COMPUTACIÓN CIENTÍFICA I 10 de Febrero de 2001

Duración: 3 horas Publicación notas: 20 febrero de 2001

1. **(1.5 puntos)** Explicar el papel que juega la sucesión de Fibonacci en la propagación de errores en el algoritmo iterativo

$$\phi^{(n+1)} = \phi^{(n-1)} - \phi^{(n)}; \quad \phi^{(0)} = 1; \quad \phi^{(1)} = \phi_i$$

para calcular la secuencia de potencias de los números

$$\phi_1 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}; \quad \phi_2 = -\frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

Explicar por qué el algoritmo iterativo propuesto es estable para ϕ_2 y sin embargo es inestable para ϕ_1.

Respuesta: Práctica 1, corregida en clase.

2. **(1.5 puntos)** Calcular por un método de Gauss apropiado la siguiente cuadratura, con la máxima precisión posible

$$\int_3^\infty x^2 e^{-x}\, dx$$

TABLE 17.1. Abscissas and weights in the Gauss–Legendre quadrature formula

n	x_k	A_k
2	±0.57735 02691 89626	1.00000 00000 00000
3	±0.77459 66692 41483	0.55555 55555 55556
	0.00000 00000 00000	0.88888 88888 88889
4	±0.86113 63115 94053	0.34785 48451 37454
	±0.33998 10435 84856	0.65214 51548 62546
5	±0.90617 98459 38664	0.23692 68850 56189
	±0.53846 93101 05683	0.47862 86704 99366
	0.00000 00000 00000	0.56888 88888 88889
6	±0.93246 95142 03152	0.17132 44923 79170
	±0.66120 93864 66265	0.36076 15730 48139
	±0.23861 91860 83197	0.46791 39345 72691

TABLE 17.2. Abscissas and weights in the Gauss–Laguerre quadrature formula

n	x_k	A_k
2	0.58578 64376 27	0.85355 33905 93
	3.41421 35623 73	0.14644 66094 07
3	0.41577 45567 83	0.71109 30099 29
	2.29428 03602 79	0.27851 77335 69
	6.28994 50829 37	0.01038 92565 016
4	0.32254 76896 19	0.60315 41043 42
	1.74576 11011 58	0.35741 86924 38
	4.53662 02969 21	0.03888 79085 150
	9.39507 09123 01	0.00053 92947 05561
5	0.26356 03197 18	0.52175 56105 83
	1.41340 30591 07	0.39866 68110 83
	3.59642 57710 41	0.07594 24496 817
	7.08581 00058 59	0.00361 17586 7992
	12.64080 08442 76	0.00002 33699 723858

TABLE 17.3. Abscissas and weights in the Gauss–Hermite quadrature formula

n	x_k	A_k
2	±0.70710 67811 87	0.88622 69254 53
3	0	1.18163 59006 04
	±1.22474 48713 92	0.29540 89751 51
4	±0.52464 76232 75	0.80491 40900 06
	±1.65068 01238 86	0.08131 28354 473
5	0	0.94530 87204 83
	±0.95857 24646 14	0.39361 93231 52
	±2.02018 28704 56	0.01995 32420 591
6	±0.43607 74119 28	0.72462 95952 24
	±1.33584 90740 14	0.15706 73203 23
	±2.35060 49736 74	0.00453 00099 0551

Respuesta: Con un cambio de variable adecuado se convierte en una cuadratura de Gauss-Laguerre

$$I = \int_3^\infty x^2 e^{-x}\, dx = e^{-3}\int_0^\infty (y+3)^2 e^{-y}\, dy$$

$$\text{Cambio de variable y = x - 3}$$

Dada la forma polinómica del integrando, la integral I es exacta con la fórmula de Gauss-Laguerre de orden 2

$$I = e^{-3}\int_0^\infty (y+3)^2 e^{-y}\, dy = e^{-3}(0.853553390393\,(3.585786437627)^2 +$$

$$0.146446609407\,(6.414213562373)^2 = (17 \pm 10^{-11})\,e^{-3}$$

3. **(5 puntos)** En su obra "Essay on the Principle of Population" (1798), Malthus propone la hipótesis de que, si bien los recursos disponibles crecen de forma lineal, la población mundial aumenta como una ley exponencial

$$X_t = X_{t_0}\, e^{r(t-t_0)},$$

donde X_t es la población mundial a tiempo t. En un estudio en el que se realizaron estimaciones de la población mundial a lo largo de la historia aparece la siguiente tabla

Año	**Población (en millones)**
1824	1000
1927	2000
1960	3000
1974	4000
1987	5000
1999	6000

(i) (2 puntos) Llevando a cabo sendos análisis de regresión lineal, decidir si el

$$X_t = X_{t_0}\, e^{r(t-t_0)},$$

modelo de crecimiento exponencial de Malthus es más correcto que un modelo de crecimiento lineal, utilizando como criterio el error cuadrático medio de las predicciones de ambos modelos para la población en los años tabulados.

