Antenas y Circuitos de Alta Frecuencia
Segunda parte, Tema V

Master en Ingeniería Informática y de Telecomunicación, 2º cuatrimestre (6 créditos ECTS)

Profesores: Jorge A. Ruiz Cruz (jorge.ruizcruz@uam.es
Jose Luis Masa Campos (joseluis.masa@uam.es)

Grupo colaborador: Grupo de Radiación. Dpto. SSR.UPM

Dpto. de Ingeniería Informática
Escuela Politécnica Superior
Universidad Autónoma de Madrid

Segunda parte de ACAF: Antenas

I. Principios básicos de una antena

II. Antenas lineales

III. Antenas impresas

IV. Antenas banda ancha, multibanda e independientes de la frecuencia

V. Agrupación de antenas. Arrays

VI. Antenas de apertura. Bocinas

VII. Reflectores

Antenas y Circuitos de Alta Frecuencia. www.eps.uam.es/~acaf
Master en Ingeniería Informática y Telecomunicaciones
Escuela Politécnica Superior. Universidad Autónoma de Madrid
José Luis Masa Campos. joseluis.masa@uam.es

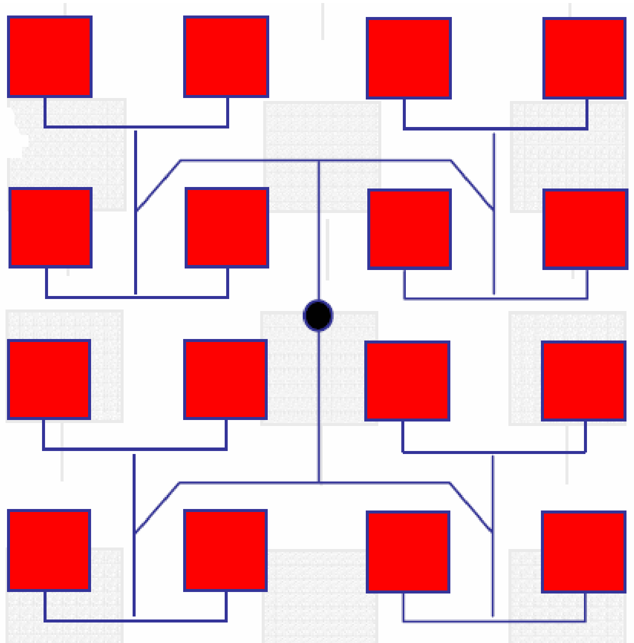
V. Agrupación de antenas. Arrays

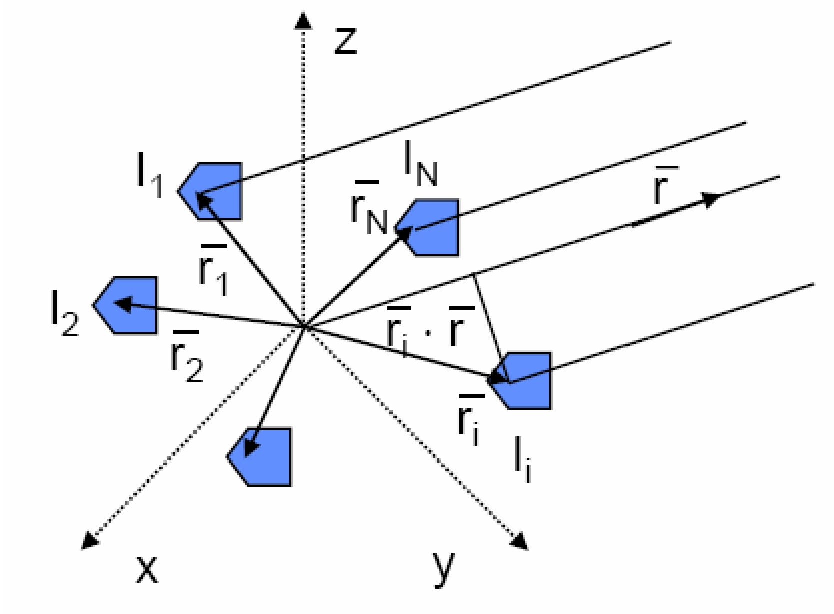
1. Concepto y clasificación de arrays.
2. Principio de multiplicación de diagramas.
3. Arrays lineales multiespaciados.
    a. Uniformes en amplitud
    b. Broadside
    c. Arrays de exploración
    d. Array Endfire ordinario
    e. Tipos de alimentación
    f. Directividad
4. Síntesis de Schelkunoff
5. Arrays reticulares planos. *Distribuciones separables*
6. Redes de alimentación
    a. Tipo serie
    b. Tipo paralelo
    c. Redes activas
    d. Estructuras básicas microtira
7. Antenas adaptativas
    a. Concepto y modelo de señal
    b. Conformación de haz con referencia temporal
    c. Conformación de haz con referencia espacial (GLSC)

1.- Concepto de array

- Conjunto de antenas alimentadas desde un terminal común mediante redes lineales
- Premisas
  - Todos los elementos son iguales
  - Todos los elementos poseen la misma orientación

→ Todos los elementos RADIAN IGUAL





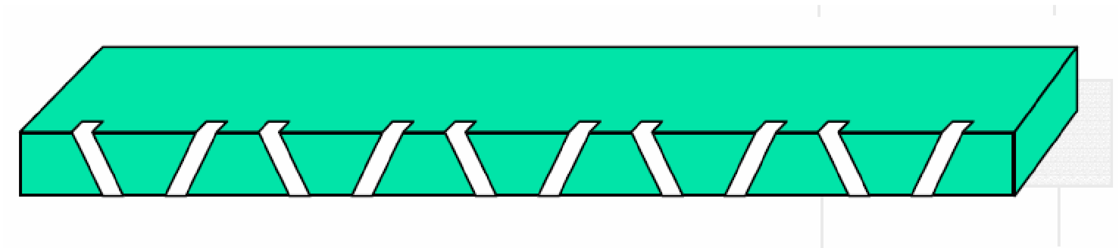
1.- Clasificación de arrays

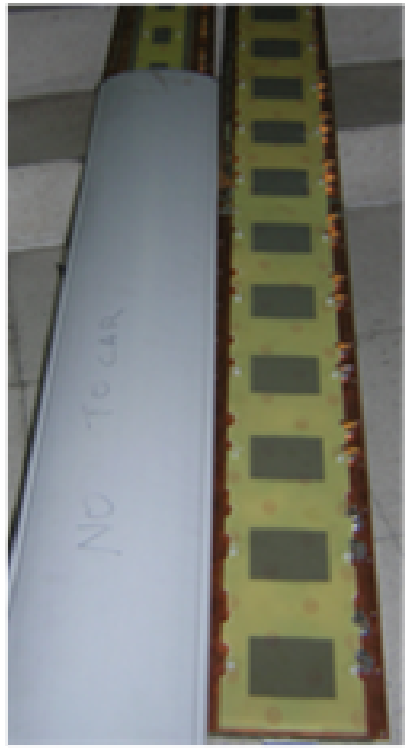
- **Según su estructura geometrica**
  - Agrupaciones lineales
  - Agrupaciones planas
    - Rectangulares
    - Circulares
  - Agrupaciones conformadas
  - Agrupaciones 3D

- **Según la red de alimentación**
  - Agrupaciones pasivas
    - Con un solo haz
    - Multihaz
  - Agrupaciones activas
  - Agrupaciones adaptativas

1.- Clasificación de arrays. *Lineales*

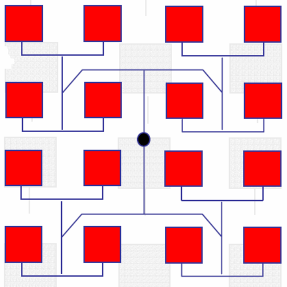
- **Los elementos se disponen a lo largo de una línea recta**
  - Equiespaciados (Variables N (nº elementos), separación fija (d))
  - No equiespaciados (Variables N, posición aleatoria (x_i, y_i))



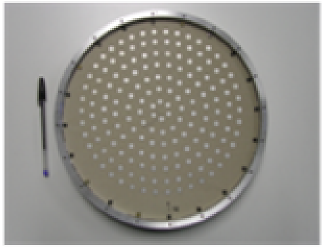


1.- Clasificación de arrays. *Planos*

- **Los elementos se disponen en un plano**
  - Reticulares (Elementos dispuestos en los nudos de una retícula)
    - Rectangulares
    - Triangulares



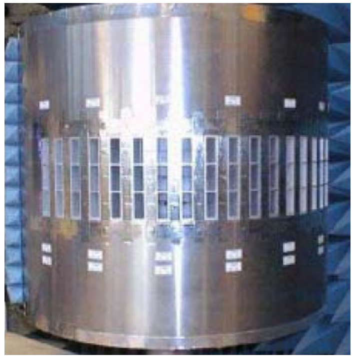
  - Circulares (Elementos dispuestos sobre circunferencias concéntricas)



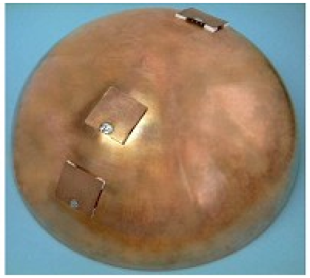
  - Aleatorias (Elementos dispuestos en puntos aleatorios del plano)

1.- Clasificación de arrays. *Conformados*

- **Los elementos se disponen sobre formas específicas**
  - Cilíndricos



  - Cónicos, Piramidales
  - Esféricos



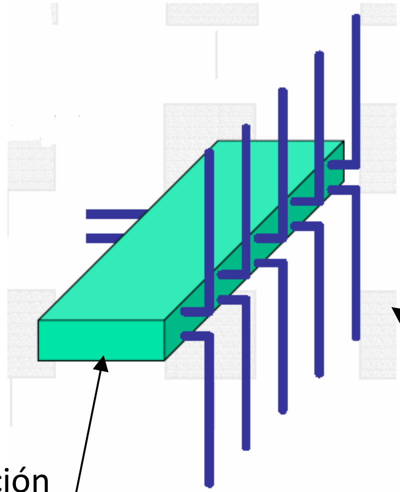
  - Superficies diversas (Alas de avión, vehículos)

1.- Clasificación de arrays. *Pasivos*

- Utilizan una red de distribución de potencia con elementos pasivos (divisores, líneas de transmisión, adaptadores, híbridos, etc…)

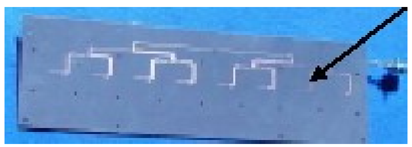
<u>Con un haz</u>

- Diagrama y polarización única



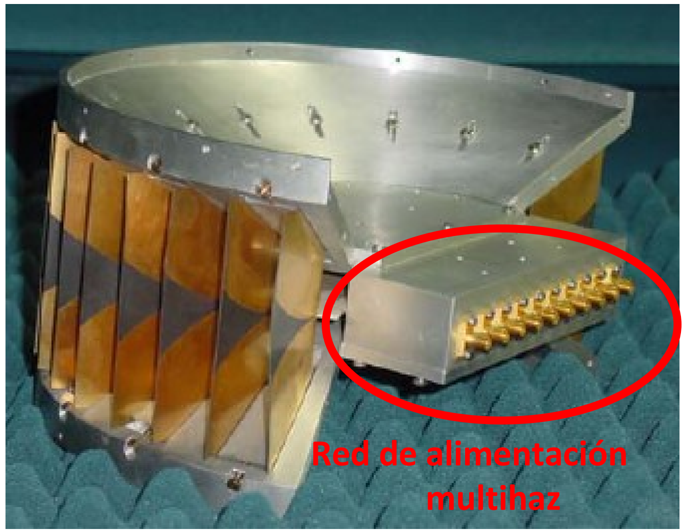
Red de antenas

Red de alimentación



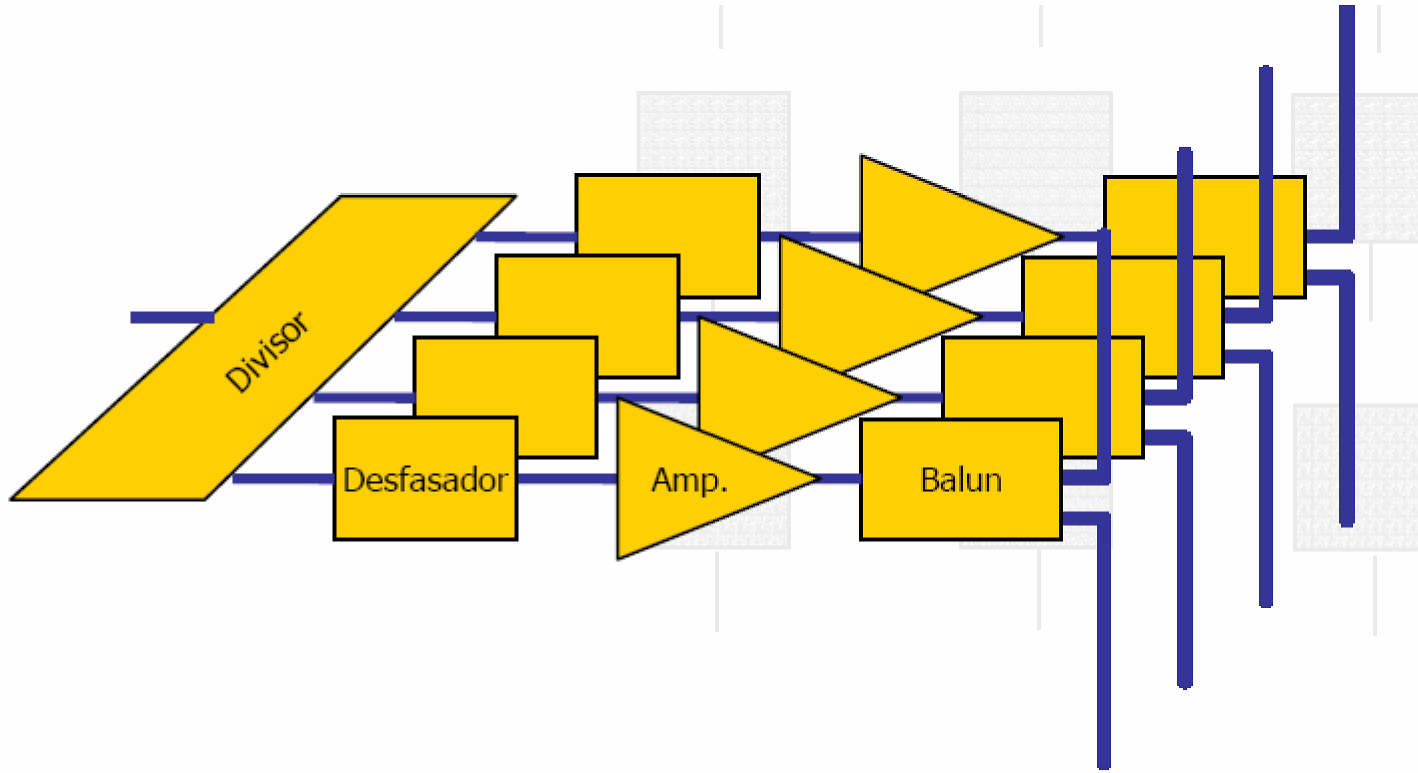
<u>Multihaz</u>

- Red de alimentación con varios puertos de entrada para cada haz
- A veces se diseñan para tener varios tipos de polarización, con puertos de entrada diferenciados (Telefonía Movil)



1.- Clasificación de arrays. *Activos*

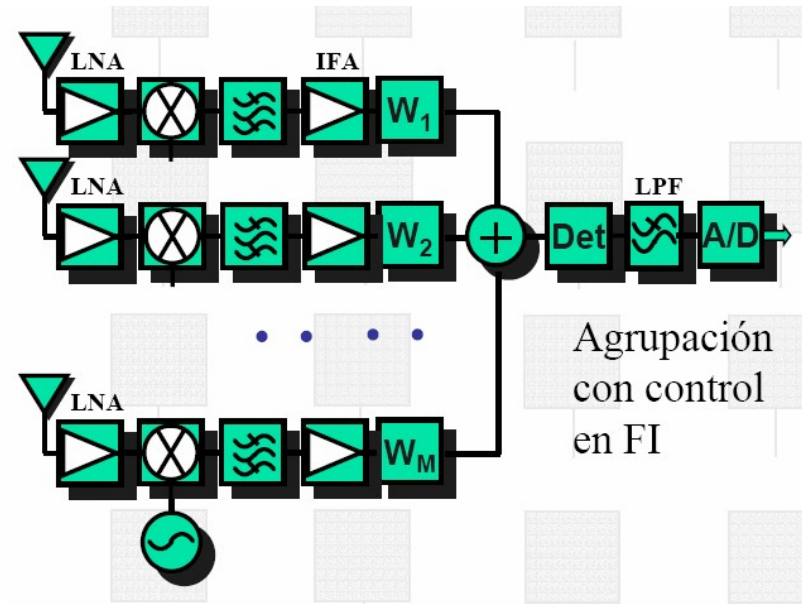
- Utilizan una red activas (amplificadores) fijas o variables, que permiten el control de las excitaciones de los elementos del array
- El paso siguiente es el control de las excitaciones en función de las características de la señal recibida o transmitidas, así como del entorno radioeléctrico → **Antenas adaptativas**



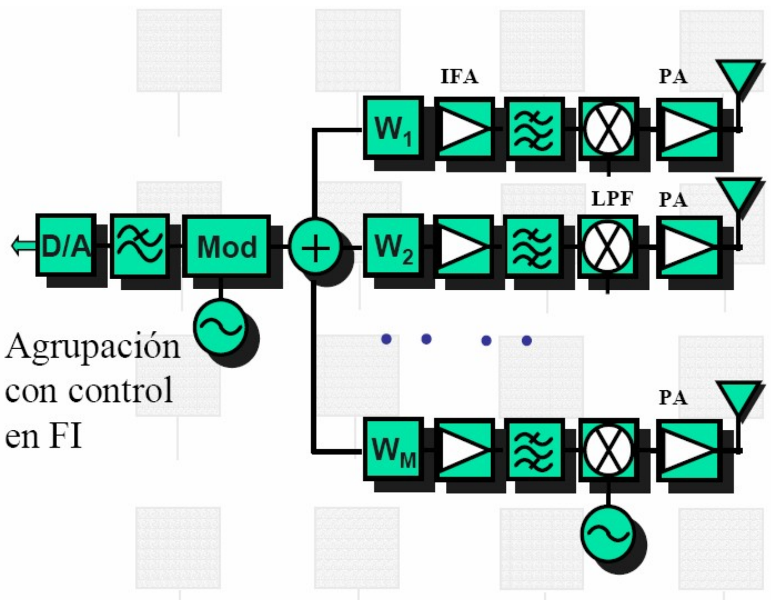
1.- Clasificación de arrays. *Activos*

- Permiten un mayor control del diagrama tanto en recepción como en transmisión

Recepción

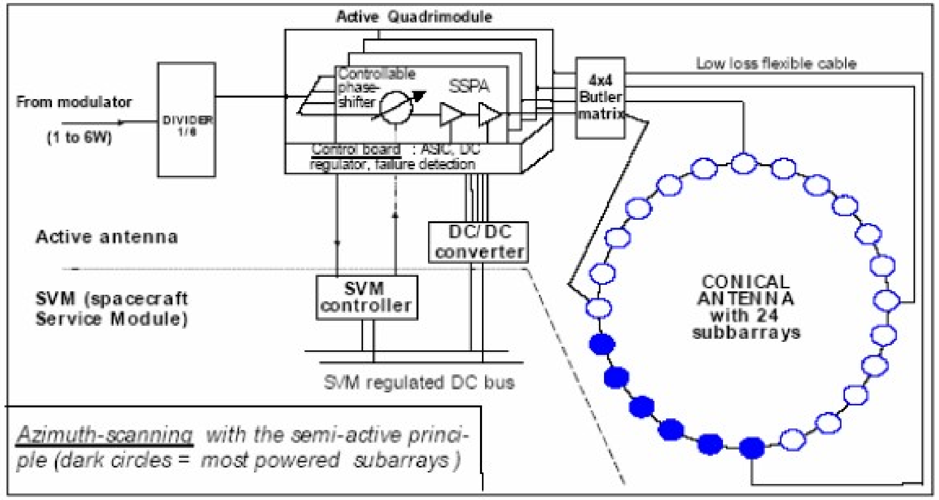


Transmisión



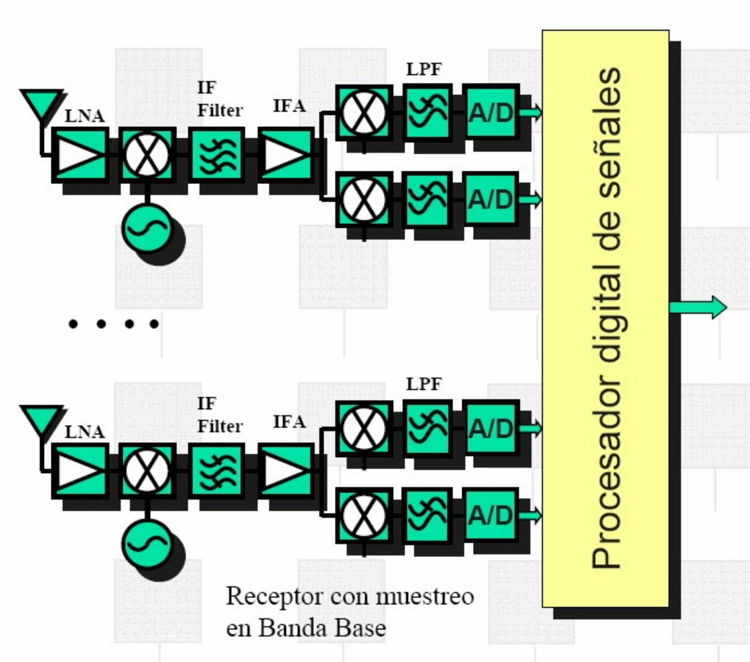
1.- Clasificación de arrays. *Activos*

- Antena de satélite para comunicaciones
- Permite la selección de determinados elementos de la agrupación para optimizar la dirección de transmisión



