes condiciones particulares:

1. La propiedad intelectual de los procesos descritos y analizados en el presente trabajo, pertenece por entero a la empresa consultora representada por el Ingeniero Director del Proyecto.

2. La empresa consultora se reserva el derecho a la utilización total o parcial de los resultados de la investigación realizada para desarrollar el siguiente proyecto, bien para su publicación o bien para su uso en trabajos o proyectos posteriores, para la misma empresa cliente o para otra.

3. Cualquier tipo de reproducción aparte de las reseñadas en las condiciones generales, bien sea para uso particular de la empresa cliente, o para cualquier otra aplicación, contará con autorización expresa y por escrito del Ingeniero Director del Proyecto, que actuará en representación de la empresa consultora.

4. En la autorización se ha de hacer constar la aplicación a que se destinan sus reproducciones así como su cantidad.
5. En todas las reproducciones se indicará su procedencia, explicitando el nombre del proyecto, nombre del Ingeniero Director y de la empresa consultora.
6. Si el proyecto pasa la etapa de desarrollo, cualquier modificación que se realice sobre él, deberá ser notificada al Ingeniero Director del Proyecto y a criterio de éste, la empresa consultora decidirá aceptar o no la modificación propuesta.
7. Si la modificación se acepta, la empresa consultora se hará responsable al mismo nivel que el proyecto inicial del que resulta el añadirla.
8. Si la modificación no es aceptada, por el contrario, la empresa consultora declinará toda responsabilidad que se derive de la aplicación o influencia de la misma.
9. Si la empresa cliente decide desarrollar industrialmente uno o varios productos en los que resulte parcial o totalmente aplicable el estudio de este proyecto, deberá comunicarlo a la empresa consultora.
10. La empresa consultora no se responsabiliza de los efectos laterales que se puedan producir en el momento en que se utilice la herramienta objeto del presente proyecto para la realización de otras aplicaciones.
11. La empresa consultora tendrá prioridad respecto a otras en la elaboración de los proyectos auxiliares que fuese necesario desarrollar para dicha aplicación industrial, siempre que no haga explícita renuncia a este hecho. En este caso, deberá autorizar expresamente los proyectos presentados por otros.
12. El Ingeniero Director del presente proyecto, será el responsable de la dirección de la aplicación industrial siempre que la empresa consultora lo estime oportuno. En caso contrario, la persona designada deberá contar con la autorización del mismo, quien delegará en él las responsabilidades que ostente.

*Gracias a la vida que me ha dado tanto-
Me ha dado la risa y me ha dado el llanto
Así yo distingo dicha de quebranto
Los dos materiales que forman mi canto
Y el canto de ustedes que es el mismo canto
Y el canto de todos que es mi propio canto*

*Gracias a la vida
Violeta Parra*

