

Publicación de calificaciones: 12 de febrero de 2004

1. (1 punto) Para calcular el momento central de segundo orden de un conjunto de datos $\{X_n\}_{n=1}^N$ se proponen los siguientes algoritmos

Algoritmo I: 1. Calcular la media: $\mu = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N X_n$

2. Calcular momento central: $\mu_2 = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N (X_n - \mu)^2$

Algoritmo II: 1. Calcular la media de X y de X^2 :

$$\mu = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N X_n ; \quad \mu_2 = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N X_n^2 ;$$

2. Calcular momento central: $\mu_2 = \mu_2 - \mu^2$

¿Cuál es el preferible desde el punto de vista numérico? ¿Por qué?

¿Cuál es el preferible desde el punto de rendimiento? ¿Por qué?

SOLUCIÓN:

El algoritmo I es preferible desde el punto de vista numérico, ya que evita el cómputo de un valores pequeño por substracción de valores grandes, próximos entre sí y con posibles errores de redondeo. Desde el punto de vista de rendimiento

Algoritmo I:

primer bucle: N sumas

segundo bucle: 2N sumas/restas; N multiplicaciones

Algoritmo II:

bucle único: 2N sumas; N multiplicaciones

Es preferible el Algoritmo II.

2. (3 puntos) Suponiendo que estamos trabajando en doble precisión, determinar de manera **razonada** los valores a utilizar para los parámetros desconocidos para cada uno de los siguientes problemas:

- (a) Integral impropia estimada por Simpson

$$\int_0^{\infty} e^{-10x} dx \approx \int_0^R e^{-10x} dx$$

¿Cuál es el valor adecuado para R?

SOLUCIÓN:

$$\int_0^{\infty} e^{-10x} dx = \int_0^R e^{-10x} dx + \int_R^{\infty} e^{-10x} dx$$

$$\text{valor exacto} = \int_0^{\infty} e^{-10x} dx = \frac{1}{10};$$

$$\text{error absoluto} = \int_R^{\infty} e^{-10x} dx = \frac{e^{-10R}}{10}$$

$$\text{error relativo} = e^{-10R}$$

$$\text{error relativo} \ll \varepsilon \Rightarrow e^{-10R} \ll \varepsilon \Rightarrow R \gg -10 \log \varepsilon \Rightarrow R \gg 3.6044$$

- (b) Problema de optimización:

Utilizando únicamente evaluaciones funcionales, obtener el máximo de la función $f(x) = x^2 e^{-x}$; $x > 0$ con un error *tolAbs*

¿Cuál es el valor mínimo para *tolAbs*?

SOLUCIÓN: Suponiendo que el máximo está en α

$$f'(\alpha) = 0; \quad f(x) = f(\alpha) + \frac{1}{2} f''(\alpha)(x - \alpha)^2 + O((x - \alpha)^3)$$

Sabiendo que los valores $f(\alpha)$ y $f(\alpha)(1 + \varepsilon)$ son indistinguibles numéricamente

$$\frac{1}{2} f''(\alpha)(\delta x)^2 \gg f(\alpha)\varepsilon \Rightarrow \text{tolAbs} \gg \sqrt{\frac{2f(\alpha)}{f''(\alpha)}} \varepsilon$$

En este caso:

$$\alpha = 2; \quad f''(x) = (2 - 4x + x^2)e^{-x};$$

$$\text{tolAbs} \gg \sqrt{\frac{2f(\alpha)}{f''(\alpha)}} \varepsilon \approx 3 \cdot 10^{-8}$$

(c) Derivadas numéricas

Obtener la estimación numérica de la derivada de $f(\alpha) = \int_0^{\infty} e^{-\alpha x} dx$ en torno al valor $\alpha = 10$ mediante la fórmula

$$f'(\alpha) \approx \frac{f(\alpha + h) - f(\alpha - h)}{2h}$$

¿Cuál es el valor óptimo para h ?

SOLUCIÓN:

Error de truncación

$$\frac{f(\alpha + h) - f(\alpha - h)}{2h} = f'(\alpha) + \frac{f'''(\alpha)}{6} h^2 + O(h^4)$$

$$\text{error} \approx \frac{|f'''(\alpha)|}{6} h^2$$

Error de redondeo: Por efecto del redondeo, tanto α como $f(\alpha)$ están representados con un error relativo $\approx \varepsilon$

$$G = \frac{f(\alpha + h) - f(\alpha - h)}{2h};$$

$$\text{Si } \alpha \gg h \Rightarrow \alpha + h \approx \alpha + h \pm |\alpha| \varepsilon$$

$$\alpha - h \approx \alpha - h \pm |\alpha| \varepsilon$$

$$f(\alpha + h) \approx f(\alpha + h)(1 \pm \varepsilon) \approx f(\alpha + h) \pm |f(\alpha)| \varepsilon$$

$$\delta G \approx \frac{1}{h} (|\alpha f'(\alpha)| + |f(\alpha)|) \varepsilon$$

Nota: El error de redondeo está sobreestimado por esta fórmula.