1.- Clasificación de arrays. *Adaptativos*

- La introducción de un procesado digital permite:
  - Controlar digitalmente los diagramas mediante el establecimiento de los pesos w_i de cada elemento
  - Adaptación del diagrama al entorno radioeléctrico basado en el conocimiento de:
    - Dirección de llegada de la señal deseada
    - Alguna propiedad de la señal deseada
- Es posible cambiar la dirección de apuntamiento de la antena para el seguimiento de la señal deseada
- Permite cambiar la forma del diagrama para favorecer una señal deseada frente a otras interferentes



2.- Principio de multiplicación de diagramas

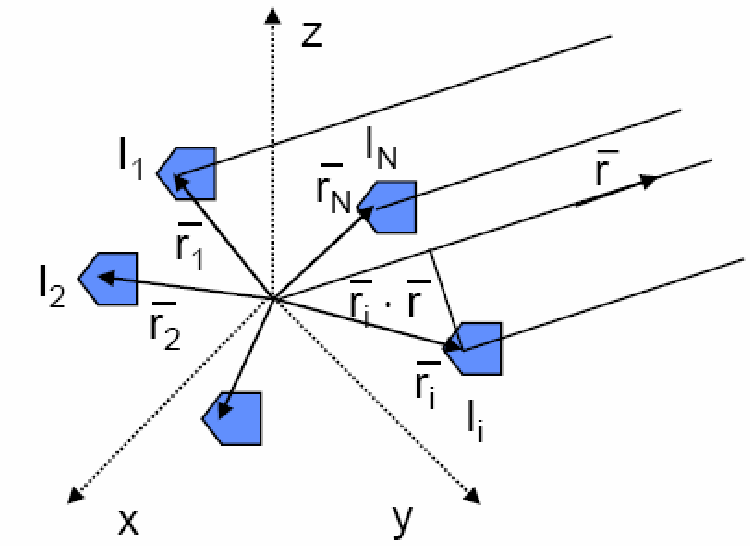
- El array se define por:
  - Vectores de posición $\vec{r}_i$
  - Corrientes de alimentación I_i
  - El diagrama del elemento unitario en el centro de coordenadas $\vec{E}_e(\theta,\phi)$
- **Campo radiado por un elemento "i":**

$$\vec{E}_i(\theta,\phi) = \vec{E}_e(\theta,\phi)\cdot \frac{I_i}{I_0} e^{jk_0 \hat{r}\vec{r}_i}$$

Campo radiado por un elemento en el origen alimentado con I_0

Coeficiente de alimentación complejo A_i

Fase relativa por desplazamiento sobre el origen



- **Campo radiado por el Array:**

$$\vec{E}_A(\theta,\phi) = \sum_i \vec{E}_i(\theta,\phi) = \vec{E}_e(\theta,\phi)\cdot \sum_{i=1}^{N} A_i \cdot e^{jk_0 \hat{r}\vec{r}_i}$$

$$F_A(\theta,\phi) = \sum_{i=1}^{N} A_i \cdot e^{jk_0 \hat{r}\vec{r}_i}$$ = Factor de Array

$$\left|\vec{E}_A(\theta,\phi)\right| = \left|\vec{E}_e(\theta,\phi)\right| \cdot \left|F_A(\theta,\phi)\right|$$

$$\hat{r} = \left(sen\,\theta \cdot \cos\phi \cdot \hat{x} + sen\,\theta \cdot sen\,\phi \cdot \hat{y} + \cos\theta \cdot \hat{z}\right)$$

$$\vec{r}_i = x_i \cdot \hat{x} + y_i \cdot \hat{y} + z_i \cdot \hat{z}$$

- La polarización del campo total radiado depende **"solo"** del elemento unitario
- En arrays grandes el factor de array, varía mucho más rápido angularmente que el diagrama del elemento. Por ello, se puede aproximar el diagrama del array por $F_A(\theta,\phi)$

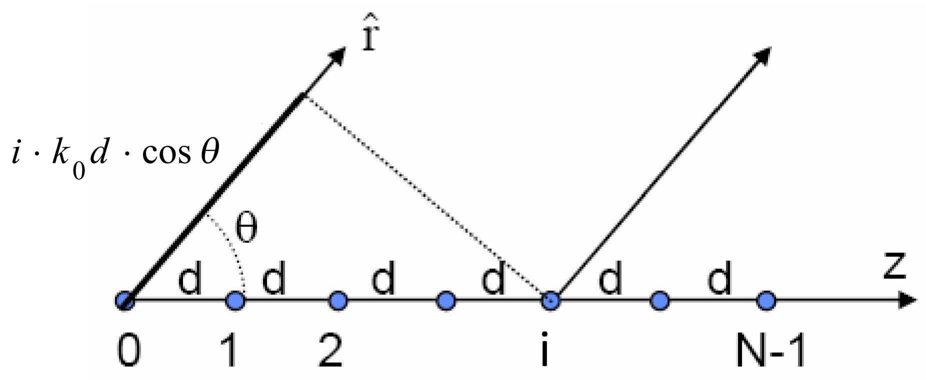
3.- Arrays lineales equiespaciados

- Array de N elementos separados una distancia fija entre sí de valor “d”
- El vector de posición de cada elemento corresponde a:

$$\vec{r}_i = i \cdot d \cdot \hat{z} \longrightarrow \hat{r} \cdot \vec{r}_i = i \cdot d \cdot \cos\theta$$

$$A_i = a_i \cdot e^{j\alpha_i}$$

$$F_A(\theta,\phi) = \sum_{i=0}^{N-1} A_i \cdot e^{jk_0 \hat{r}\vec{r}_i} = \sum_{i=0}^{N-1} a_i \cdot e^{j(i \cdot k_0 \cdot d \cdot \cos\theta + \alpha_i)}$$



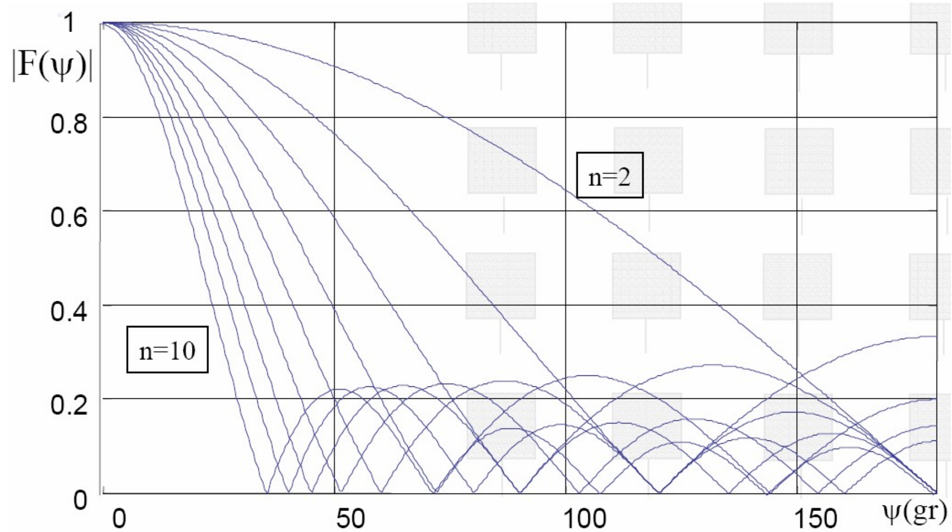
- Leyes de excitación más utilizadas:
  - Fase progresiva, $A_i = a_i \cdot e^{j(i \cdot \alpha)}$
  - Uniforme en Amplitud y en fase, $A_i=1\ \forall i$
  - Uniforme en Amplitud y Fase progresiva, $A_i = e^{j(i \cdot \alpha)}$
  - Amplitud simétrica y decreciente del centro al borde

3.- Arrays lineales equiespaciados. *Uniformes en amplitud*

$$\boxed{A_i = e^{j(i\cdot\alpha)}} \qquad \boxed{\psi = k_0 \cdot d \cdot \cos\theta + \alpha}$$

$$F_A(\theta,\phi) = \sum_{i=0}^{N-1} e^{j\cdot i\cdot(k_0\cdot d\cdot\cos\theta+\alpha)} = \sum_{i=0}^{N-1} e^{j\cdot i\cdot\psi} = e^{j\frac{N-1}{2}\psi}\,\frac{sen\left(\frac{N}{2}\psi\right)}{sen\left(\frac{\psi}{2}\right)}$$

$$\boxed{\left|F_A(\psi)\right| = \left|\frac{sen\left(\frac{N}{2}\psi\right)}{sen\left(\frac{\psi}{2}\right)}\right|}$$



- Función simétrica y periódica de periodo 2π en Ψ
- Máximos principales

$$\psi = 0 \rightarrow F_A = N \longrightarrow \boxed{\theta_0 = \cos^{-1}\left(-\alpha/k_0 \cdot d\right)}$$

$$\psi = \pm 2k\pi \rightarrow F_A = N$$

- Máximos secundarios

$$\psi = \frac{\pm(2k+1)\pi}{N}, \qquad k \neq 0, \pm N, ..$$

- Nulos

$$\psi = \frac{\pm 2k\pi}{N}, excepto \quad \psi = \pm 2k\pi$$

- Nivel del primer lóbulo secundario

$$\left|F_{AN}\left(\psi = \frac{3\pi}{N}\right)\right| = \frac{1/N}{sen\left(\frac{3\pi}{2N}\right)} \xrightarrow[\text{N grande}]{} \frac{2}{3\pi} \Rightarrow -13.46dB$$

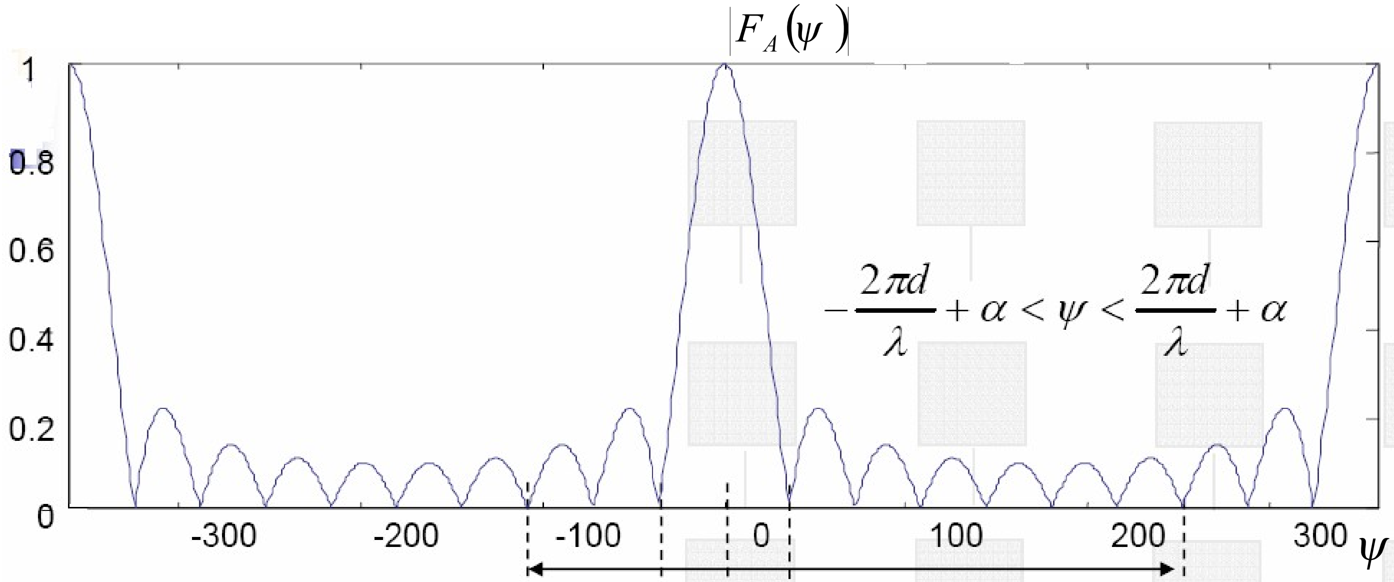
3.- Arrays lineales equiespaciados. *Margen visible*

- Supuesto un array con fase progresiva:

$$A_i = a_i \cdot e^{j(i \cdot \alpha)} \longrightarrow F_A(\theta,\phi) = \sum_{i=0}^{N-1} a_i \cdot e^{j \cdot i \cdot (k_0 \cdot d \cdot \cos\theta + \alpha)} = \sum_{i=0}^{N-1} a_i \cdot e^{j \cdot i \cdot \psi}$$

$$\boxed{\psi = k_0 \cdot d \cdot \cos\theta + \alpha}$$

$$F_A(\psi) = \sum_{i=0}^{N-1} a_i \cdot e^{j \cdot i \cdot \psi}$$

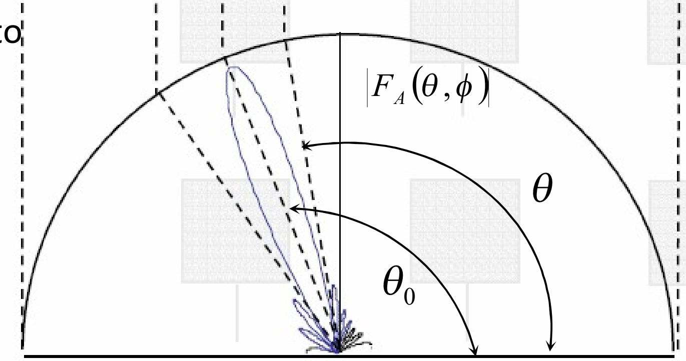


$$F_A(\theta,\phi) = \sum_{i=0}^{N-1} a_i \cdot e^{j \cdot i \cdot (k_0 \cdot d \cdot \cos\theta + \alpha)}$$

- Angulo de apuntamiento

$$\psi = 0 \rightarrow |F_A| = Maximo$$

$$\boxed{\theta_0 = \cos^{-1}(-\alpha / k_0 \cdot d)}$$



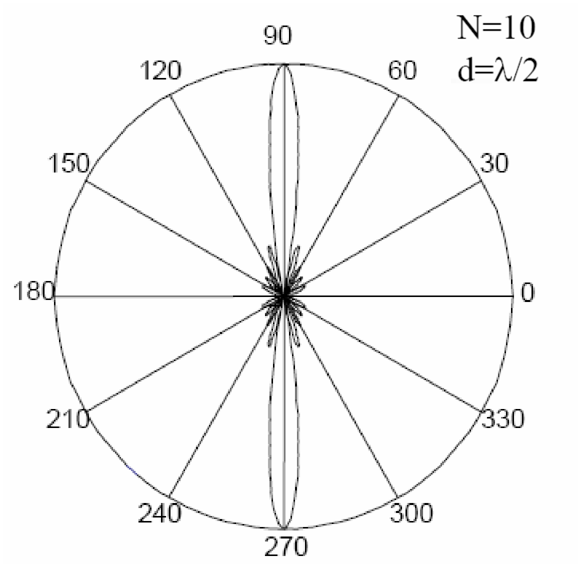
$\theta = \pi = 180º \Rightarrow \psi = \alpha - k_0 \cdot d$

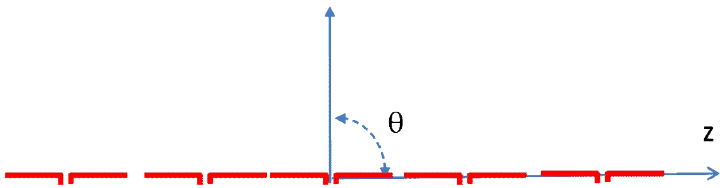
$\theta = 0º \Rightarrow \psi = \alpha + k_0 \cdot d$

- **Si d>λ/2 y/o el desfasaje α es muy alto, pueden aparecer en el margen visible réplicas del lóbulo principal → Grating Lobes**

3.- Arrays lineales equiespaciados. *Arrays Broadside*

- Se obtiene radiación transversal ("broadside") al eje del array. Si dicho array se orienta en el eje z, la radiación principal se obtendrá en θ=90º





- Fase uniforme:

$$\alpha = 0 \Rightarrow \quad \psi = k_0 \cdot d \cdot \cos\theta$$

- Margen visible:

$$-k_0 \cdot d < \psi < k_0 \cdot d$$

- Máximo principal:

$$\psi = 0 \rightarrow \theta_0 = \frac{\pi}{2}$$

- Anchura entre nulos del lóbulo principal:

$$\psi = \frac{\pm 2\pi}{N} \Rightarrow \theta_{1N} = \cos^{-1}\left(\frac{2\pi}{Nk_0 d}\right) \Rightarrow \Delta\theta = 2\left(\frac{\pi}{2} - \theta_{1N}\right) = 2sen^{-1}\left(\frac{\lambda}{Nd}\right)$$

Si $\quad Nd >> \lambda \Rightarrow \boxed{\Delta\theta = 2\frac{\lambda}{Nd}(rad)}$

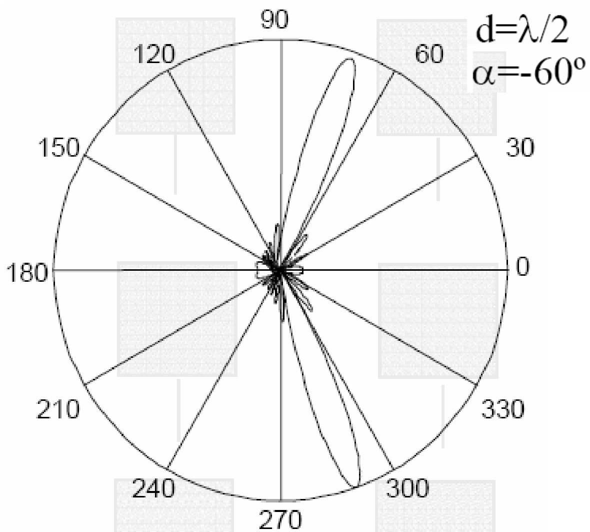
- Anchura del haz principal a 3 dB:

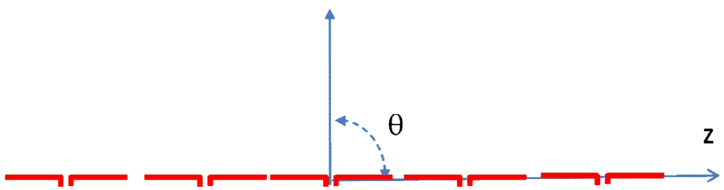
Si $Nd >> \lambda \Rightarrow \boxed{\Delta\theta_{-3dB} = 0.886\frac{\lambda}{Nd}(rad)}$

3.- Arrays lineales equiespaciados. *Arrays de Exploración*

- Variando la fase de exploración α, se consigue que el lóbulo principal explore el espacio

N=10
d=λ/2
α=-60º





- Fase progresiva:

$$\psi = k_0 \cdot d \cdot \cos\theta + \alpha$$

- Margen visible:

$$\alpha - k_0 \cdot d < \psi < k_0 \cdot d + \alpha$$

- Máximo principal:

$$\psi = 0 \rightarrow \boxed{\theta_0 = \cos^{-1}\left(-\alpha / k_0 \cdot d\right)}$$

- Anchura entre nulos del lóbulo principal:

$$\psi = \frac{\pm 2\pi}{N} \Rightarrow \Delta\theta = \cos^{-1}\left(\cos\theta_0 - \frac{\lambda}{Nd}\right) - \cos^{-1}\left(\cos\theta_0 + \frac{\lambda}{Nd}\right)$$

Si $Nd >> \lambda$ y θ_0 próximo a $\pi/2$ $\Rightarrow \boxed{\Delta\theta \approx 2\frac{\lambda}{Ndsen\theta_0}(rad)}$

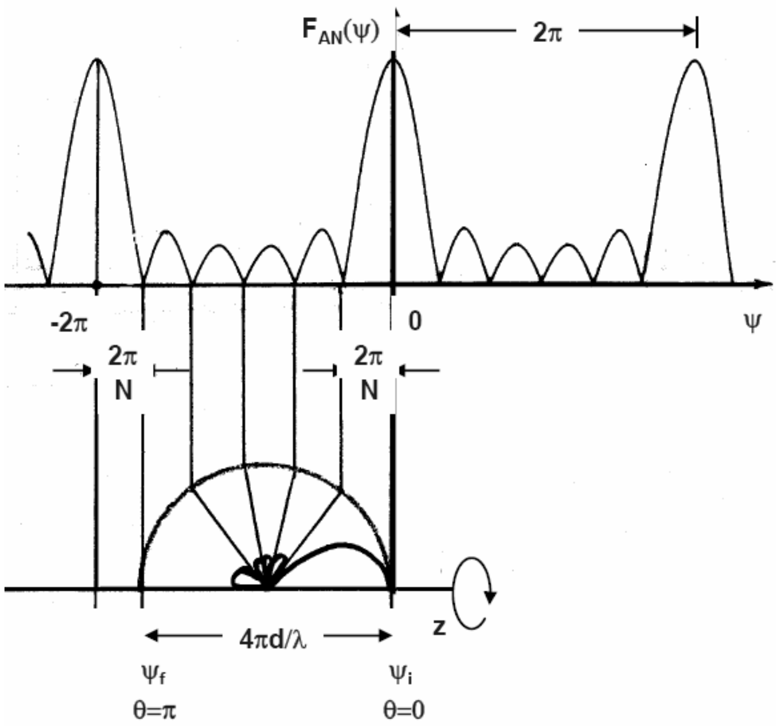
- Anchura del haz principal a 3 dB:

Si $Nd >> \lambda \Rightarrow$ $\boxed{\Delta\theta_{-3dB} = 0.886\frac{\lambda}{Ndsen\theta_0}(rad)}$

- El nivel de lóbulos secundarios es similar al caso broadside

3.- Arrays lineales equiespaciados. *Array Endfire Ordinario*

- Se caracterizan por tener su lóbulo principal apuntando hacia el eje del propio array



¡Espaciado para Maxima Ganancia!