Respuesta: Para resolver este apartado, es conveniente rescribir la tabla de la siguiente forma

Año	**t-t_0**	**Población P(t) (en miles de millones)**
1824	0	1
1927	103	2
1960	136	3
1974	150	4
1987	163	5
1999	175	6

- Ajustamos a los datos de la tabla el modelo lineal

$$P(t) = P(t_0) + b(t - t_0),$$

Utilizando los estadísticos

$$\langle P(t) \rangle = 3.5 \quad \langle t - t_0 \rangle = 121.1\widehat{6}$$

$$\langle P(t)\,(t - t_0) \rangle = 513.\widehat{6} \quad \langle (t - t_0)^2 \rangle = 18133.1\widehat{6}$$

Se obtiene los valores

$$b = \frac{\langle P(t)\,(t-t_0)\rangle - \langle P(t)\rangle\langle (t-t_0)\rangle}{\langle (t-t_0)^2\rangle - \langle (t-t_0)\rangle^2} = 0.0258$$

$$P(t_0) = \langle P(t)\rangle - b\langle t-t_0\rangle = 0.3730$$

El modelo lineal es
$$\boxed{\begin{array}{l} P(t) = 0.3730 + 0.0258\,(t-t_0), \\ ECM = 0.618 \end{array}}$$

- Ajustamos a los datos de la tabla al modelo de Malthus haciendo una transformación logarítmica

$$P(t) = P(t_0)\exp\{r(t-t_0)\} \quad \Rightarrow \quad \log P(t) = \log P(t_0) + r(t-t_0)$$

Utilizando los estadísticos

$$\langle \log P(t)\rangle = 1.0965 \qquad \langle t-t_0\rangle = 121.1\widehat{6}$$

$$\langle \log P(t)\,(t-t_0)\rangle = 167.44 \qquad \langle (t-t_0)^2\rangle = 18133.1\widehat{6}$$

Se obtiene los valores

$$r = 0.010018$$

$$\log P(t_0) = \langle \log P(t)\rangle - r\langle t-t_0\rangle = -0.1174$$

El modelo de Malthus es
$$\boxed{\begin{array}{l} P(t) = 0.8892\exp\{0.0100(t-t_0)\}, \\ ECM = 0.24 \end{array}}$$

De acuerdo con el criterio del error cuadrático medio, es preferible el modelo de Malthus.

(ii) (1 punto) Utilizando el modelo considerado más correcto, hacer una estimación del año en el cual se alcanzará la cifra de 9000 millones de habitantes.

Respuesta:

Utilizando el modelo de Malthus
$$t = t_0 + \frac{1}{r}\log\frac{P(t)}{P(t_0)} \approx 2055$$

Utilizando el modelo lineal
$$t = t_0 + \frac{P(t)-P(t_0)}{b} \approx 2158$$

(iii) (1 punto) Haciendo un análisis de la tabla de poblaciones, ¿se puede decir algo sobre la tendencia futura de la tasa de crecimiento de la población mundial? *Observación*: La tasa de crecimiento es la derivada de la función tabulada.

Respuesta:

Año	**Población P(t) (en miles de millones)**	**Diferencias divididas**
1824	1	
1927	2	0.010
1960	3	0.030
1974	4	0.071
1987	5	0.077
1999	6	0.083

Aparentemente la tasa de crecimiento se estabiliza. La tendencia en los últimos datos se acerca a un modelo lineal.

(iv) (1 punto) Haciendo una interpolación polinómica, estimar en qué año se alcanzó la cifra de 5400 millones de habitantes.
Observación: Puede que una transformación previa de los datos sea útil.

Respuesta:

Población P(t) (en miles de millones)	**Año**	Δ	Δ^2	Δ^3	Δ^4	Δ^5
1	1824					
2	1927	103				
3	1960	33	-70			
4	1974	14	-19	51		
5	1987	13	-1	18	-33	
6	1999	12	-1	0	-18	15

Interpolando por Newton a partir de P(1999) = 6 ;

|p| = |(5.4-0.6)/1|= 0.6

P(t) = 5.4 → t = 1999-0.6*12-0.6*(0.6-1)/2-…

$$t = 1999 - \binom{p}{1}12 + \binom{p}{2}(-1) - \binom{p}{3}0 + \ldots = 1993 \pm 1$$

4. **(2 puntos)** Un método numérico para resolución de ecuaciones diferenciales aplicado a la integración de una trayectoria de una sonda espacial lanzada desde la tierra ha generado los siguientes resultados, para distintos valores del paso de integración

Paso de integración *h* (en minutos)	Distancia final a la Tierra (en Km)
2	134567
1	134265
0.5	134198

Sabiendo que el método de integración tiene una convergencia cuadrática, por razones de simetría, encontrar mediante una extrapolación de Richardson la mejor estimación posible para la distancia final del satélite a la tierra. Resolver el sistema de ecuaciones lineales mediante una descomposición LU (algoritmo de Crout) con pivote.

Respuesta:

El resultado de la integración es un valor

$$f(h) = a + b\,h^2 + c\,h^4 + \dots$$

$$\begin{aligned} a + 4b + 16c &= 134567 \\ a + b + c &= 134265 \\ a + \frac{1}{4}b + \frac{1}{16}c &= 134198 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 4 & 16 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{16} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 134567 \\ 134265 \\ 134198 \end{pmatrix}$$

La solución de este sistema de ecuaciones lineales requiere una descomposición LU de la matriz de coeficientes con permutaciones para optimizar pivote

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & \frac{4}{5} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 4 & 16 \\ 0 & -\frac{15}{4} & -\frac{255}{16} \\ 0 & 0 & -\frac{9}{4} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 134567 \\ 134198 \\ 134265 \end{pmatrix}$$

El resultado de una sustitución hacia atrás y otra hacia adelante es

$$c = 3.0\widehat{2}; \quad b = 85.\widehat{5}; \quad a = 134176$$

Solución

$$\boxed{a = 134176}$$