El error mínimo se encuentra igualando las estimaciones para los errores de truncación y de redondeo. Suponiendo que el cálculo de $f(x)$ es posible con la máxima precisión

$$\frac{|f'''(\alpha)|}{6} h^2 = \frac{1}{h} (|\alpha f'(\alpha)| + |f(\alpha)|) \varepsilon \Rightarrow h = \left(\frac{6(|\alpha f'(\alpha)| + |f(\alpha)|) \varepsilon}{|f'''(\alpha)|} \right)^{1/3}$$

En este caso, y suponiendo que la integral se calcula con un $R \approx 3.6044$ con la máxima precisión posible

$$f(\alpha) = \int_0^{\infty} e^{-\alpha t} dt = \frac{1}{\alpha}; f'(\alpha) = -\frac{1}{\alpha^2}; f''(\alpha) = \frac{2}{\alpha^3}; f'''(\alpha) = -\frac{6}{\alpha^4};$$

$$h_{opt} \approx \alpha(2\varepsilon)^{1/3} = 8 \cdot 10^{-5}$$

3. (3 puntos) Dada la tabla de valores

x	0.00	0.79	1.57	2.36	3.14
y	-2.10	-1.55	0.25	1.90	2.43

Ajustar por mínimos cuadrados los valores tabulados al modelo

$$f(x) = a + b \cos(x);$$

x	y
0	-2.1
0.79	-1.55
1.57	0.25
2.36	1.9
3.14	2.43

cos(x)	y	(cos(x)- <cos(x)>)	(y-<y>)	(cos x - <cos x >)^2	(y-<y>)^2	(cos(x)- <cos(x)>) (y-<y>)	
1	-2.1	1.0010299	-2.286	1.00206092	5.225796	-2.288354	
0.7038453	-1.55	0.7048752	-1.736	0.49684911	3.013696	-1.223663	
0.0007963	0.25	0.0018263	0.064	3.3352E-06	0.004096	0.0001169	
-0.709793	1.9	-0.708763	1.714	0.50234446	2.937796	-1.214819	
-0.999999	2.43	-0.998969	2.244	0.99793867	5.035536	-2.241686	
promedio	-0.00103	0.186	4.441E-17	0	0.5998393	3.243384	-1.393681

$$y = a + b \cos(x)$$

$$a = 0.18360704$$

$$b = -2.3234243$$

4. (3 puntos) Calcular utilizando únicamente evaluaciones funcionales (no se puede derivar) el máximo de la función

$$f(x) = x^2 e^{-x}; \quad x > 0$$

con dos dígitos de precisión.

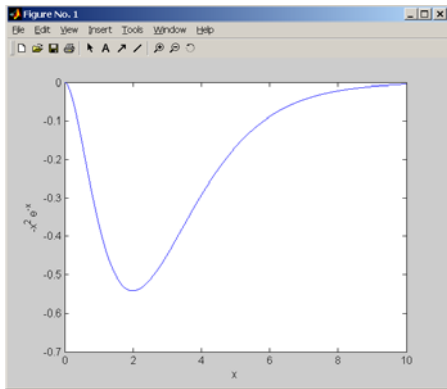
Solución:

Minimización por el método de la razón aurea de la función

$$f(x) = -x^2 e^{-x}; \quad x > 0$$

Haciendo una gráfica de la función se observa que el máximo está acotado por $[0,1,4]$, ya que $f(1) < f(0)$ y $f(1) < f(4)$

$$f([0,1,4]) = [0 \quad -0.3679 \quad -0.2931]$$



a	b	c	err = c-a
0	1	4	4
1	2.1459	4	3
1	2.1459	2.8541	1.8541
1.43769	2.1459	2.8541	1.41641
1.43769	2.1459	2.41641	0.978714
1.7082	2.1459	2.41641	0.708204
1.7082	1.87539	2.1459	0.437694
1.87539	1.97871	2.1459	0.27051
1.87539	1.97871	2.04257	0.167184
1.91486	1.97871	2.04257	0.127717
1.97871	2.00311	2.04257	0.0638587

Resultado: 2.04 ± 0.07