- Máximo principal:

$$\theta = 0 (o \quad \theta = \pi)$$

- Fase progresiva:

$$\psi = 0, en, \theta = 0 \Rightarrow \alpha = -k_0 d = -\frac{2\pi d}{\lambda}$$

- Margen visible:

$$-2k_0 d < \psi < 0$$

- Anchura entre nulos del lóbulo principal:

$$\psi = -\frac{2\pi}{N} \Rightarrow \theta_{1N} = \cos^{-1}\left(1 - \frac{\lambda}{Nd}\right)$$

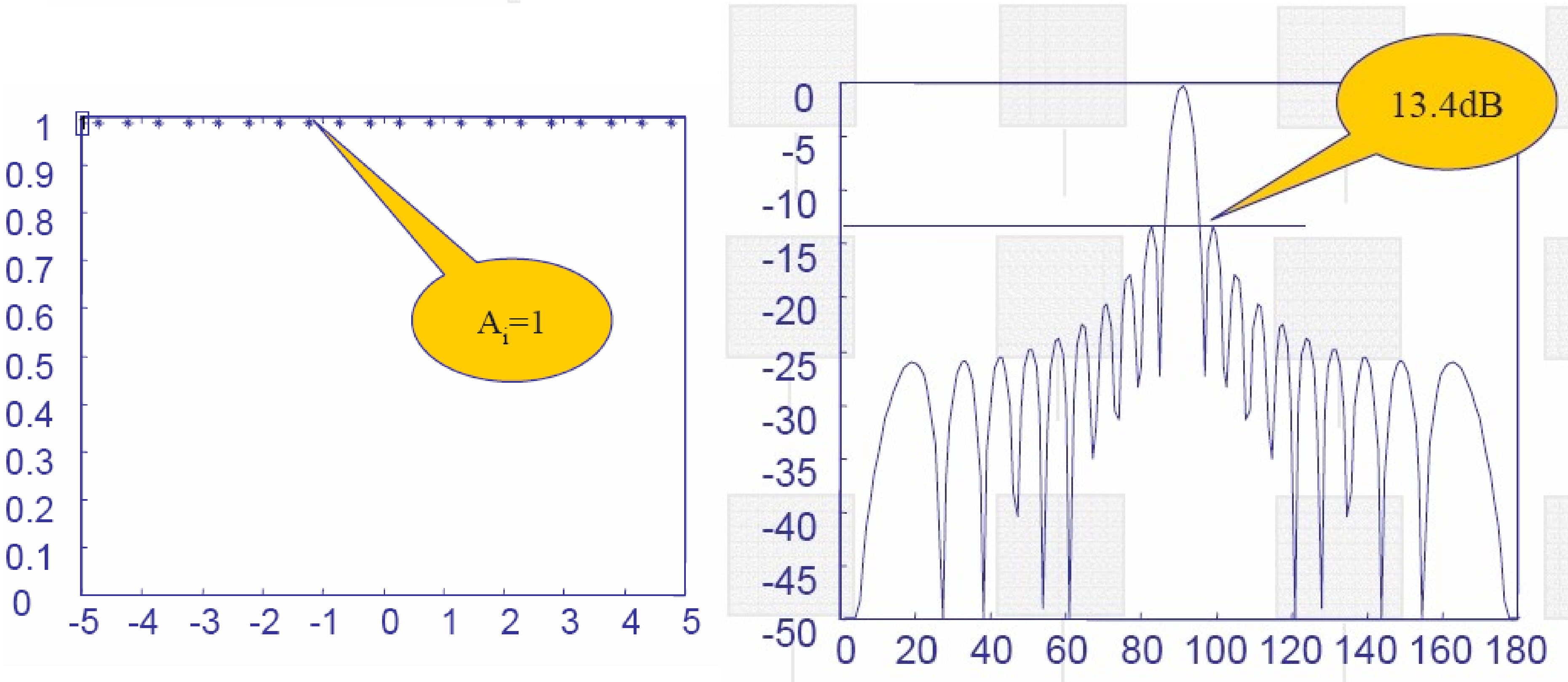
Si $Nd >> \lambda \Rightarrow \cos\theta_{1N} \approx 1 - \theta_{1N}^2/2 = \left(1 - \frac{\lambda}{Nd}\right) \Rightarrow \boxed{\Delta\theta \approx 2\sqrt{\frac{2\lambda}{Nd}}(rad)}$

- Anchura del haz principal a 3 dB:

Si $Nd >> \lambda \Rightarrow \boxed{\Delta\theta_{-3dB} = 2\sqrt{0.886\frac{\lambda}{Nd}}(rad)}$

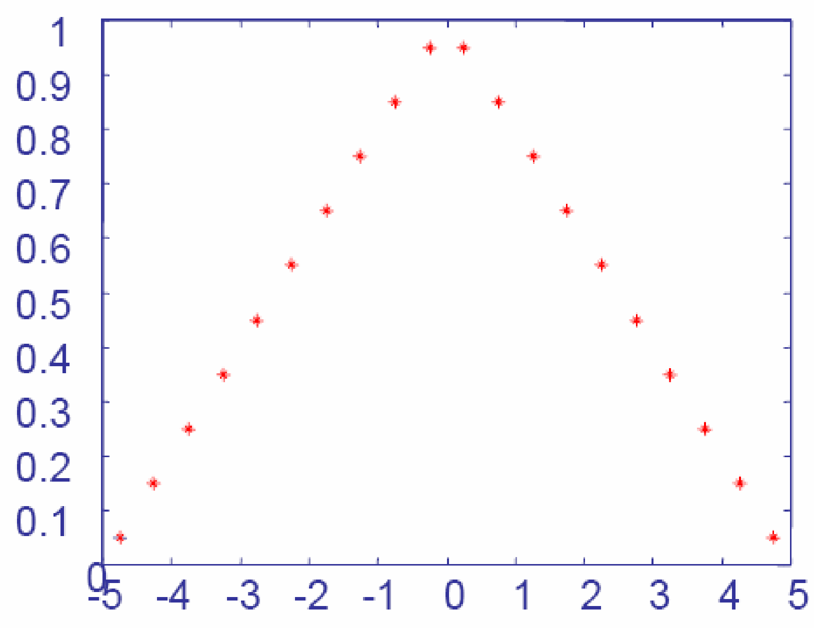
3.- Arrays lineales equiespaciados. *Ejemplos de alimentación - Arrays Broadside uniforme en amplitud*

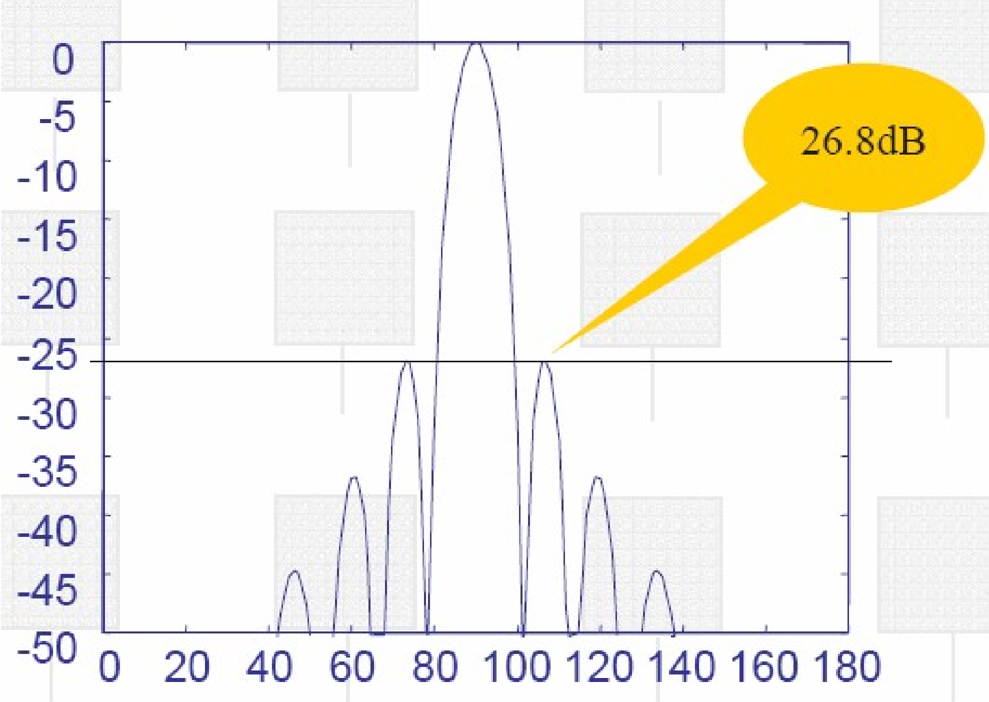
- Cuando $A_i=1$ para i=0 a n-1
- N=20



3.- Arrays lineales equiespaciados. *Ejemplos de alimentación - Array Broadside alimentación triangular*

- Cuando A_i=1-abs(-(n-1)/2+i)/(n/2));
  - para i=0 a n-1
- N=20





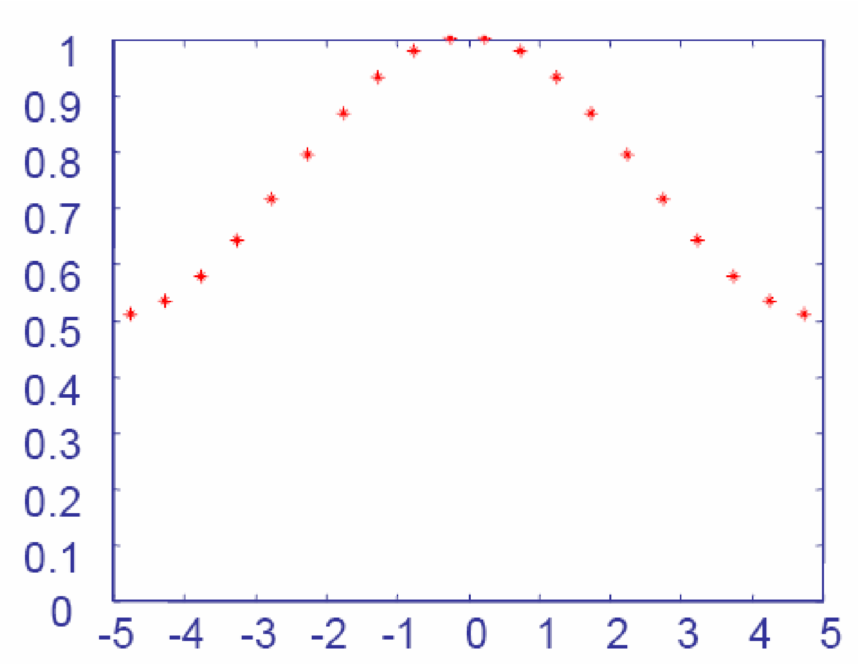
3.- Arrays lineales equiespaciados. *Ejemplos de alimentación - Array Broadside alimentación coseno en pedestal*

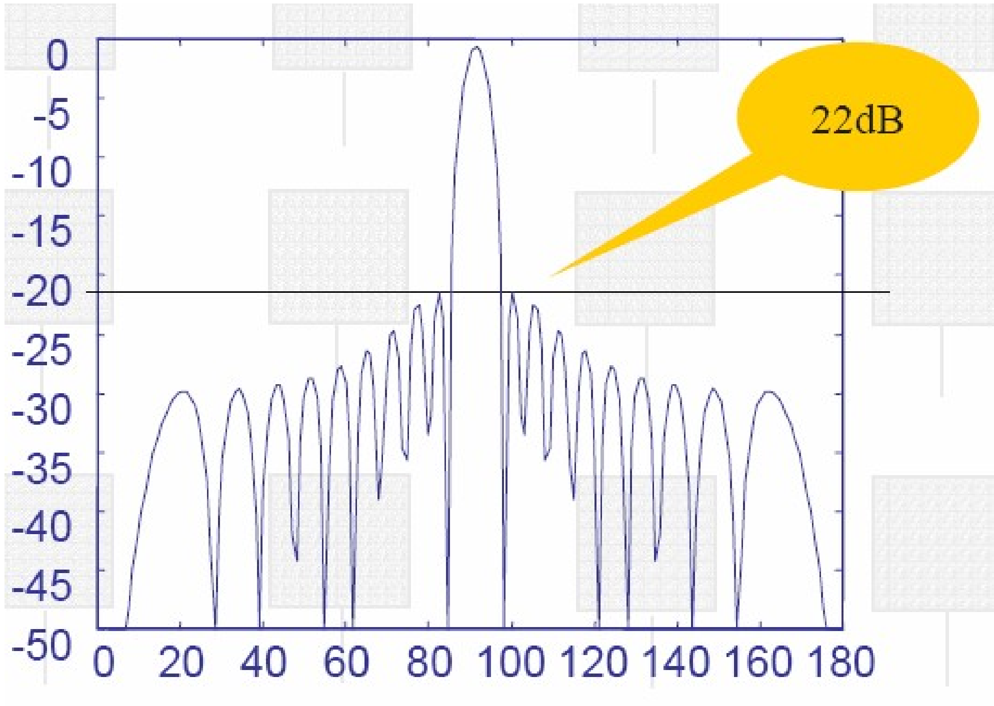
- Cuando

$$A_i = 1 + H\left[\cos\left(\frac{\pi i}{N-1}\right)\right]^2 \text{ ,tal que, } -\frac{N-1}{2} < i < \frac{N-1}{2}$$

  - para i=0 a n-1

- N=20, H=0.5





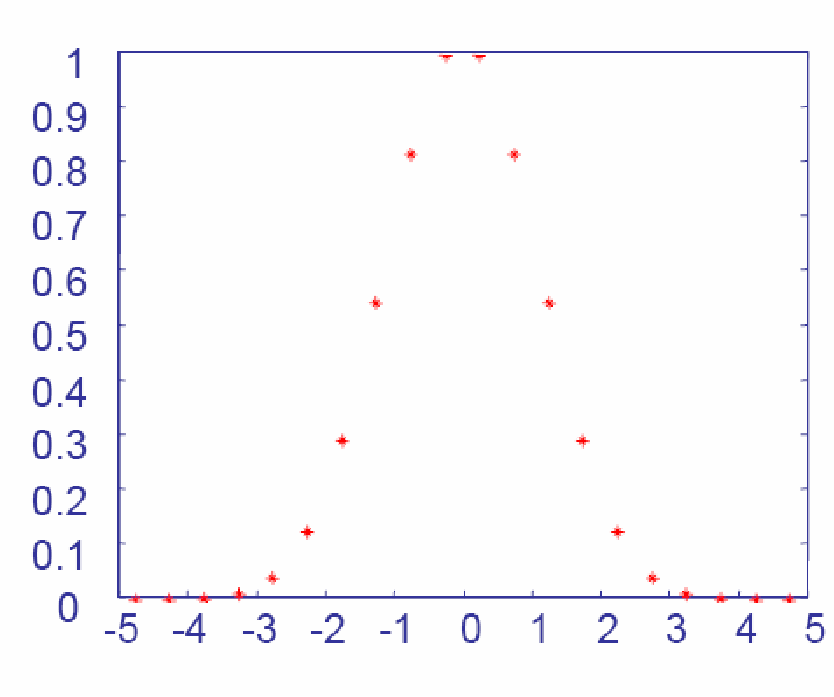
3.- Arrays lineales equiespaciados. *Ejemplos de alimentación - Array Broadside alimentación binomial*

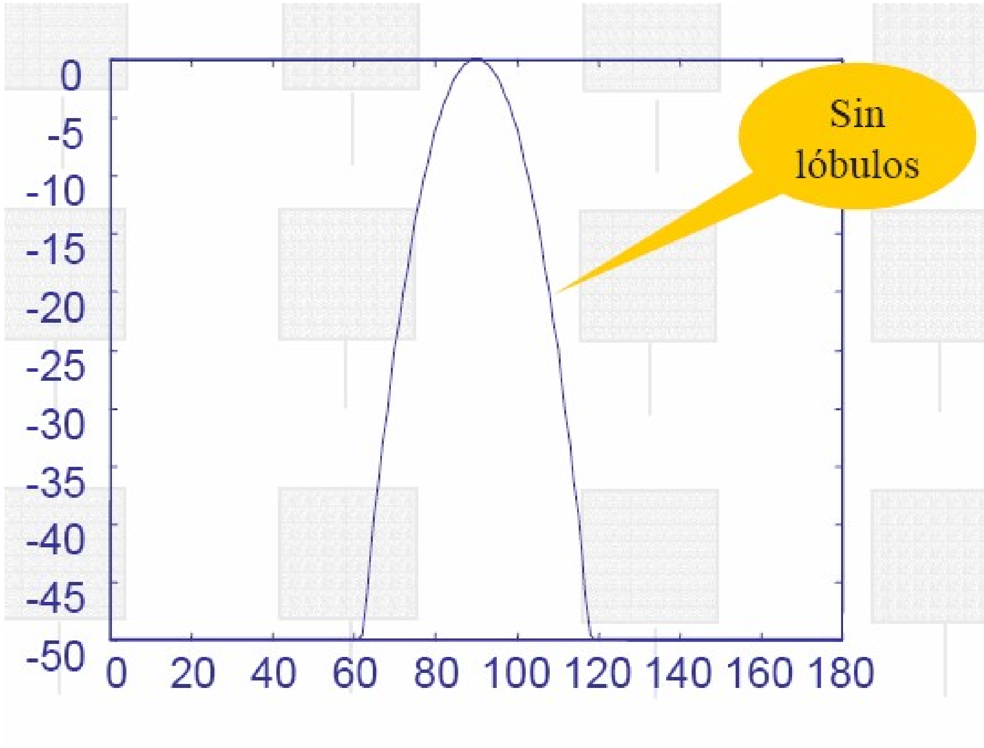
- Cuando

$$A_i = \binom{N-1}{i} = \frac{N!}{(N-i)!\cdot i!}$$

  - para i=0 a n-1

- N=20





3.- Arrays lineales equiespaciados. *Directividad*

- La directividad de un array con elementos **isotrópicos, con coeficientes reales y positivos,** y con su máximo principal (**Ψ=0**) **dentro del margen visible**, es:

$$D_0 = 4\pi \frac{U^{\max}(\theta,\phi)}{P_{rad}} = 4\pi \frac{\left|F_A^{\max}\right|^2}{\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\left|F_A(\theta)\right|^2 sen\theta d\theta d\phi} = \frac{2\left|F_A^{\max}\right|^2}{\int_0^{\pi}\left|F_A(\theta)\right|^2 sen\theta d\theta}$$

- Haciendo el cambio de variable θ por Ψ:

$$\psi = k_0 \cdot d \cdot \cos\theta + \alpha \longrightarrow d\psi = -k_0 \cdot d \cdot sen\theta d\theta \longrightarrow D_0 = \frac{2k_0 d\left|F_A^{\max}\right|^2}{\int_{\alpha-k_0 d}^{\alpha+k_0 d}\left|F_A(\psi)\right|^2 d\psi}$$

- Para un array con alimentación de **fase progresiva**:

$$\left|F_A(\psi)\right|^2 = F_A(\psi)\cdot F_A^*(\psi) = \sum_{i=0}^{N-1} a_i \cdot e^{j\cdot i\cdot\psi} \cdot \sum_{k=0}^{N-1} a_i \cdot e^{-j\cdot k\cdot\psi}$$, y, $$F_A^{\max}(\psi) = F_A(\psi = 0) = \sum_{i=0}^{N-1} a_i$$

$$\boxed{D_0 = \frac{\left(\sum_{i=0}^{N-1} a_i\right)^2}{\sum_{i=0}^{N-1} a_i^2 + \sum_{i=0}^{N-2}\sum_{k=i+1}^{N-1} 2a_i a_k \cdot \frac{sen k_0 d(i-k)}{k_0 d(i-k)}\cos(i-k)\alpha}}$$

- **No se cumple que la directividad de un array con elementos no isotrópicos sea el producto de la directividad del elemento por la del factor de array**

3.- Arrays lineales equiespaciados. *Directividad*

- Si el espacio es d=λ/2: $$\boxed{D_0 = \frac{\left(\sum_{i=0}^{N-1} a_i\right)^2}{\sum_{i=0}^{N-1} a_i^2}} \longrightarrow$$ **¡ No depende de α!**

- Alimentación uniforme en amplitud ($a_i=1\ \forall i$): $$\boxed{D_0 = \frac{N^2}{N + \sum_{i=0}^{N-1} 2(N-i)\cdot \frac{sen(ik_0 d)}{ik_0 d}\cos(i\alpha)}}$$
  - Casos de interés:
    - a. Separación múltiplo de d=λ/2: $d = k\frac{\lambda}{2} \longrightarrow \boxed{D_0 = N}$
    - b. Array broadside (α=0): $d \approx \frac{\lambda}{2}, d < \lambda \longrightarrow \boxed{D_0 = 2N\frac{d}{\lambda}}$
    - c. Array Endfire ordinario : $d \leq \left(1 - \frac{1}{2N}\right)\frac{\lambda}{2} \longrightarrow \boxed{D_0 = 4N\frac{d}{\lambda}}$

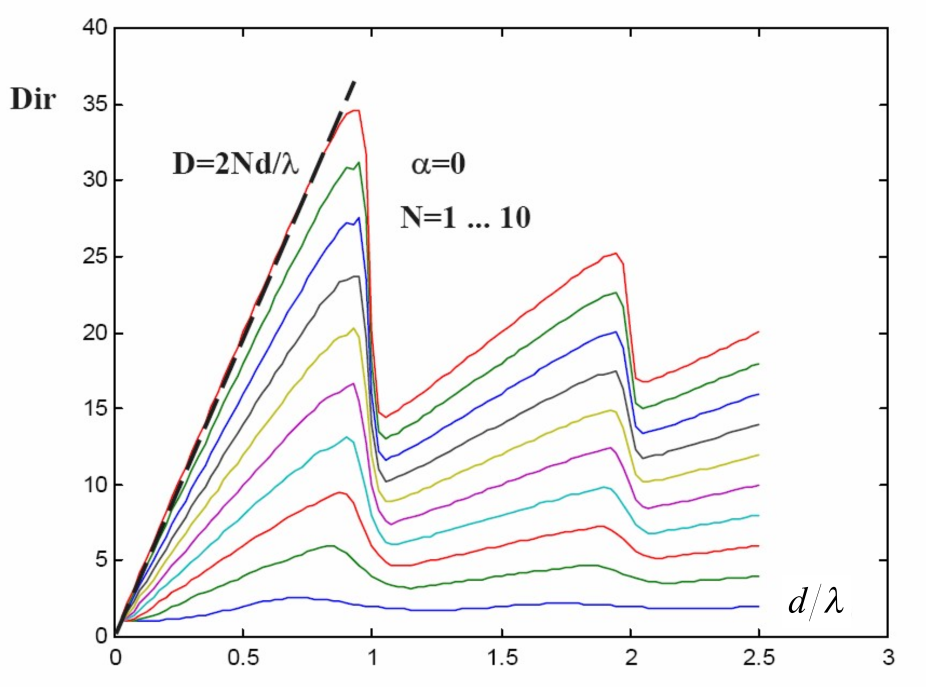
- Alimentación no uniforme y fase progresiva, siempre que N grande, d<λ, α pequeño, sin Grating lobes:

$$\boxed{D_0 = 2\frac{d}{\lambda}\frac{\left(\sum_{i=0}^{N-1} a_i\right)^2}{\sum_{i=0}^{N-1} a_i^2}}$$

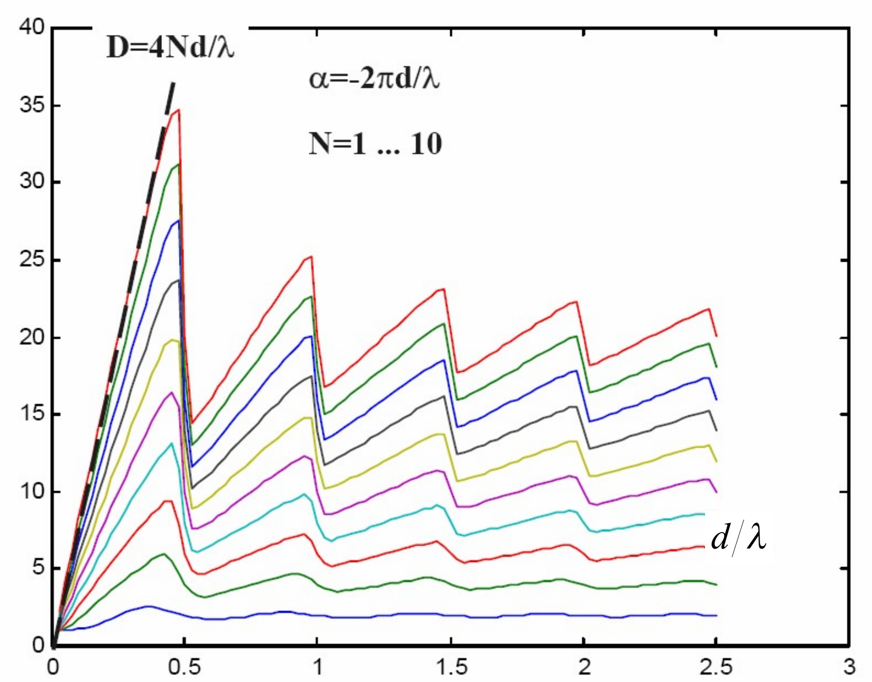
  - Para endfire ordinario, con d<λ/2→ $$\boxed{D_0 = 4\frac{d}{\lambda}\frac{\left(\sum_{i=0}^{N-1} a_i\right)^2}{\sum_{i=0}^{N-1} a_i^2}}$$

3.- Arrays lineales equiespaciados. *Directividad*

- Array lineal Broadside uniforme

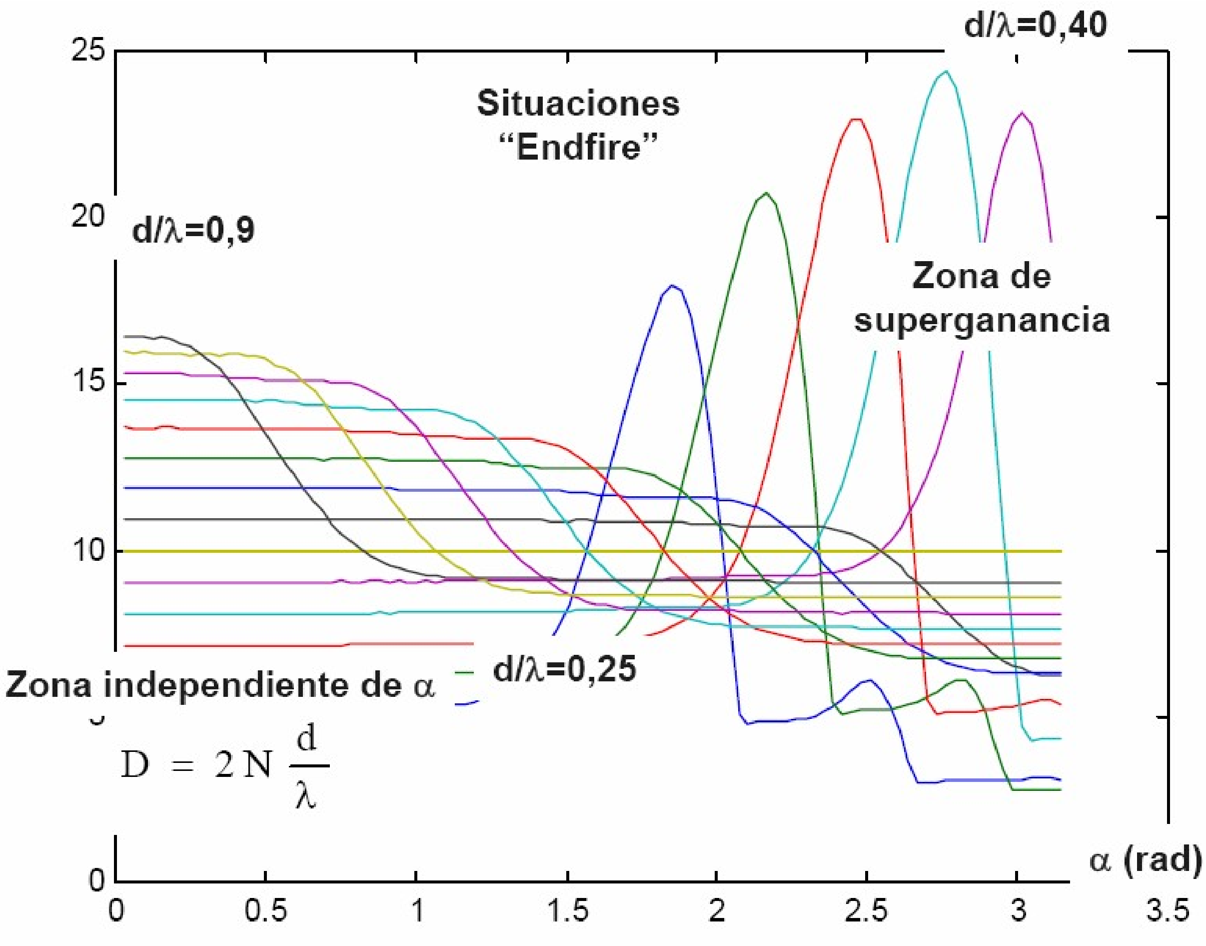


- Array lineal Endfire ordinario uniforme



3.- Arrays lineales equiespaciados. *Directividad*

- Array lineal de N=10 elementos uniforme en amplitud y fase progresiva



4.- Síntesis de Schelkunoff para arrays lineales equiespaciados

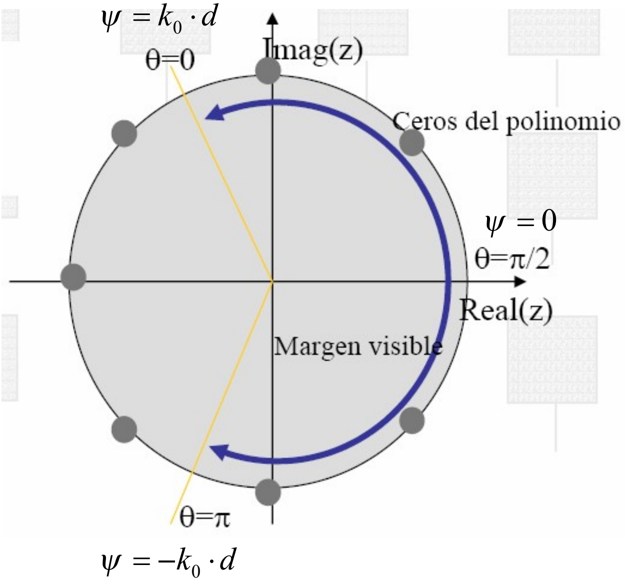
- En un array de N elementos equiespaciados con coeficientes de alimetación complejos A_i, el factor de array se identifica con un polinomio de grado N-1 de variable compleja z.

$$A_i = a_i \cdot e^{j\alpha_i}$$
$$z = e^{j\psi}$$
$$\psi = k_0 \cdot d \cdot \cos\theta$$

$$F_A(\psi) = \sum_{i=0}^{N-1} A_i \cdot e^{j \cdot i \cdot \psi} = \sum_{i=0}^{N-1} A_i \cdot z^i = A_{N-1}(z - z_1)(z - z_2)...(z - z_{N-1})$$

$$|F_A(\psi)| = |A_{N-1}||z - z_1||z - z_2|...|z - z_{N-1}|$$

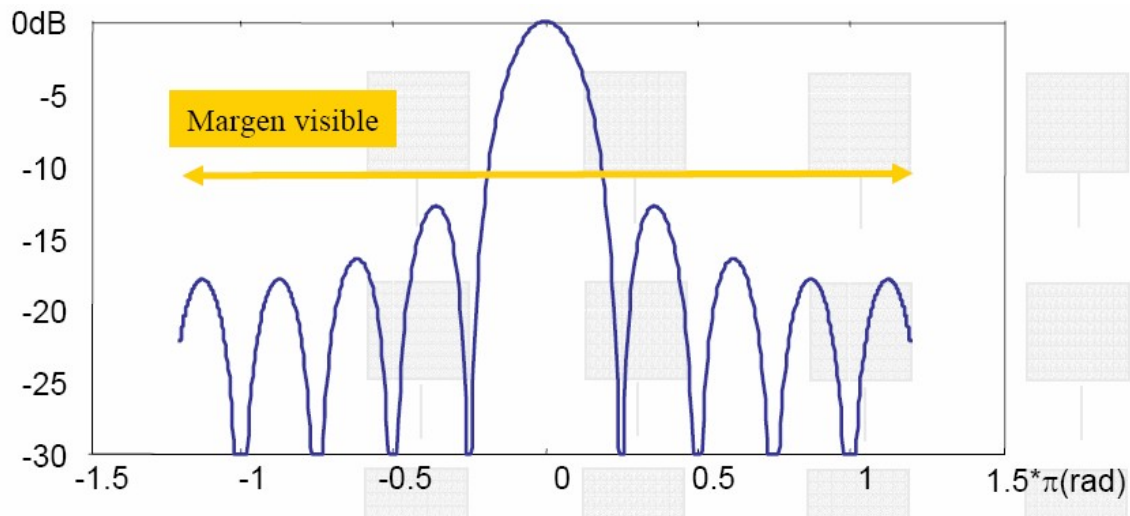
- A efectos de diagrama de radiación, la variable z tomas sus valores dentro de la circunferencia de radio 1 y en el margen visible ($-k_0 d \leq \Psi \leq k_0 d$) $\leftrightarrow$ ($0 \leq \theta \leq \pi$)
- Cada raíz sobre el círculo unidad dentro del margen visible, aporta un nulo al diagrama
- Los máximos(lóbulos) se sitúan entre raíces, y el máximo principal (lóbulo principal), se sitúa entre las raíces más alejadas
- Si A_i son reales y simétricos → las raíces se agrupan en parejas conjugadas
- Si alguna de las raíces no se sitúa sobre el circulo de radio 1, el nulo al que hace referencia estará relleno.

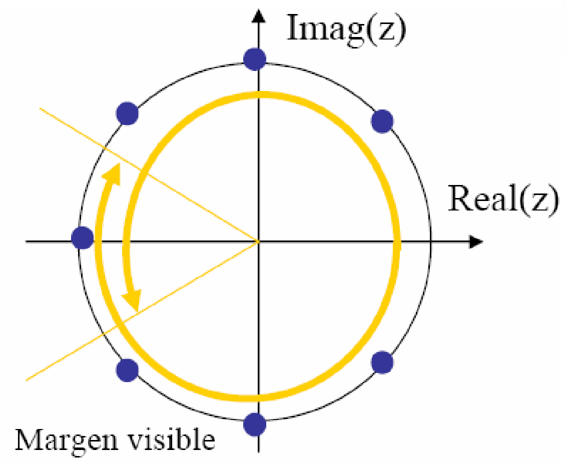


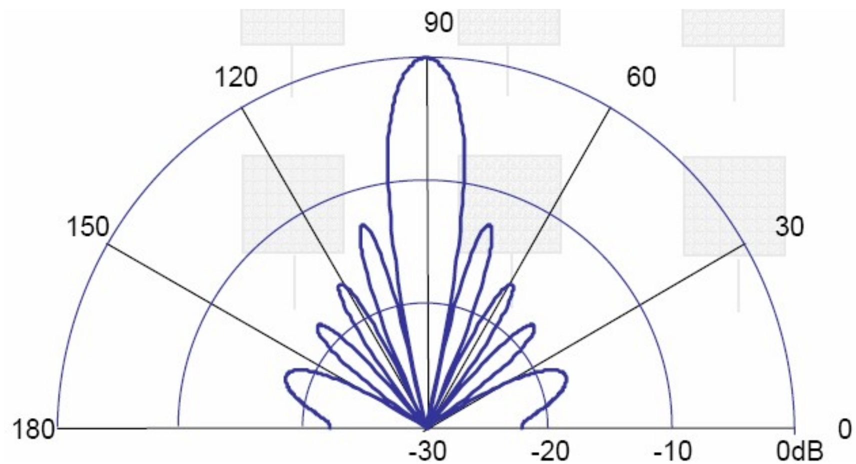
N=8, α=0
Alimentación uniforme

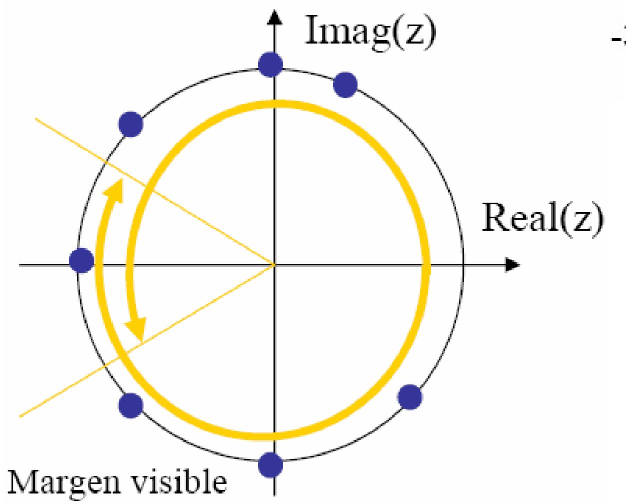
4.- Síntesis de Schelkunoff para arrays lineales equiespaciados

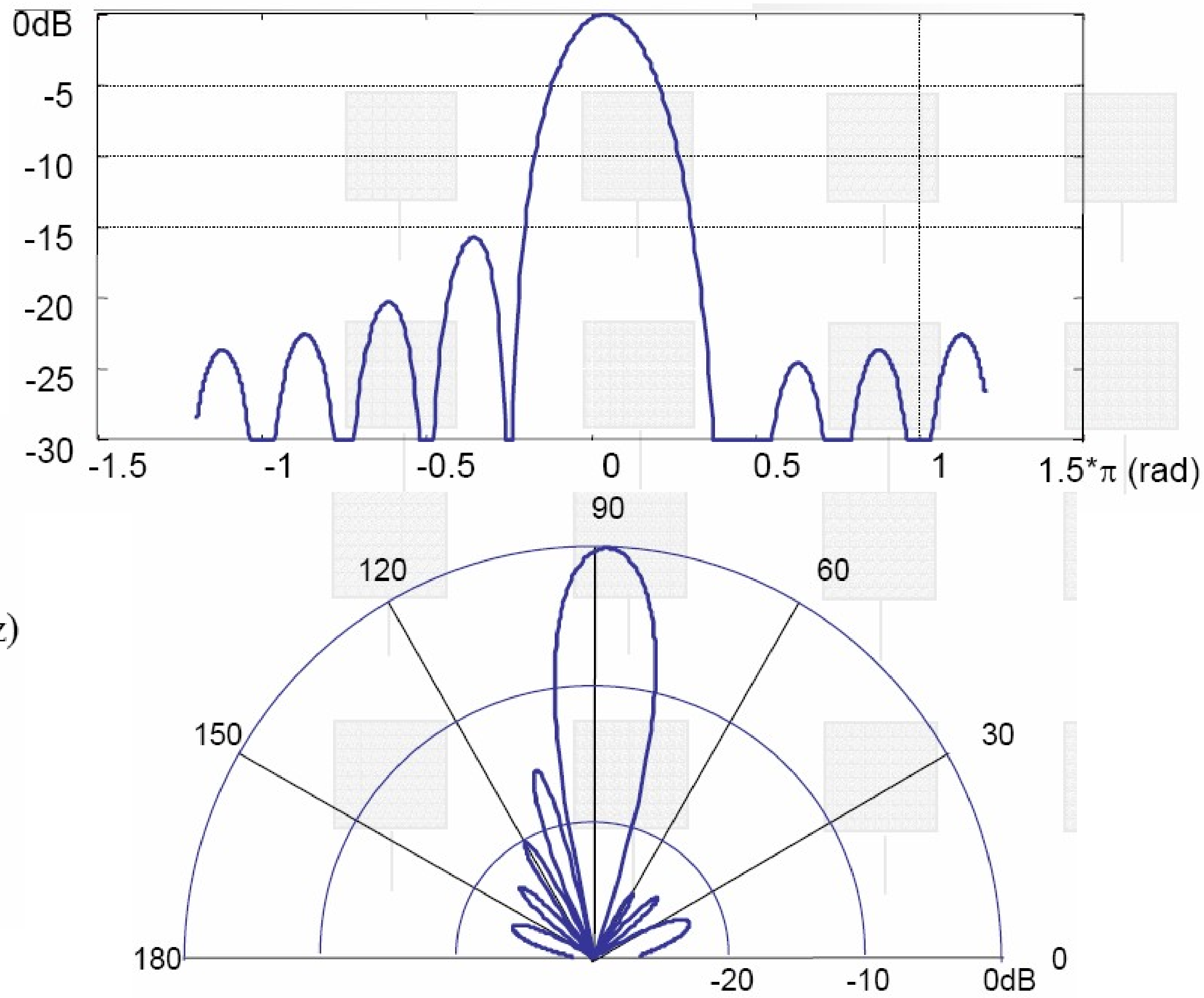
N=8, α=0, d=0.6λ
Alimentación uniforme



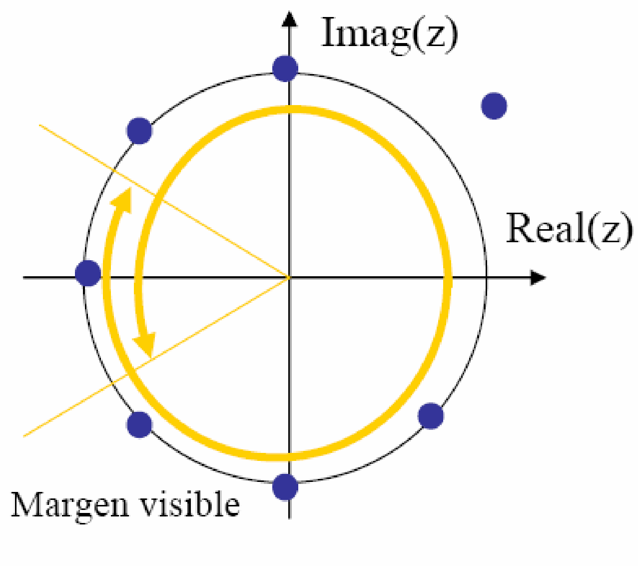


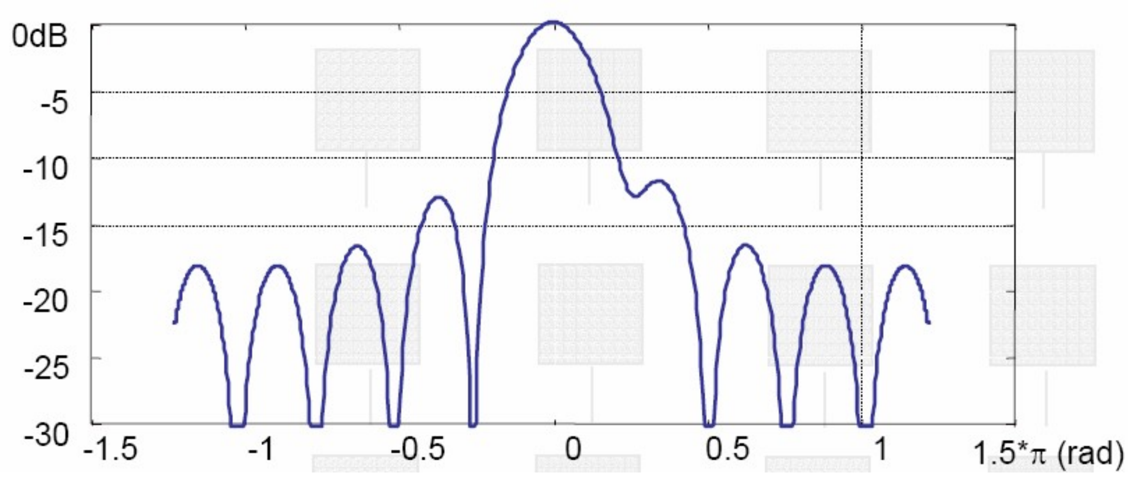


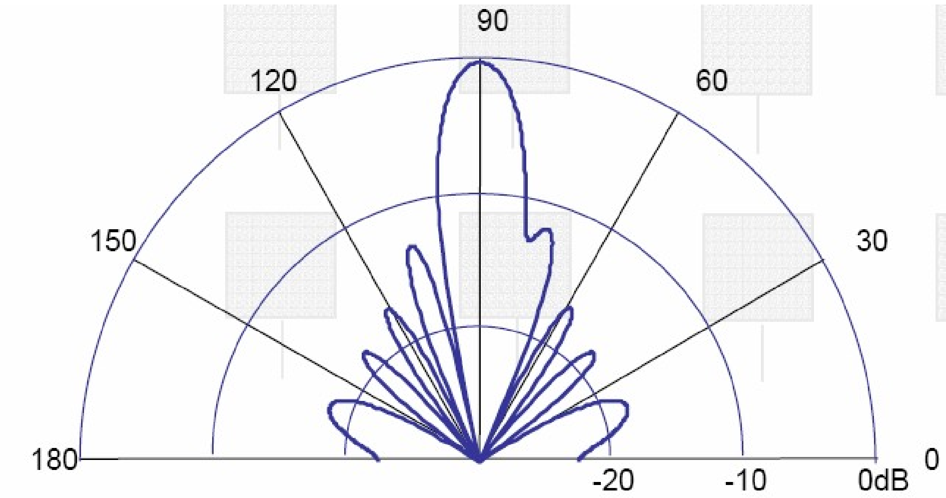

Imag(z)
Real(z)
Margen visible


0dB
-5
-10
-15
-20
-25
-30
-1.5
-1
-0.5
0
0.5
1
1.5*π (rad)
90
120
60
150
30
180
0
-20
-10
0dB

4.- Síntesis de Schelkunoff para arrays lineales equiespaciados





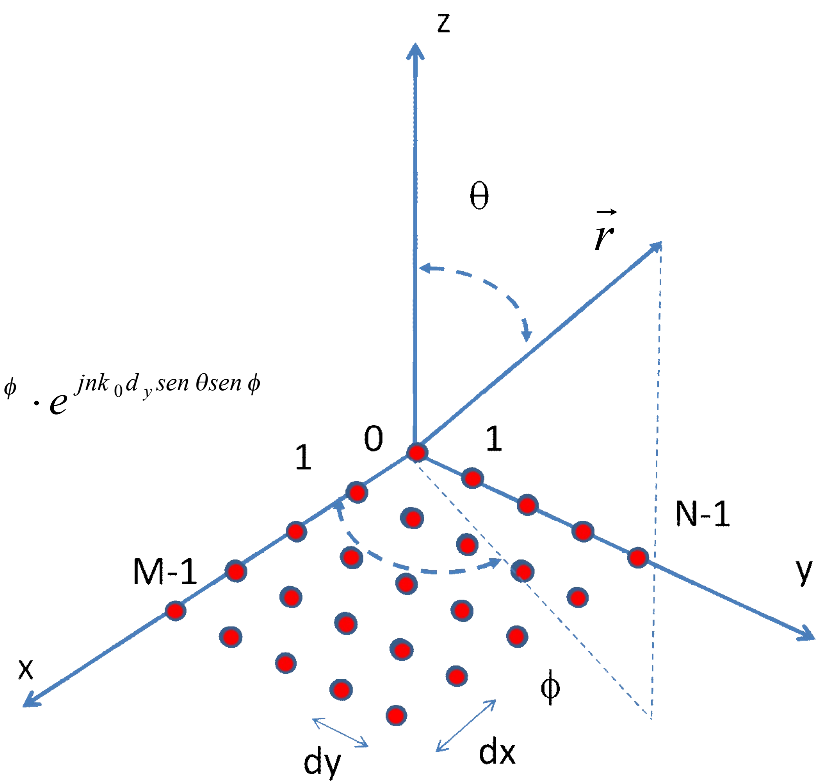


5.- Arrays reticulares planos

- En un array de N elementos equiespaciados con coeficientes de alimetación complejos A_i, el factor de array se identifica con un polinomio de grado N-1 de variable compleja z.
- Se obtienen haces tipo pincel orientados en cualquier dirección (θ,ϕ)
- Se forman por una retícula rectangular de MxN elementos situados en el plano XY, con separación uniforme entre ellos de d_x en dirección X y d_y en dirección Y.

$$\hat{r} = \left(sen\,\theta \cdot \cos\phi \cdot \hat{x} + sen\,\theta \cdot sen\,\phi \cdot \hat{y} + \cos\theta \cdot \hat{z}\right)$$

$$\vec{r}_{mn} = md_x \cdot \hat{x} + nd_y \cdot \hat{y}$$



$$F_A(\theta,\phi) = \sum_{m=1}^{M-1}\sum_{n=1}^{N-1} A_{mn} \cdot e^{jk_0\hat{r}\vec{r}_{mn}} = \sum_{m=1}^{M-1}\sum_{n=1}^{N-1} A_{mn} \cdot e^{jmk_0 d_x sen\,\theta\cos\phi} \cdot e^{jnk_0 d_y sen\,\theta sen\,\phi}$$

5.- Arrays reticulares planos. *Distribuciones separables*

- Es el caso más habitual. Los coeficientes de alimentación son reales y positivos, y las fases progresivas.
- El factor de array se puede interpretar como un array lineal en x, cuyo elemento unitario es el factor de array en y (o viceversa)
- Diseño independiente del factor de array según los dos planos principales F_{Ax} y F_{Ay}

$$\left.\begin{aligned} A_{mn} &= a_m \cdot e^{jm\alpha_x} a_n \cdot e^{jn\alpha_y} \\ \psi_x &= k_0 \cdot d_x \cdot sen\theta \cdot \cos\phi + \alpha_x \\ \psi_y &= k_0 \cdot d_y \cdot sen\theta \cdot sen\phi + \alpha_y \end{aligned}\right\} \longrightarrow \boxed{F_A(\psi_x,\psi_y) = \sum_{m=0}^{M-1} a_m \cdot e^{j\cdot m\cdot\psi_x} \sum_{n=0}^{N-1} a_n \cdot e^{j\cdot n\cdot\psi_x} = F_{Ax}(\psi_x)\cdot F_{Ay}(\psi_y)}$$

- Si los coeficientes A_{mn} son reales y positivos, y las fases progresivas, la dirección de máximo apuntamiento se obtiene como:

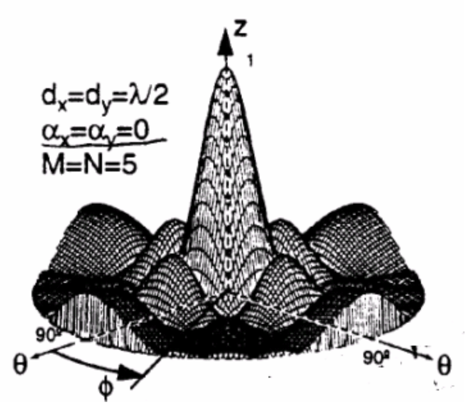
$$\left.\begin{aligned} \psi_x = 0 &\Rightarrow k_0 \cdot d_x \cdot sen\theta_0 \cdot \cos\phi_0 = -\alpha_x \\ \psi_y = 0 &\Rightarrow k_0 \cdot d_y \cdot sen\theta_0 \cdot \cos\phi_0 = -\alpha_y \end{aligned}\right\} \longrightarrow \begin{aligned} \theta_0 &= sen^{-1}\boxed{\sqrt{\left(\frac{\alpha_x}{k_0 d_x}\right)^2 + \left(\frac{\alpha_y}{k_0 d_y}\right)^2}} \\ \phi_0 &= \tan^{-1}\left(\frac{\alpha_y d_x}{\alpha_x d_y}\right) \end{aligned}$$

<1 para que exista lóbulo principal

5.- Arrays reticulares planos. *Distribuciones separables*

- **Factor de array con excitación uniforme en amplitud**:

$$\left|F_A(\psi_x,\psi_y)\right| = \left|F_{Ax}(\psi_x)\right|\cdot\left|F_{Ay}(\psi_y)\right| = \left|\frac{sen\left(\frac{M}{2}\psi_x\right)sen\left(\frac{N}{2}\psi_y\right)}{sen\left(\frac{\psi_x}{2}\right)en\left(\frac{\psi_y}{2}\right)}\right|$$



- **El ancho de haz entre nulos**:

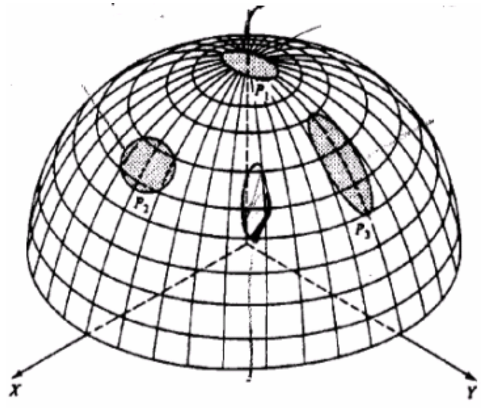
$$\Delta\theta = \frac{\Delta\theta_{X0}\Delta\theta_{Y0}}{\cos\theta_0} \quad \text{, tal que,} \quad \Delta\theta_{X0} = \frac{2\lambda}{Md_x} \qquad \Delta\theta_{Y0} = \frac{2\lambda}{Nd_y}$$

- **Directividad**:

$$\boxed{D_0 = \frac{4\pi}{\Omega_A}}$$

$$\Omega_A \approx \frac{\Delta\theta}{4} \Rightarrow D_0 \approx \pi\frac{2Md_x}{\lambda}\cdot\frac{2Nd_y}{\lambda}\cos\theta_0$$

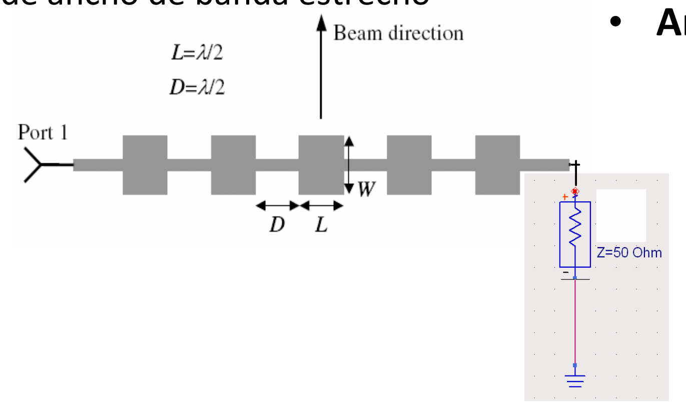
$$\boxed{D_0 \approx \pi\cdot D_x\cdot D_y\cos\theta_0}$$



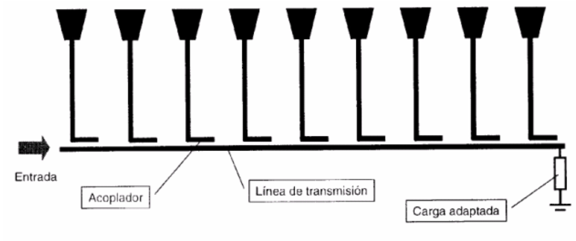
- Esta expresión de directividad es válida para cualquier tipo de excitación en función de la directividad de los arrays broadside lineales D_x y D_y

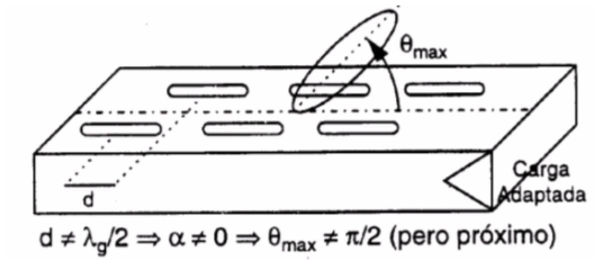
6.- Redes de alimentación. *Excitaciones tipo Serie*

- La red de alimentación distribuye la potencia de entrada al array, de manera que cada elemento radiante tenga los coeficientes de alimentación en módulo y fase adecuados A_i
- En las redes tipo serie, la impedancia de entrada de cada elemento unitario del array se distribuye en serie dentro de la red de distribución de potencia
- Son de ancho de banda estrecho

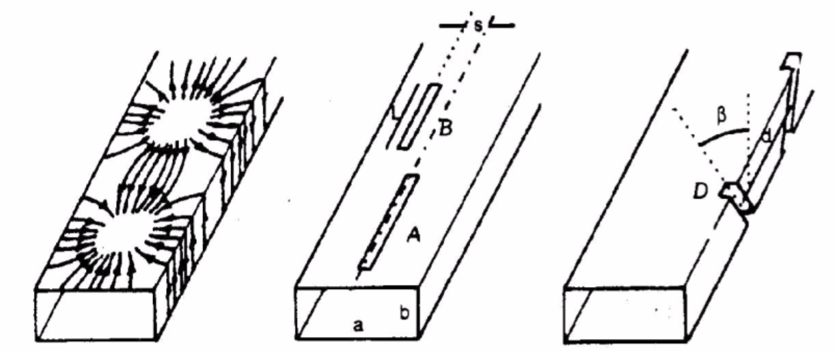


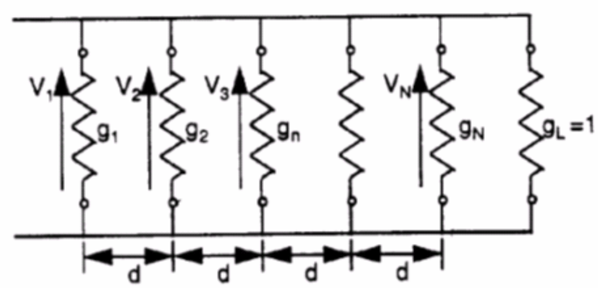
- **Array serie de parches**





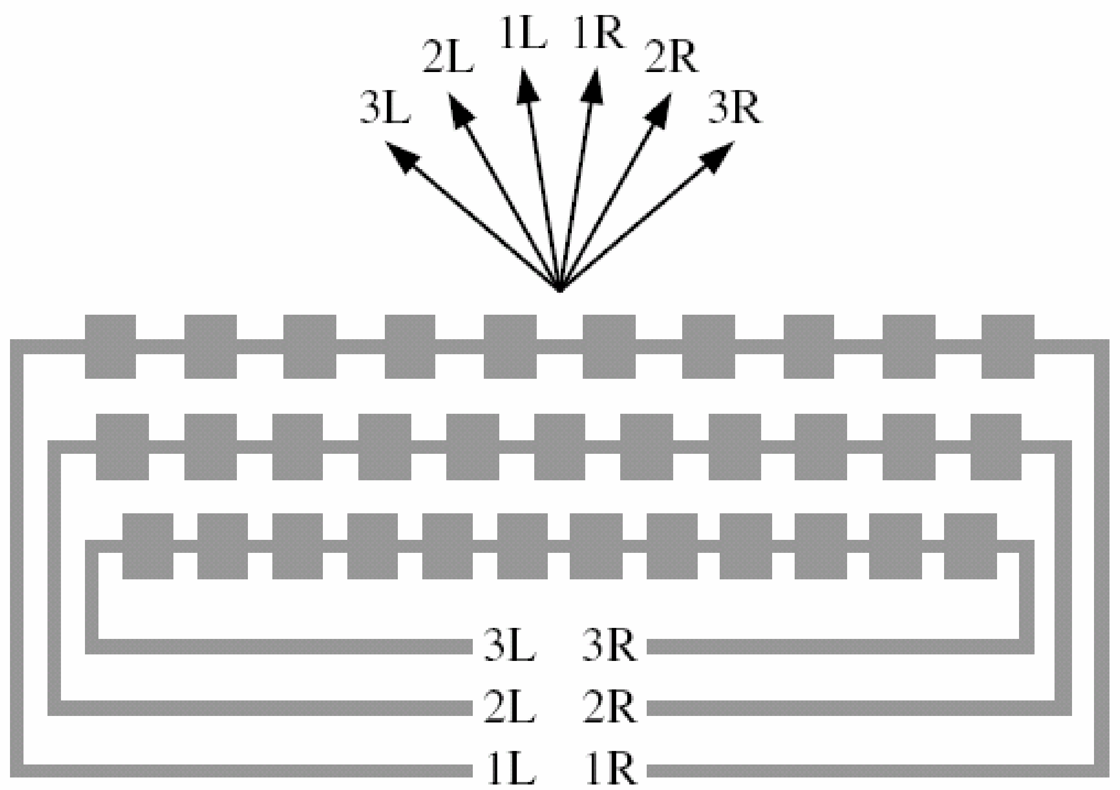
- **Array serie de ranuras sobre guía**





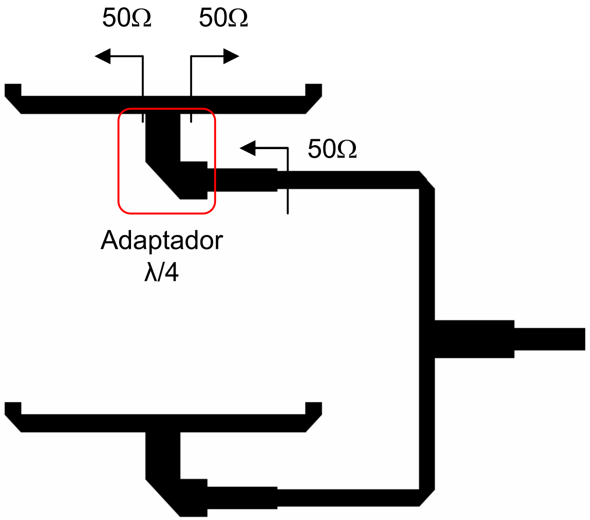
6.- Redes de alimentación. *Excitaciones tipo Serie*

- **Red multihaz**

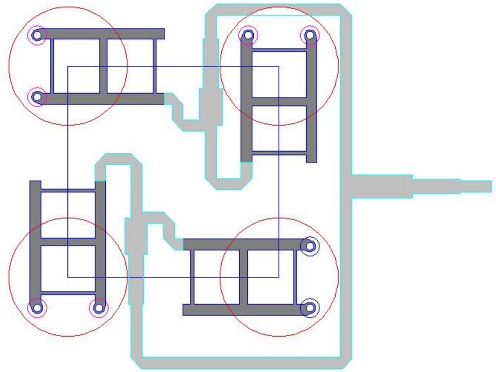


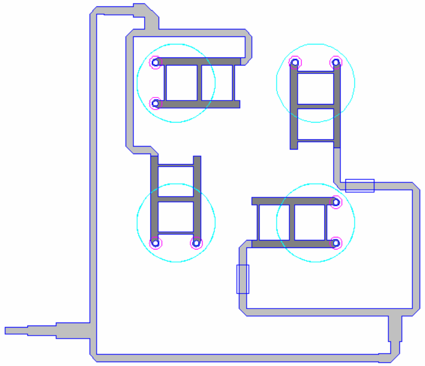
6.- Redes de alimentación. *Excitaciones tipo Paralelo*

- A la hora de diseñar la red de distribución de potencia que obtenga los coeficientes de alimentación A_i, la impedancia de entrada de los elementos unitarios, se posiciona en paralelo dentro de la red.
- Las divisiones de potencia se realizan en nodos de la misma tensión.
- Son de ancho de banda grande



- **Red multipolarización**

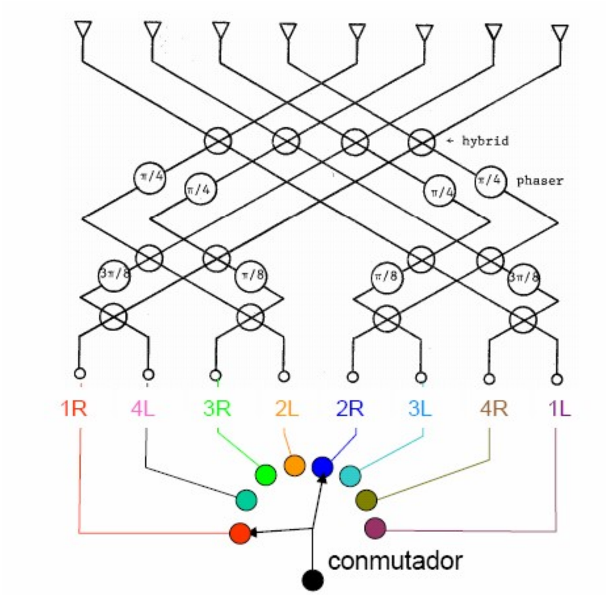


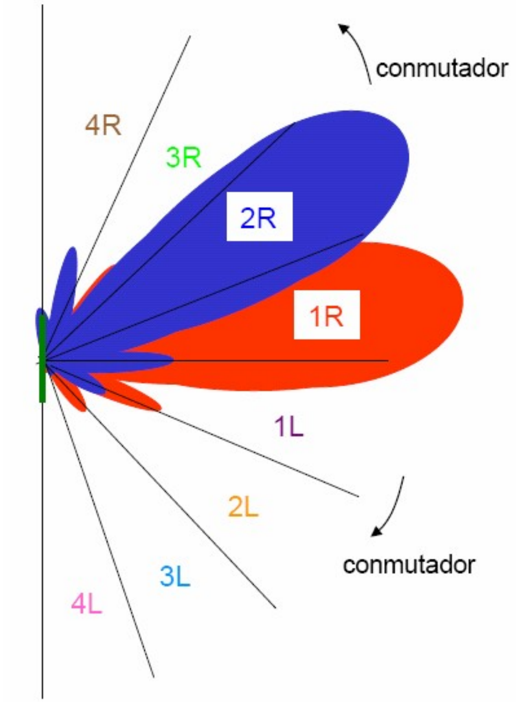


6.- Redes de alimentación. *Excitaciones tipo Paralelo*

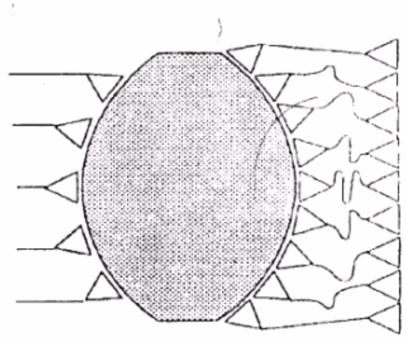
Redes de haces conmutados

- **Matriz de Butler**



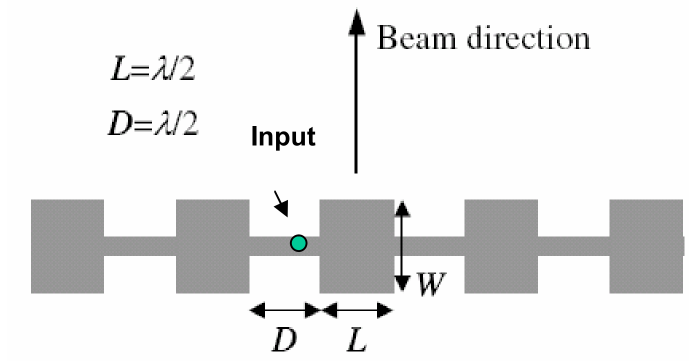


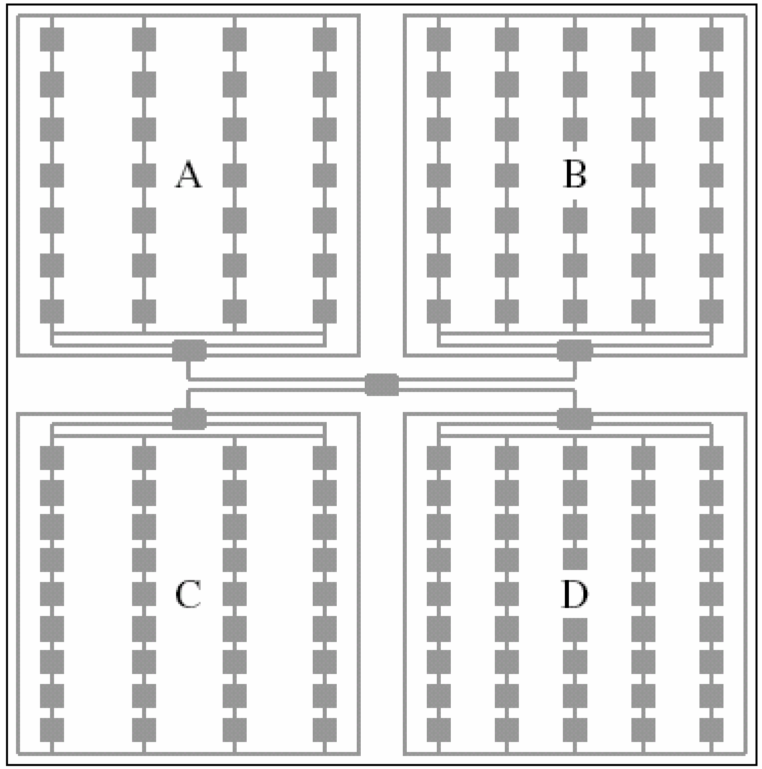
- **Lentes de Rotzman**



6.- Redes de alimentación. *Excitaciones híbridas Serie-Paralelo*

- Opción combinada de redes tipo serie y paralelo
- Son de ancho de banda medio

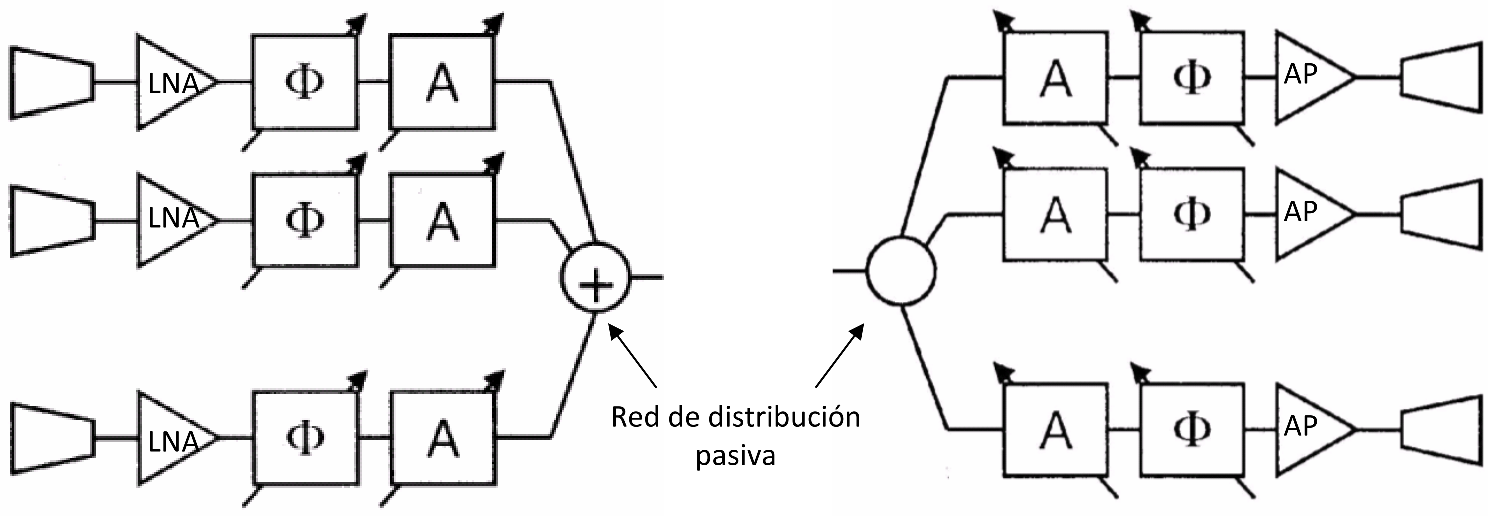




6.- Redes de alimentación. *Redes activas*

- Variación analógica de la amplitud y la fase de transmisión o recepción.
- La amplitud permite el control de los lóbulos secundarios
- La fase permite el control del ángulo de apuntamiento del array = Phased Arrays

- **Phased array en recepción**
- **Phased array en transmisión**

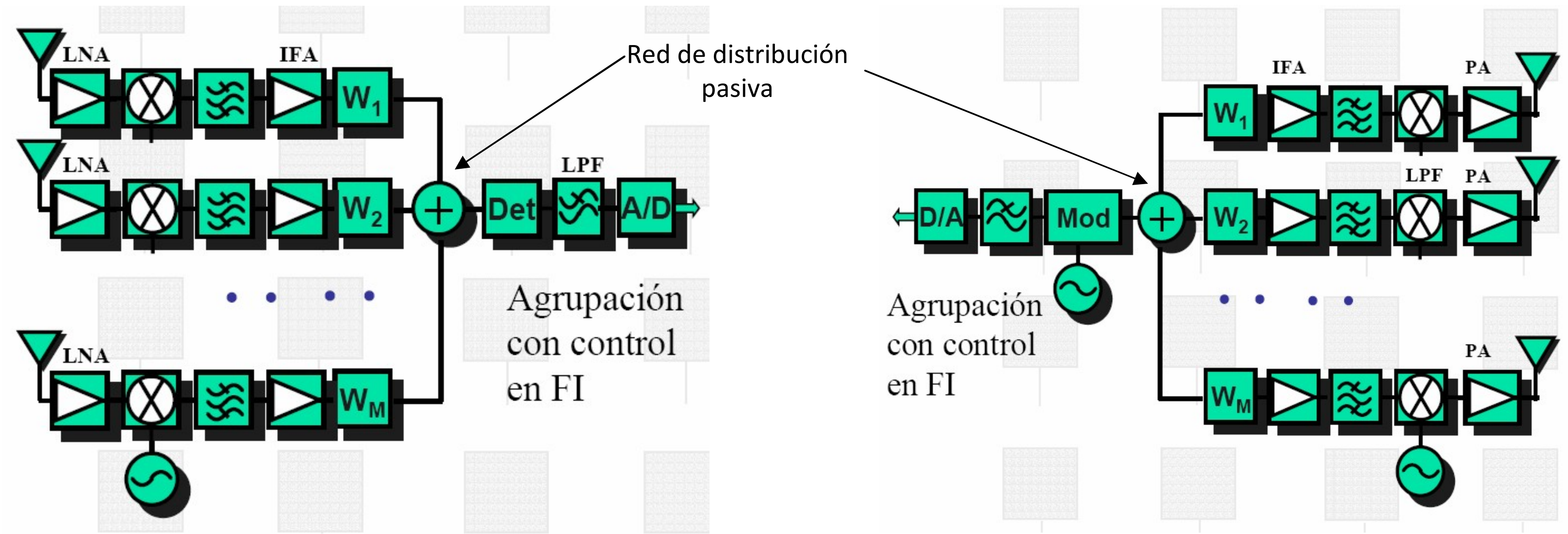


- Mejor figura de ruido, ya que, el LNA está unido a la antena, y no tras la suma de las señales combinadas de la agrupación
- Mayor capacidad de transmisión de potencia, gracias a la inclusión de una amplificador por rama.

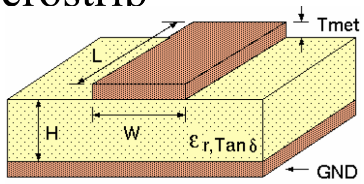
6.- Redes de alimentación. *Redes activas*

- Debido al alto coste de los moduladores de amplitud y fase de RF, se tiende a realizar el control de los pesos de alimentación (w_i) en una frecuencia intermedia (FI)
- Aumento del número de elementos en el receptor o transmisor del array.

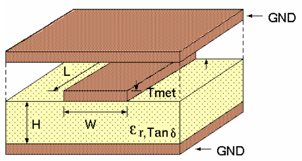
- **Phased array en recepción**
- **Phased array en transmisión**



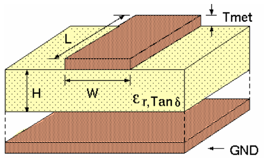
- Línea microstrip



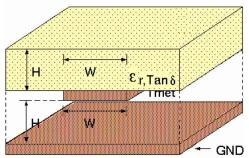
- Línea microstrip cubierta



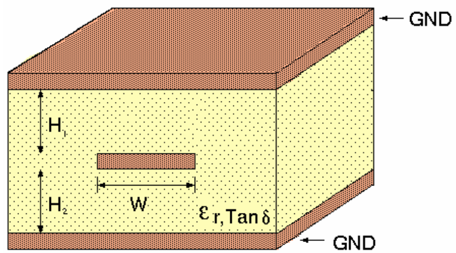
- Línea microstrip suspendida



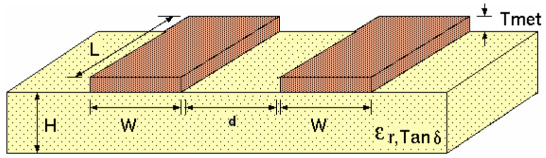
- Línea microstrip invertida



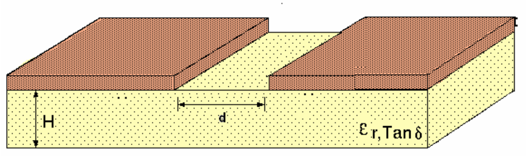
- Línea stripline o triplaca



- Línea coplanar



- Línea slot



- Sus características básicas:
  - Anchura de línea w
  - Espesor de línea t
  - Pérdidas de línea α_c : rugosidad, conductividad del metal
  - Espesor de substrato h
  - Constante dieléctrica del substrato ε_r
  - Pérdidas de substrato: tangente de pérdidas tan(δ)
  - Pérdidas de radiación α_r : radiación espuria, discontinuidad
- Sus parámetros:
  - Impedancia característica Z
  - Constante dieléctrica efectiva ε_{eff}

- Velocidad de fase v_p : $$v_p = \frac{c_0}{\sqrt{\mu_r \varepsilon_r}}$$

- Longitud de onda del medio λ_g : $$\lambda_g = \frac{\lambda_0}{\sqrt{\mu_r \varepsilon_r}}$$

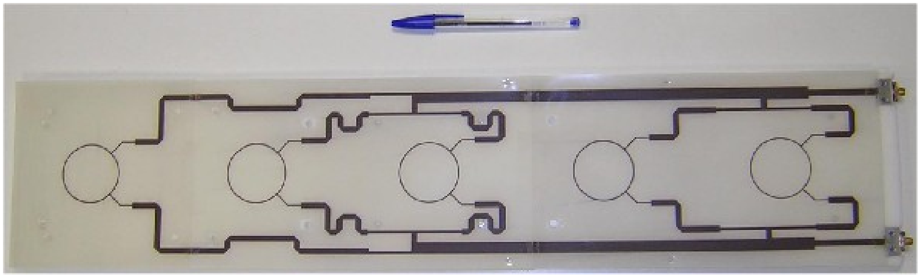
Dieléctrico no-homogéneo:

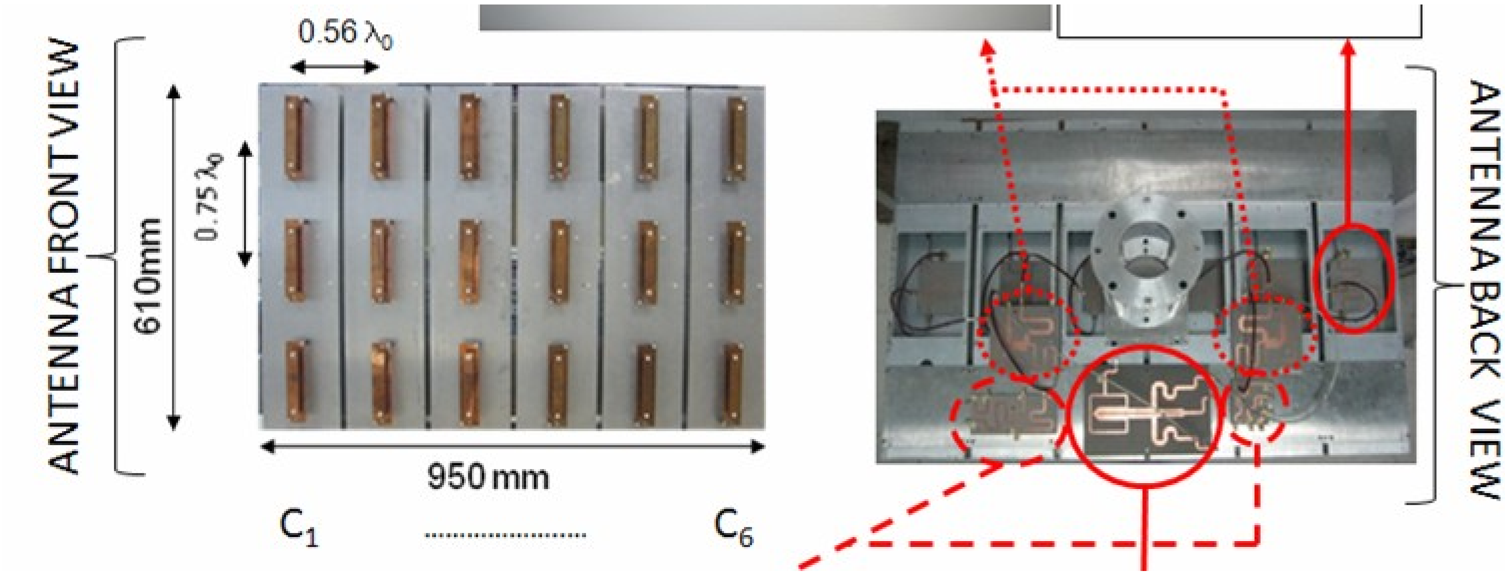
$$\lambda_g = \frac{\lambda_0}{\sqrt{\varepsilon_{eff}}} \qquad v_{p\,g} = \frac{c_0}{\sqrt{\varepsilon_{eff}}}$$

- Dieléctricos no-homogéneos: cuando tenemos varios dieléctricos (multicapa) o cuando ε_r, μ_r varian con la posición en el dieléctrico.
- La constante dieléctrica efectiva ε_{eff} tiene en cuenta la propagación de la onda en dieléctricos no-homogéneo.

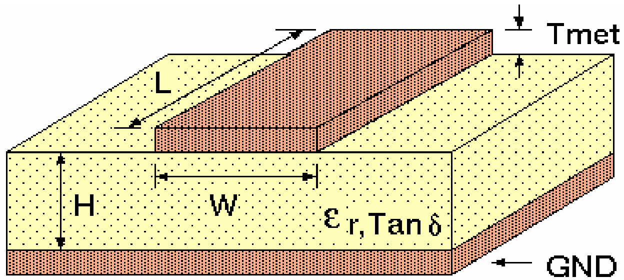
6.- Redes de alimentación. *Arquitecturas básicas microtira*

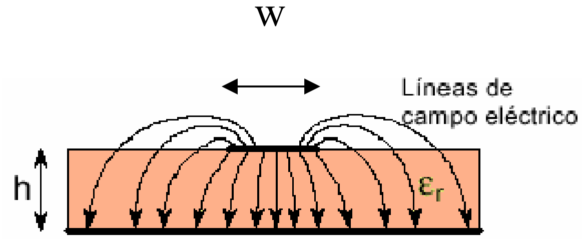
- Ejemplos de redes de alimentación microstrip





6.- Redes de alimentación. *Línea microstrip*





- Estructura de línea de transmisión más común.
- Modo fundamental es quasi-TEM $\Rightarrow$ estando la mayor parte del campo confinado en el dieléctrico.
- Dieléctrico eléctricamente delgado ($0.003\lambda < h < 0.05\ \lambda$) $\Rightarrow$ para evitar ondas de superficie.
- Constante dieléctrica ε_r : $2.2 < \varepsilon_r < 12$ $\Rightarrow$ para que las líneas de campo estén confinadas entorno a la línea microstrip.

- **Sus características :**
  - Impedancia característica Z : $\Rightarrow 0.05 \leq w/h \leq 100,\ \varepsilon_r \leq 16 \Rightarrow 0.2\%$ error

$$Z = \underbrace{\frac{\eta_0}{\sqrt{\varepsilon_{eff}}}}_{\text{Impedancia del medio}} \underbrace{K_g}_{\text{Cte. geométrica}} = \frac{\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}}{2\pi\sqrt{\varepsilon_{eff}}} \ln\left(\frac{6 + (2\pi - 6)\cdot e^{\left(-\left(\frac{30.666\cdot h}{w}\right)^{0.7528}\right)}\cdot h}{w} + \sqrt{1 + \frac{4\cdot h^2}{w^2}} \right)$$

Constante dieléctrica efectiva ε_{eff} : $\Rightarrow \varepsilon_r \leq 16,\ 0.05 \leq w/h \leq 20 \Rightarrow 1\%$ error

$$\varepsilon_{eff} = \frac{\varepsilon_r + 1}{2} + \frac{\varepsilon_r - 1}{2}\left[\left(1 + \frac{12\cdot h}{w}\right)^{-\frac{1}{2}} + 0.04\left(1 + \frac{w}{h}\right)^2\right] \qquad w/h < 1$$

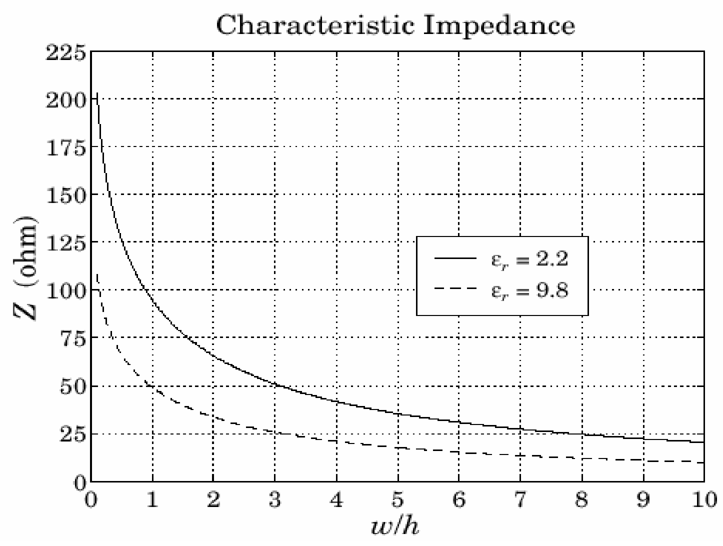
$$\varepsilon_{eff} = \frac{\varepsilon_r + 1}{2} + \frac{\varepsilon_r - 1}{2}\left(1 + \frac{12\cdot h}{w}\right)^{-\frac{1}{2}} \qquad w/h \geq 1$$

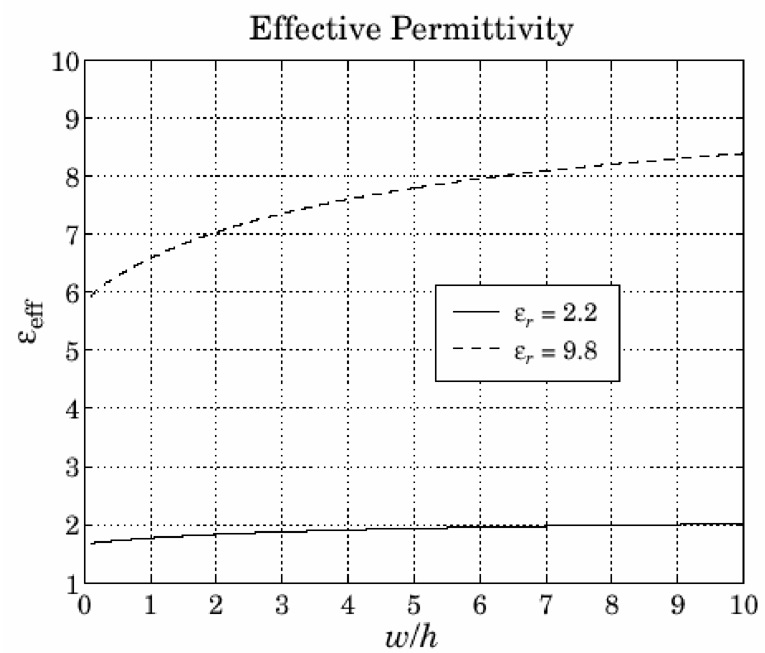
- $< 2\%$ error para $\varepsilon_r > 16$
- $< 2\%$ error para $\frac{w}{h} < 0.05$

6.- Redes de alimentación. *Línea microstrip*

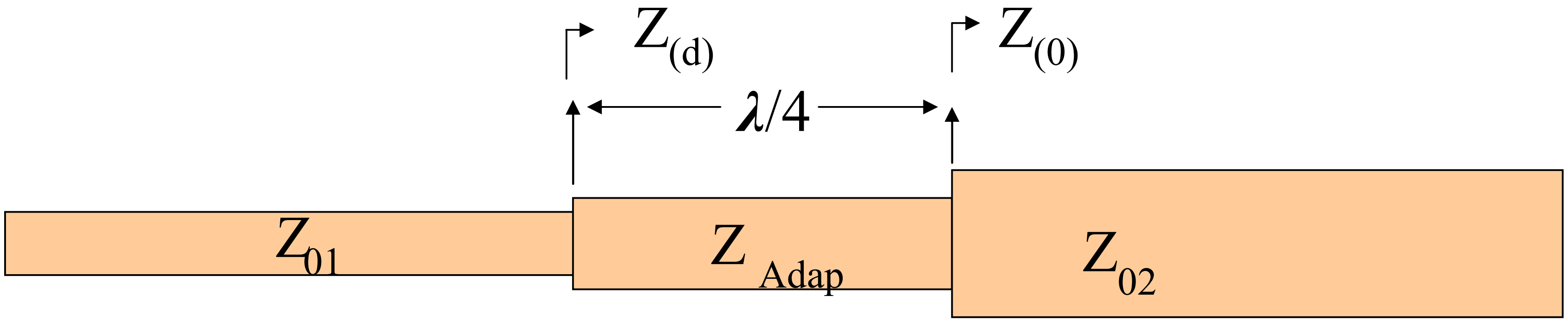
- Algunos substratos dieléctricos típicos utilizados en líneas microstrip son:
  - RT-Duroid 5880 (composito del teflón) $\varepsilon_r = 2.2$
  - Alumina (ceramica de Al_2O_4 (97%)) $\varepsilon_r = 9.8$
- Valores prácticos de anchura/espesor están en el rango de
- Valores prácticos de impedancia característica están entre $10 \leq Z \leq 200$ ohm

$$0.1 \leq \frac{w}{h} \leq 10$$





1- Adaptador $\lambda/4$



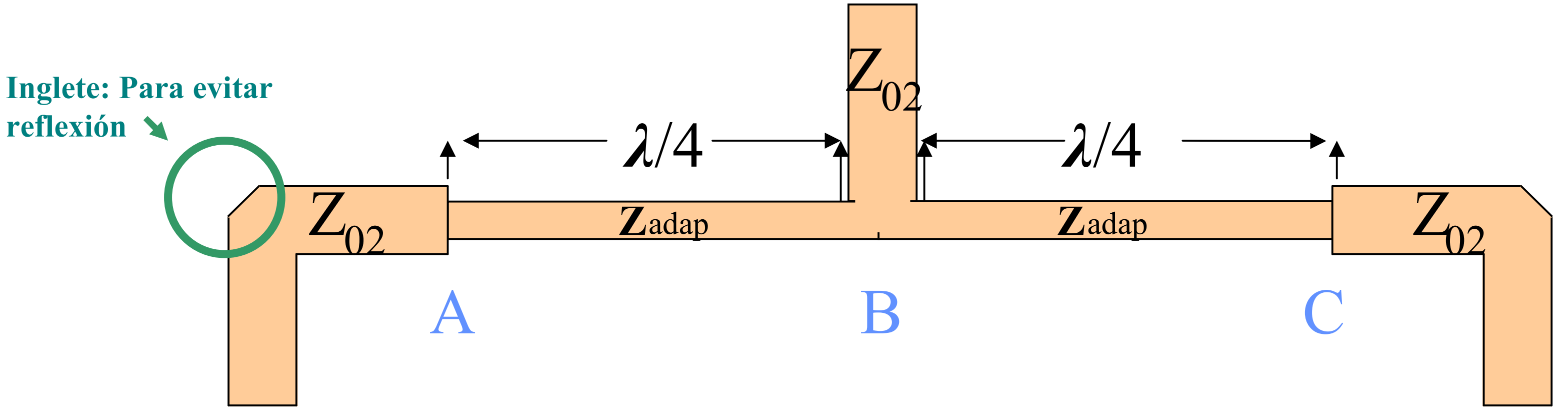
Aproximación sin pérdidas:

$$Z(d) = Z_{adap} \frac{Z(0)\cos\beta d + Z_{adap}\, j sen\beta d}{Z_{adap}\cos\beta d + Z(0)\, j sen\beta d}$$

$\downarrow$ Caso $\lambda/4$

$$Z(d) = Z_{adap} \frac{Z(0)\cos\frac{\pi}{2} + Z_{adap}\, j sen\frac{\pi}{2}}{Z_{adap}\cos\frac{\pi}{2} + Z(0)\, j sen\frac{\pi}{2}} = Z_{adap}\frac{Z_{adap}}{Z(0)} \longrightarrow \boxed{Z_{adap} = \sqrt{Z(0)Z(d)}} \longleftarrow \left\{ \begin{array}{l} Z(0) = Z_{02} \\ Z(d) = Z_{01}^{\ *} = Z_{01} \end{array} \right.$$

2- Divisor de Potencia



Punto A: $Z(A) = Z_{02}$

Punto C: $Z(C) = Z_{02}$

Punto B:

$$Z(B) = Z(B_{izq}) // Z(B_{der}) = \frac{Z(B_{izq}) \cdot Z(B_{der})}{Z(B_{izq}) + Z(B_{der})}$$

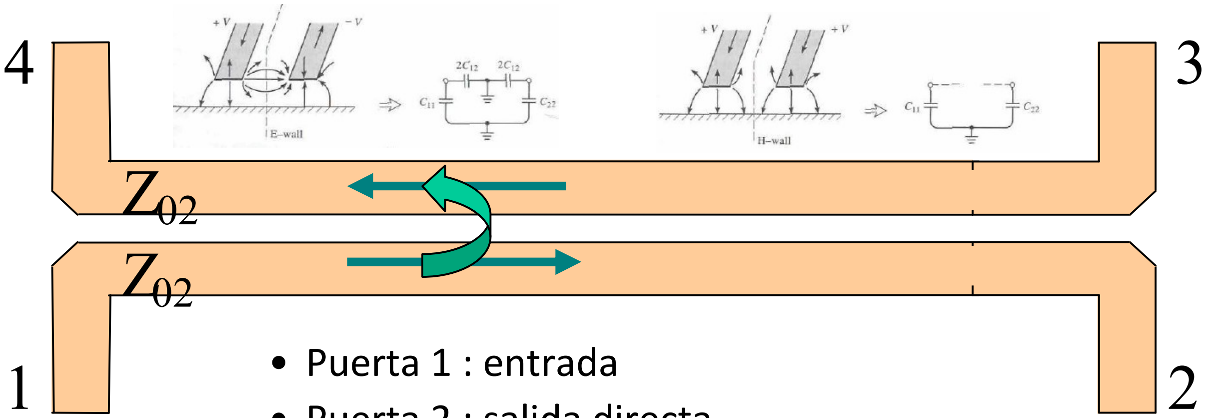
$$Z(B) = Z_{02}$$

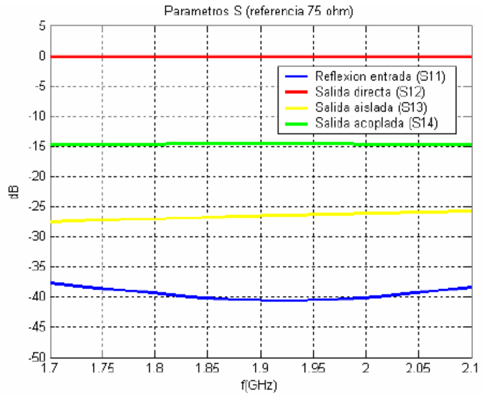
$$Z(B_{izq}) = Z(B_{izq}) = \frac{Z_{adap}^2}{Z_{02}}$$

$$Z_{02} = \frac{\frac{Z_{adap}^2}{Z_{02}} \cdot \frac{Z_{adap}^2}{Z_{02}}}{\frac{Z_{adap}^2}{Z_{02}} + \frac{Z_{adap}^2}{Z_{02}}} = \frac{Z_{adap}^2}{2Z_{02}}$$

$$\boxed{Z_{adap} = \sqrt{2} Z_{02}}$$

3- Acoplador direccional





- Puerta 1 : entrada
- Puerta 2 : salida directa
- Puerta 3 : salida aislada
- Puerta 4 : salida acoplada

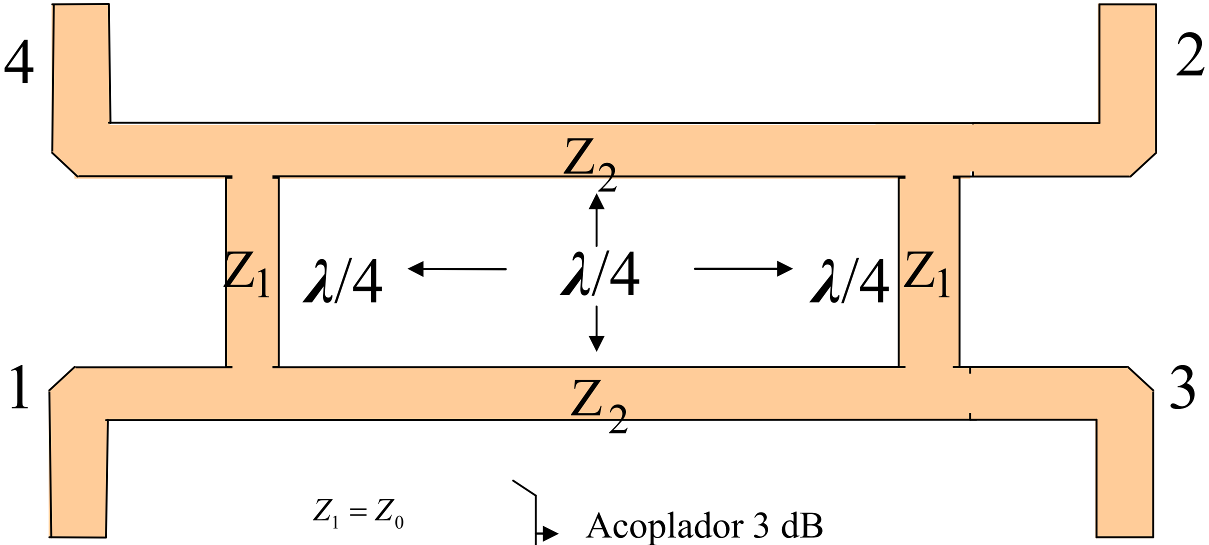
➢Parte de la potencia que entra (**entrada**) en el acoplador sale por una de las puertas, llamada **directa**, y el resto sale por la puerta denominada **acoplada**.

➢La relación de potencias entre las salidas (**directa** y **acoplada**) es un parámetro de diseño del acoplador.

➢La señal de salida entre las puerta **directa** y **acoplada** tienen un desfase de 90º.

➢En la puerta **aislada**, idealmente, no aparece potencia.

4- Acoplador Hibrido 90º



$$Z_1 = Z_0 \quad Z_2 = Z_0/\sqrt{2} \rightarrow \text{Acoplador 3 dB}$$

- Puerta 1 : entrada
- Puerta 2 : salida -90º
- Puerta 3 : salida directa
- Puerta 4 : salida aislada

$$S = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 0 & -j & -1 & 0 \\ -j & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & -j \\ 0 & -1 & -j & 0 \end{bmatrix}$$

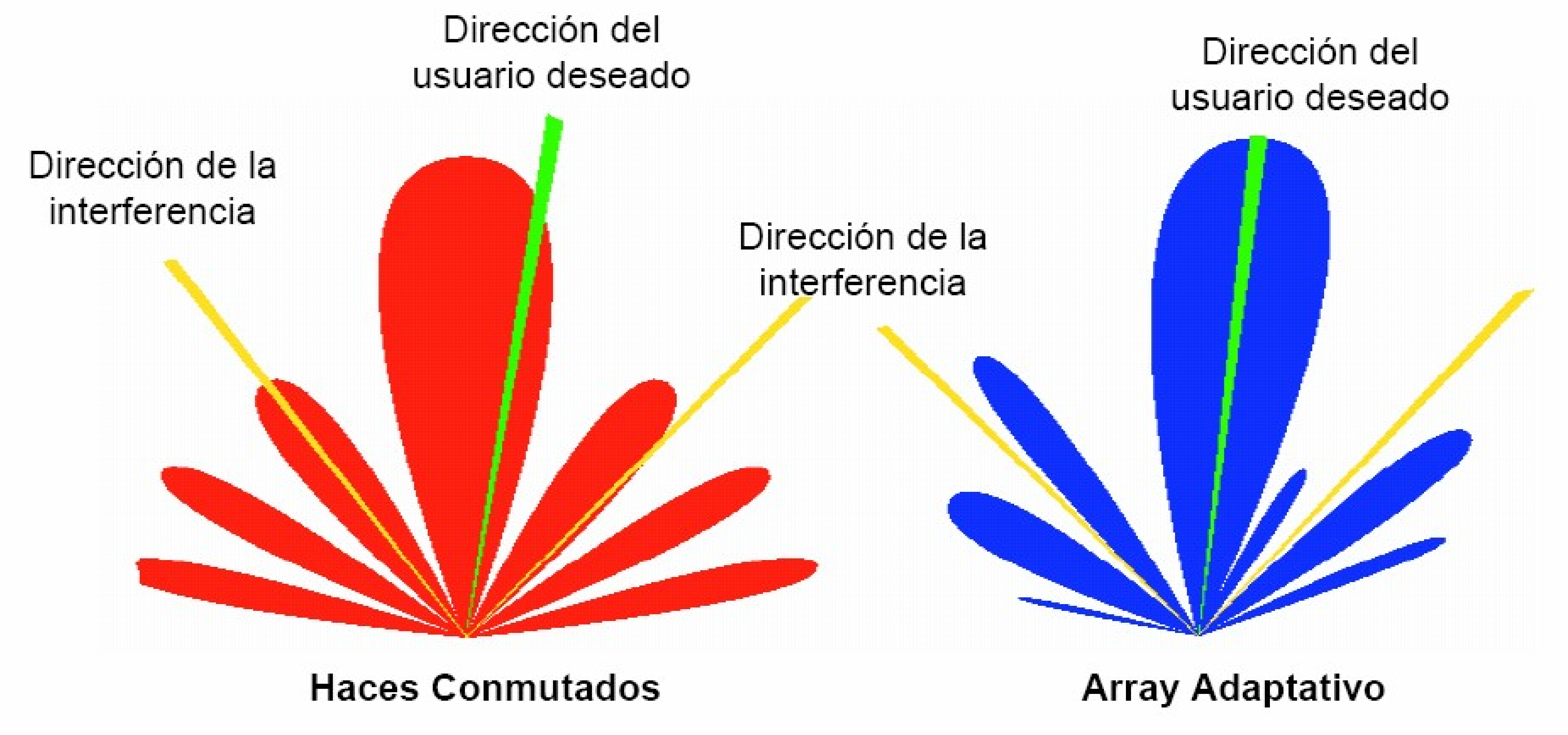
➢Parte de la potencia que entra (**entrada→** 1) en el acoplador sale por una de las puertas (3), y el resto sale por la puerta (2), desfasada 90º.

➢La señal de salida entre las puertas 2 y 3 tiene un desfase de 90º.

➢En la puerta **aislada (4)**, idealmente, no aparece potencia.

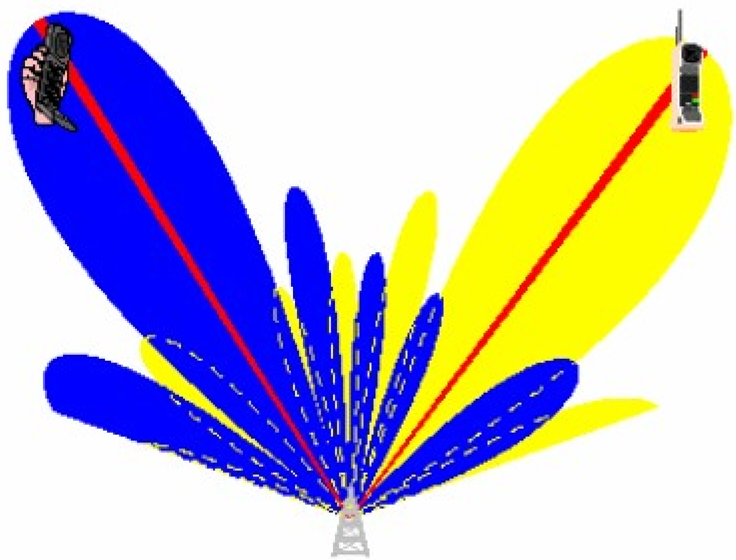
7.- Antenas adaptativas. *Concepto*

- Las antenas adaptativas son capaces de "adaptar" o cnfigurar su diagrama de rádiación en función de entorno radioeléctrico, favoreciendo la dirección de una señal deseada, frente a las direcciones de otras señales interferentes.
- Las mejoras de relación S/N con respecto a antenas de haces conmutados son notables.



7.- Antenas adaptativas. *Concepto*

- En sistemas de telefonía movil, permiten ademas el apuntamiento simultáneo a varios usuarios. Para ello, se aprovechan las característica de la señal modulada por código (CDMA), para establecer una referencia temporal con el usuario.
- Cada diagrama estará "adaptado" a un usuario, introduciendo nulos en el otro usuario que actuará como interferente.
- El límite en el número de diagramas simultáneos lo establece la capacidad del procesador digital encargado de implementar el algoritmo adaptativo adecuado.
- Se requiere un proceso de realimentación en el que se tienen en cuenta las señales recibidas en la definición de los pesos óptimos w_i



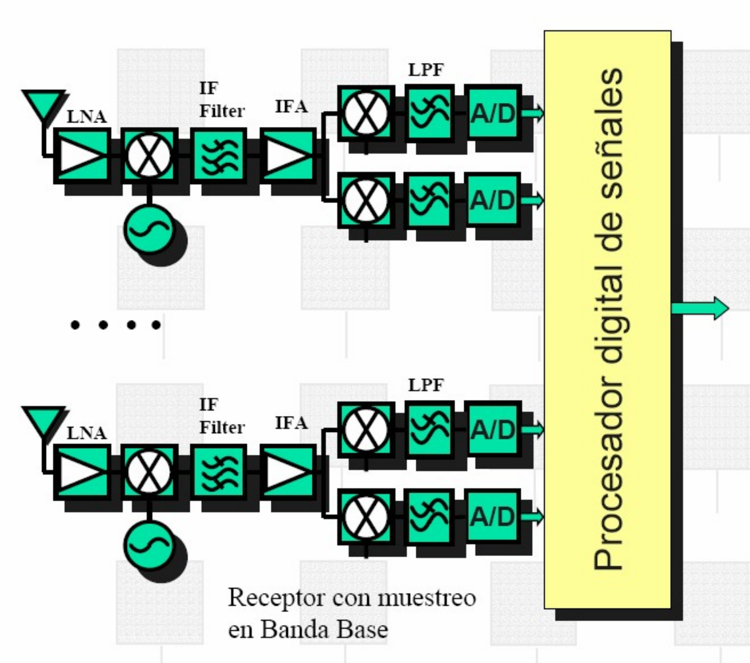
<u>TIPOS DE ALGORITMO DE CONFORMACIÓN DE HAZ</u>

- Referencia temporal
  - Conocemos una señal correlada con la deseada.
- Referencia espacial
  - Conocemos la direccón de llegada.
- Referencia ciega
  - Conocemos alguna propiedad de modulación o correlación de la señal.

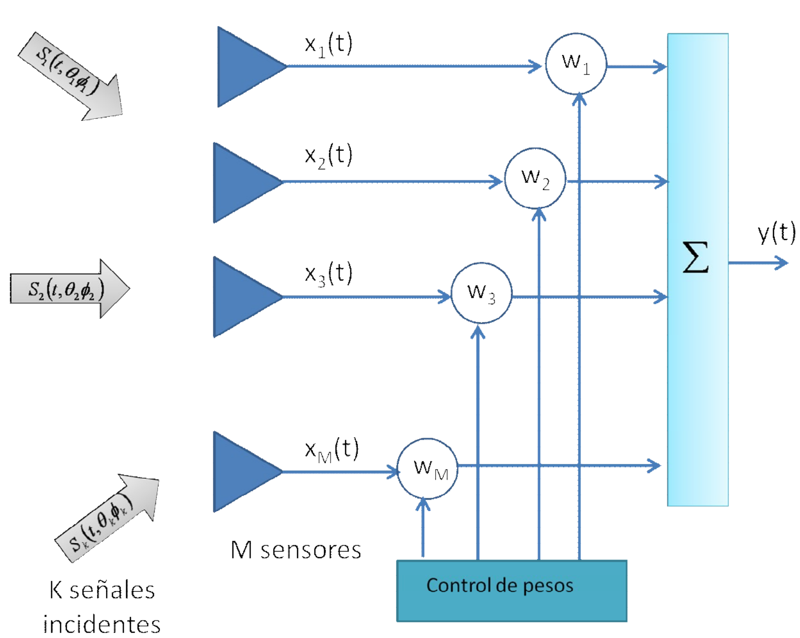
7.- Antenas adaptativas. *Concepto*

- Es necesario incluir un receptor completo en cada elemento de la agrupación del array.
- El muestreo puede realizarse en banda base (necesita un número mayor de componentes) o en FI (frecuencias típicas menores de 100 MHz).
- La obtención de las señales I/Q, son las entradas al procesador digital que serán utilizadas como entradas al algoritmo adaptativo

RECEPTOR PARA PROCESO DIGITAL



MODELO DE SEÑAL CON SENSORES IDEALES



7.- Antenas adaptativas. *Modelo de señal*

- A la salida de cada antena y su receptor (sensor ideal) se obtienen tras el conversor A/D muestras de la señal $x_i(t) \rightarrow x_i(n)$, con un periodo de muestreo T.
- El vector de datos total $x_i(n)$ "snapshot" para el sensor "i", se expresa como:

$$x_i(n) = \sum_{j=1}^{k} s_j(n) \cdot a_{ij}(\theta_j, \phi_j) + N_i(n) \text{ , tal que, } \left\{ \begin{array}{l} a_{ij}(\theta_j, \phi_j) = e^{jk_o \vec{r}_i \hat{r}_j} \\ \hat{r}_j = (sen\,\theta_j \cdot \cos\phi_j \cdot \hat{x} + sen\,\theta_j \cdot sen\,\phi_j \cdot \hat{y} + \cos\theta_j \cdot \hat{z}) \\ \vec{r}_i = x_i \cdot \hat{x} + y_i \cdot \hat{y} + z_i \cdot \hat{z} \end{array} \right.$$

- Generalizando para todos los sensores

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x_1(n) \\ x_2(n) \\ \vdots \\ x_M(n) \end{pmatrix}}_{\text{Vector de datos}} = \begin{bmatrix} a_{11} & \boxed{\begin{matrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{M2} \end{matrix}} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & & \vdots & a_{2k} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{M1} & & \cdots & a_{Mk} \end{bmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} s_1(n) \\ s_2(n) \\ \vdots \\ s_k(n) \end{pmatrix}}_{\text{Señales banda base}} + \underbrace{\begin{pmatrix} N_1(n) \\ N_2(n) \\ \vdots \\ N_M(n) \end{pmatrix}}_{\text{Vector de ruido blanco}}$$

Vector de enfoque: $\begin{pmatrix} a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{M2} \end{pmatrix}^T$

$$\Longleftrightarrow \quad (x(n)) = [A] \cdot (s(n)) + (N(n))$$

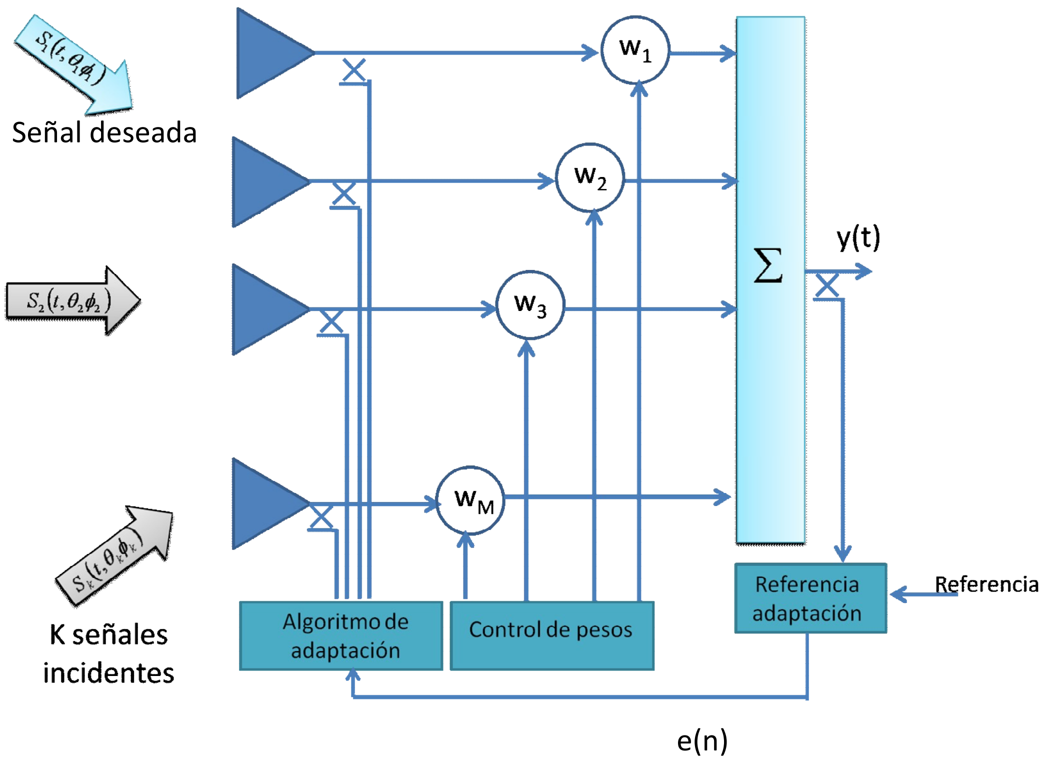
- Muestras de señal recibida total

$$\boxed{y(n) = \sum_{i=1}^{M} w_i^* \cdot x_i(n)}$$

$$y(n) = (\underbrace{w^H}_{\text{Vector de pesos a modificar para adaptar el diagrama}}) \cdot (x(n)) = (w^H) \cdot [[A] \cdot (s(n)) + (N(n))]$$

7.- Antenas adaptativas. *Conformación de haz con referencia temporal*

- Se conoce una señal d(n) correlada con la deseada e incorrelada con las interferencias.
- Se compara la señal conocida con la recibida y se determina el error cuadrático medio.



- **Señal de error**

$$e(n) = d(n) - y(n) = d(n) - (w^H)\cdot(x(n))$$

- **Error cuadrático medio**

$$J((w)) = |e(n)|^2 = |(d(n)) - (w^H)\cdot(x(n))|^2$$

$$J((w)) = \sigma_d^2 + (w^H)[R_{xx}](w) - (w^H)\cdot(p) - (p^H)\cdot(w)$$

donde,

$[R_{xx}] = (x(n))\cdot(x^H(n))$ **= Matriz de correlación**

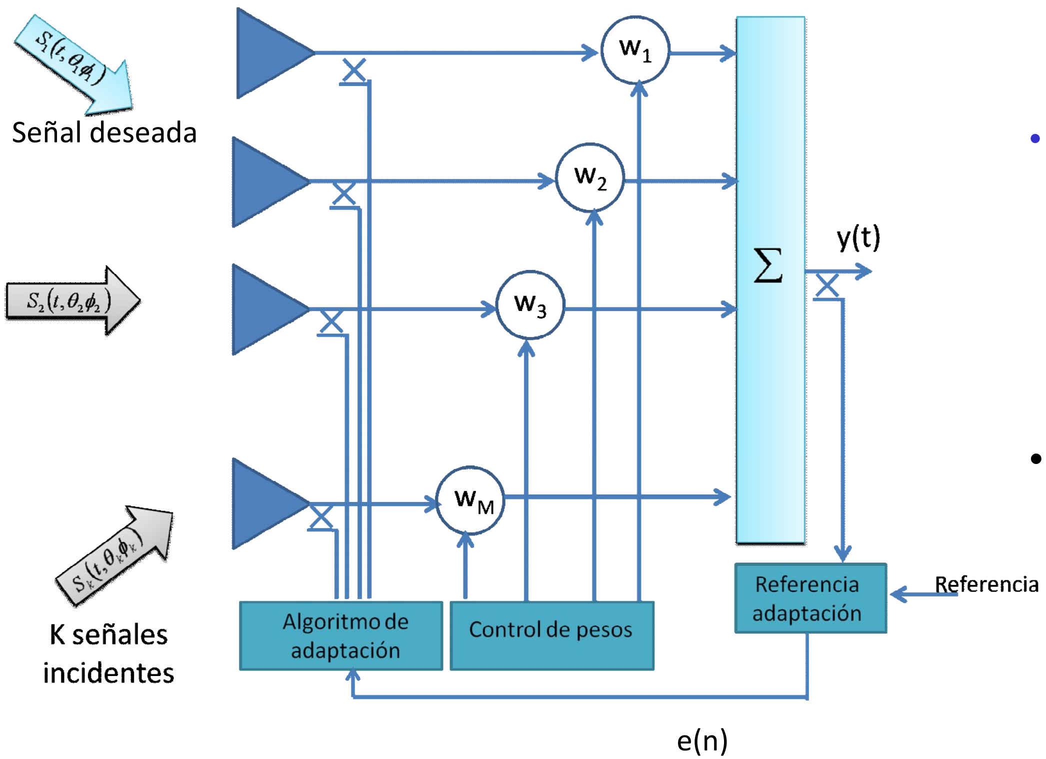
$(p) = (x(n))\cdot d^H(n)$ **= Vector de correlación entre señales de sensores y referencia**

$\sigma_d^2 = d(n)\cdot d^H(n)$ **= Potencia señal deseada**

¡ Objetivo: Minimizar J((w))!

7.- Antenas adaptativas. *Conformación de haz con referencia temporal*

- Minimizando el error cuadrático medio, se obtienen los pesos óptimos que consiguen apuntar el diagrama de radiación hacia la señal deseada, y que sitúan un nulo de radiación a cada señal interferente.



- **Derivando J((w)) con respecto al vector de pesos (w)**

$$\nabla J((w)) = [R_{xx}](w) - (p)$$

- **Igualando a cero se despeja el vector de pesos óptimo**

$$\boxed{(w_{opt}) = [R_{xx}]^{-1} \cdot (p)}$$

Optimo de Wiener

- La matriz de correlación R_{xx} tiene información de la correlación de la señal deseada con las interferentes, así como, de la correlación de la señal deseada con el ruido, ya que,

$$[R_{xx}] = (x(n)) \cdot (x^H(n)) \quad \text{y} \quad (x(n)) = [A] \cdot (s(n)) + (N(n))$$

7.- Antenas adaptativas. *Algoritmo LMS*

- La inversión de matrices puede ser computacionalmente muy costosa, por lo que, se aplican algoritmos, como el demáxima pendiente para la obtención del vector óptimo de pesos.
- Es un proceso iterativo

$$(w(n+1)) = (w(n)) + \mu(-\nabla J(n)) = (w(n)) + \mu \cdot ((p) - [R_{xx}](w(n)))$$

, donde μ es el paso de adaptación. Indica la velocidad con la que se quiere alcanzar el mínimo de error. Una velocidad excesiva puede llevar a que siempre se pase por alto la solución óptima, y una velocidad muy lenta, a que tardemos demasiado en encontrarla

- Aproximación por valor instantáneo.

$$p(n) \cong x(n) \cdot d^*(n) \qquad R_{xx}(n) \cong x(n) \cdot x^H(n)$$

- Por lo que los pesos se actualizan según la expresión.

$$(w(n+1)) = (w(n)) + \mu \cdot ((x(n)) \cdot d^*(n) - (x(n)) \cdot (x^H(n)) \cdot (w(n)))$$

, como el error a la salida del array es $e(n) = d(n) - y(n) = d(n) - (w^H) \cdot (x(n))$

$$\boxed{(w(n+1)) = (w(n)) + \mu \cdot ((x(n)) \cdot e^*(n))}$$

7.- Antenas adaptativas. *Conformación de haz con referencia temporal*

Señal en $\theta_1=60^o$, $\sigma_1=10$

Interferencias en

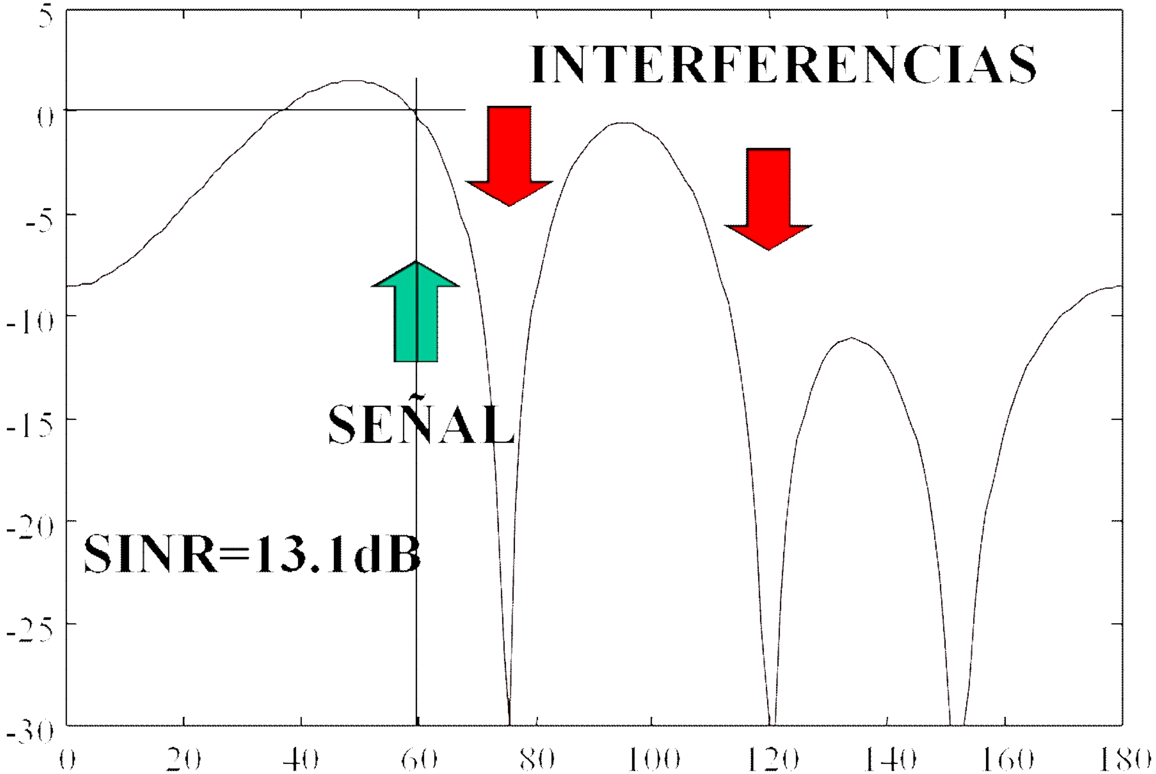
$\theta_2=75^o$, $\sigma_2=100$

$\theta_3=120^o$, $\sigma_3=100$

Ruido $\sigma_n=1$

Referencia $\sigma_d=1$

$\mu=0.1$



7.- Antenas adaptativas. *Conformación de haz con referencia espacial*

- La dirección de llegada es conocida a través del vector (a_d).
- Se minimiza la potencia de salida y(n), con restricción de ganancia normalizada 1 en la dirección de apuntamiento

$$y(n) = \left(w^H\right)\cdot\left(x(n)\right) \Rightarrow \left.|y(n)|^2\right]_{\min} = \left(w^H\right)\cdot\left[R_{xx}\right]\cdot\left(w\right)\Big]_{\min}$$

- Ganancia unidad en dirección de llegada $\left(w^H\right)\cdot\left(a_d\right) = 1$

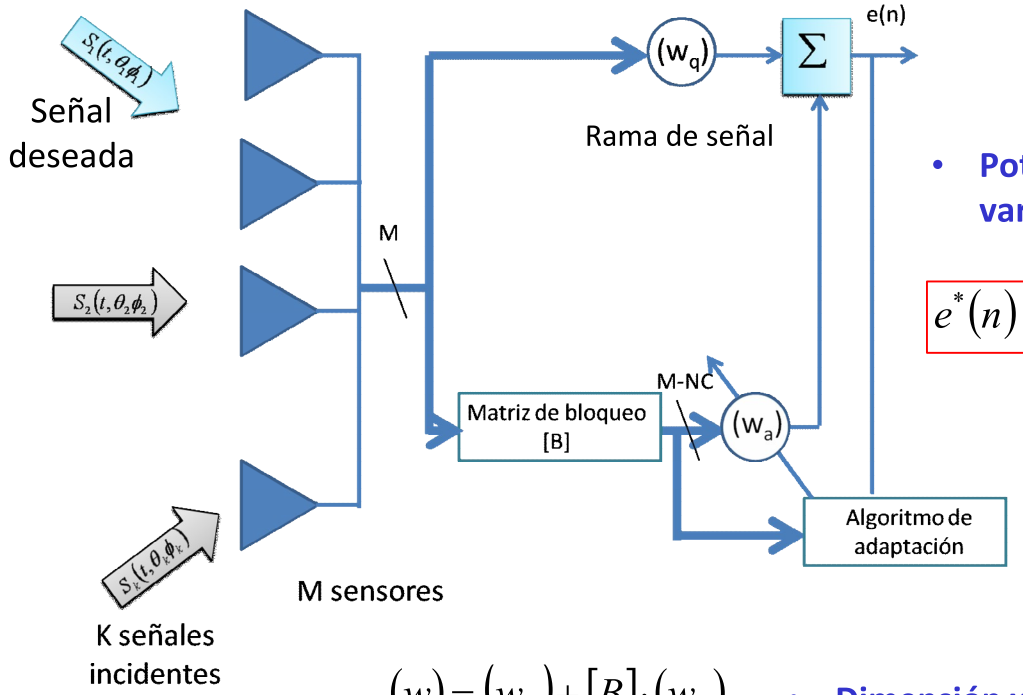
- La solución se consigue aplicando multiplicadores de Lagranje, y el vector de pesos óptimo que minimiza la señal favoreciendo la dirección de llegada (a_d) es:

$$\boxed{\left(w_{opt}\right) = \frac{\left[R_{xx}\right]^{-1}\cdot\left(a_d\right)}{\left(a_d^H\right)\cdot\left[R_{xx}\right]^{-1}\cdot\left(a_d\right)}}$$

- Se aplica a antenas en las que existe una antena principal orientada a una dirección fija conocida, junto con otra antena auxiliar que realiza la conformación cancelando las interferencias que entran en direcciones distintas de la conocida
- Es sensible a los errores de apuntamiento → Cancelación de la señal deseada

7.- Antenas adaptativas. *Cancelador de lóbulos generalizado (GSLC)*

- Algoritmo de referencia espacial, ya que, se conoce la dirección de llegada de la señal deseada. Divide el array en dos ramas: rama de señal con unos pesos fijos (w_q) que impone la forma del diagrama según la dirección de llegada conocida, y rama adaptativa con pesos variables (w_a) que minimiza la potencia de error de salida a través de un algoritmo de mínima varianza.
- La rama inferior supone el complemento ortogonal de la señal deseada, por lo que, la matriz de bloqueo [B], impide el paso de la señal deseada por la misma.



- **Potencia de error de salida a minimizar, variando w_a**

$$e^*(n)=\left(x^H(n)\right)\cdot(w)=\left(x^H(n)\right)\cdot\left((w_q)+[B]\cdot(w_a)\right)$$

- **Para minimizar e(n) se puede aplicar el algoritmo LMS a los pesos w_a**

$$(w)=(w_q)+[B]\cdot(w_a)$$

- **Dimensión w_q = Q**
- **Dimensión w_a = M-Q**